ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И.А. Тайманов

1. Введение

Мы изложим некоторые результаты, полученные в рамках проектов «Геометрические свойства динамических систем», поддержанных РФФИ в 1994–2002 годах [1]). Остановимся лишь на части проведенных исследований, оставив в стороне работы по солитонным уравнениям и их тэта-функциональным решениям (см., например, [13, 14, 18]), теории поверхностей и их интегрируемых деформаций (см., например, [19, 20, 36]), разностным операторам ([32]) и по эргодической теории ([8]).

В тех результатах, которые мы изложим, гладкое многообразие, чьи геометрические и топологические свойства изучаются, возникает либо как фазовое пространство гамильтоновой системы (симплектическое многообразие), либо как конфигурационное пространство динамической системы (геодезического потока).

Мы также не будем ограничиваться только изложением результатов, а приведем открытые вопросы, касающиеся рассматриваемых тем и представляющие большой интерес и цели для дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Фонда содействия отечественной науке.

[1]) В 1994–97 годах эти проекты назывались «Геометрические и эргодические свойства динамических систем».

2. Проблема формальности для симплектических многообразий

Гладкое многообразие M, на котором задана всюду невырожденная замкнутая 2-форма ω, называется симплектическим, а форма ω называется симплектической формой. Согласно теореме Дарбу, в окрестности каждой точки из M форма ω приводится к стандартному виду

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dx^{n+i}.$$

Следовательно, любое симплектическое многообразие четномерно и для компактного $2n$-мерного симплектического многообразия n-я внешняя степень формы ω пропорциональна форме объема. Отсюда следует, что когомологический класс $\alpha = [\omega]$ не равен нулю вместе со всеми своими первыми n степенями:

$$\alpha^k \neq 0 \quad \text{в } H^{2k}(M) \text{ при } k = 1, \dots, n. \tag{2.1}$$

Легко также показать, что симплектическое многообразие имеет почти комплексную структуру, т.е. существует такой послойный автоморфизм $J : TM \to TM$ касательного расслоения к M, что $J^2 = -1$.

Напомним, что кэлерово многообразие — это комплексное многообразие с такой эрмитовой метрикой $g_{j\bar{k}} dz^j d\bar{z}^k$, что форма $\omega = g_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k$ замкнута. Очевидно, что эта форма задает симплектическую структуру на M. Простейшими примерами кэлеровых многообразий, являются комплексные проективные пространства $\mathbb{C}P^n$ с метриками Фубини–Штуди. Обозначим соответствующие этим метрикам кэлеровы через ω_0.

Из результатов Громова и Тишлера следует, что

— *если симплектическая форма ω на многообразии M целочисленна, т.е. $\omega \in H^2(M; \mathbb{Z})$, и $\dim M = 2n$, то существует такое вложение $F : M \to \mathbb{C}P^{2n+1}$, что $F^*\omega_0 = \omega$.*

Так как любую невырожденную 2-форму можно сколь угодно малым возмущением сделать рациональной и затем, после умножения на некоторое натуральное число, — целой, то с точностью до диффеоморфизма все симплектические многообразия — это симплектические подмногообразия в комплексных проективных пространствах.

Заметим, что к настоящему моменту не известно никаких других препятствий к существованию симплектической структуры на замкнутом почти комплексном многообразии M, кроме существования такого когомологического класса $\alpha \in H^2(M)$, для которого выполнены условия (2.1) (мы опускаем случай четырехмерных многообразий, для которых была развита глубокая и своеобразная теория, основанная на методах квантовой теории поля).

Первый пример симплектического многообразия был указан Терстоном. Чтобы построить его напомним, что линейный автоморфизм тора $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ задается матрицей $C \in SL(n, \mathbb{Z})$ и его надстройка есть $(n+1)$-мерное замкнутое многообразие M_C, которое получается из цилиндра $T^n \times [0,1]$ склейкой его границ по автоморфизму C:

$$M_C = T^n \times [0,1]/\{(x,0) \sim (Cx,1)\}, \quad x \in T^n.$$

Многообразие, которое указал Терстон в начале 70-х годов, есть

$$M_{\text{KT}} = M_T \times S^1, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Его первое число Бетти равно трем и оно не имеет ни одной кэлеровой структуры, хотя имеет симплектическую структуру. Как оказалось это многообразие уже возникало в классификации Кодаиры комплексных поверхностей и поэтому оно сейчас называется многообразием Кодаиры–Терстона.

Это многообразие является нильмногообразием (фактор-пространством нильпотентной группы по равномерной решетке) и его красивые обобщения были предложены в работе [1]. А именно, возьмем алгебру Ли $\mathcal{W}$ формальных полиномиальных векторных полей на прямой. Она порождена образующими

$$e_k = x^{k+1}\frac{d}{dx}, \quad k \geqslant -1.$$

Для каждого k рассмотрим подалгебру $\mathcal{W}_k$, порожденную образующими e_j с $j \geqslant k$. При $n \geqslant 3$ фактор-алгебры $\mathcal{V}_n = \mathcal{W}_1/\mathcal{W}_{n+1}$ имеют размерность n, являются нильпотентными алгебрами Ли и соответствующие им односвязные группы Ли V_n допускают равномерные решетки Γ_n. Поэтому определим нильмногообразие как фактор-пространство

$$M_n = V_n/\Gamma_n.$$

Теорема 2.1 ([1]). *На нильмногообразиях $M_{2n}, n \geqslant 3$, существуют целые симплектические формы $\omega_n \in H^2(M_{2n};\ \mathbb{Z})$.*

Все эти многообразия не имеют кэлеровой структуры и обладают рядом замечательных свойств. Заметим, что $M_3 \times S^1$ — это многообразие Кодаиры–Терстона. Бухштабер показал, что существует каноническая последовательность главных S^1-расслоений

$$M_{n+1} \xrightarrow{S^1} M_n,$$

для которых симплектические формы являются формами кривизны и

$$H^*(\lim_{\leftarrow} M_n) = H^*(\mathcal{S}),$$

где $\mathcal{S}$ — алгебра Ландвебера–Новикова из теории комплексных кобордизмов [7]. Другие красивые свойства этих многообразий установили Л.А. Алания, Д.В. Миллионщиков и др.

Если симплектически вложить многообразие Кодаиры–Терстона M_{KT} в $\mathbb{C}P^5$, то на слоях нормального расслоения будет индуцированная почти комплексная структура и мы можем рассмотреть послойное раздутие малой трубчатой окрестности U, которую отождествим с расслоением нормальных дисков малого радиуса. Каждый диск, отождествленный с диском в $\mathbb{C}^3$, будет раздут в точке — нулевом сечении. На раздутии $\widetilde{\mathbb{C}P}^5$ будет существовать симплектическая структура, совместная с симплектической структурой в $\mathbb{C}P^5$ вне $\widetilde{U}$. Эта процедура — симплектическое раздутие — была введена Громовым для любого симплектического вложения $N \to M$. В случае $\widetilde{\mathbb{C}P}^5$ МакДафф показала, что третье число Бетти равно трем и, следовательно, это односвязное симплектическое многообразие не допускает кэлеровой структуры ([31], это был первый пример такого многообразия).

Красивым свойством кэлеровых многообразий является их формальность. Не вдаваясь в сложное определение, данное Сулливаном, мы скажем, что она означает, что рациональный гомотопический тип пространства полностью восстанавливается по рациональному кольцу когомологий ([35]).

Примерами формальных многообразий являются компактные симметрические пространства и односвязные многообразия размерности $\leqslant 6$. Как показано в [25], компактные кэлеровы многообразия формальны. Это доказательство существенно опирается на теорию Ходжа.

В теории симплектических многообразий оставался открытым вопрос: верно ли, что все компактные односвязные симплектические многообразия формальны? Существовала даже гипотеза (Лаптона–Опри), что это так. Как мы показали (совместно с И. К. Бабенко)

Теорема 2.2 ([1]). *В любой четной размерности $n \geqslant 10$ существует бесконечно много попарно негомеоморфных неформальных односвязных компактных симплектических многообразий.*

Наше доказательство основывалось на использовании произведений Масси (существование нетривиальных произведений влечет неформальность, но обратное неверно) и демонстрации того, что нетривиальные тройные произведения в многообразии N при раздутии вдоль $N \subset M$ порождают нетривиальные тройные произведения Масси в $\widetilde{M}$ (при условии, что коразмерность N достаточно велика). Мы обсуждали подобные эффекты для n-кратных произведений ($n \geqslant 4$ в [2]). Эти идеи были впоследствии развиты в работах Рудяка–Тралле и Ламбрехтса–Стэнли.

Они строятся как симплектические раздутия $\mathbb{C}P^n$ по вложенным многообразиям M_{KT} и M_{2n}. Чтобы получить в одной и той же размерности бесконечно много примеров, надо какой-то уже построенный пример раздуть в любом числе точек. Вопрос о существовании такого примера в размерности восемь остается открытым.

Интерес представляет следующий вопрос:

- верно ли, что любое компактное односвязное многообразие с нетривиальной группой голономий формально?

Чтобы объяснить его, напомним теорему Берже [22], согласно которой группа голономий n-мерного риманова многообразия, которое не симметрично и не изометрично (локально) прямому произведению римановых многообразий, принадлежит следующему списку [1]):

$$U(n/2),\ SU(n/2),\ Sp(n/4),\ Sp(n/4)Sp(1),\ G_2\ (n=7),\ Spin(7)\ (n=8).$$

Сейчас известно, что все эти возможности реализуются компактными римановыми многообразиями (примеры с группами голономий G_2 и $Spin(7)$ в середине 1990-х годов построил Джойс) [30].

Многообразия с группой голономий $U(n/2)$ — это, в точности, кэлеровы многообразия, а многообразия с группой голономий $SU(n/2)$ — это кэлеровы многообразия с нулевым первым классом Черна ($c_1=0$, они также называются многообразиями Калаби–Яо). Многообразия с группой голономий $Sp(n/4)$ называются гиперкэлеровыми и имеют три кэлеровы структуры, порожденные тремя автоморфизмами касательного расслоения (комплексными структурами) I, J, K, которые связаны кватернионными соотношениями:

$$I^2=J^2=K^2=-1,\ IJ=-JI=K,\ JK=-KJ=I,\ KI=-IK=J.$$

Следовательно, все (односвязные) римановы многообразия с группами голономий $U(n/2)$, $SU(n/2)$ и $Sp(n/4)$ — кэлеровы и формальны. Существует правдоподобная гипотеза, что все компактные односвязные кватернионно кэлеровы многообразия (это $4n$-мерные многообразия с группой голономий $Sp(n)Sp(1)$) симметричны. Многообразия с группами голономий G_2 и $Spin(7)$ имеют очень маленькую размерность, как раз на грани допустимой, и выделяются многими особыми свойствами. Поэтому возникают ожидания, не подкрепленные пока достаточно весомыми аргументами, что они формальны.

3. Интегрируемые геодезические потоки с положительной топологической энтропией

Геодезическая система на $2n$-мерном симплектическом многообразии M называется интегрируемой (по Лиувиллю), если кроме гамильтониана $H=I_1$ она допускает еще $(n-1)$ интегралов движения $I_2,\dots,I_n$, которые попарно коммутируют относительно скобок Пуассона: $\{I_j,I_k\}=0$ при $j,k=1,\dots,n$, и функционально независимы на множестве полной меры.

Для геодезических потоков на T^*N, которые траекторно эквивалентны на различных ненулевых уровнях гамильтониана $H=g^{ik}p_ip_k$

[1]) В действительности, список содержал и группу $Spin(9)$ как группу голономий 16-мерного многообразия, но, как показал в 1968 году Д. В. Алексеевский, все римановы многообразия с такой группой голономий локально изометричны симметричным пространствам.

(здесь $g_{ik}(x)$ — риманова метрика на N и p — импульс), определение можно свести к требованию существования таких дополнительных интегралов на какой-то ненулевой поверхности уровня $H = \mathrm{const}$.

Требования функциональной независимости на множестве полной меры достаточно слабое. Дополнение к этому множеству может быть устроено очень сложно, как и ограничение потока на него.

Традиционно в аналитической механике говорят об аналитической интегрируемости, когда все дополнительные интегралы и гамильтониан — вещественно-аналитические функции.

Первое топологическое препятствие к интегрируемости было найдено Козловым [9], доказавшим, что

— *если геодезический поток на замкнутой ориентированной вещественно-аналитической поверхности допускает дополнительный вещественно-аналитический интеграл движения, то поверхность гомеоморфна либо сфере, либо тору.*

Многомерный аналог этой теоремы был доказан нами в 1984 году [16]:

— *если геодезический поток на замкнутом n-мерном многообразии M^n аналитически интегрируем, то*

1) $\pi_1(M)$ *почти коммутативна;*

2) $H^*(M;\mathbb{R})$ *содержит подкольцо, которое изоморфно кольцу когомологий k-мерного тора $H^*(T^k;\ \mathbb{R})$, где $k = \dim H^1(M;\ \mathbb{R})$:*

$$H^*(M;\ \mathbb{R}) \supset H^*(T^k;\ \mathbb{R});$$

и, в частности,

$$\dim H^1(M;\mathbb{R}) \leqslant \dim M;$$

3) *если $k = n$, то*

$$H^*(M;\mathbb{R}) = H^*(T^n;\mathbb{R}).$$

Наш результат тоже был получен при предположении аналитичности или, более общо, геометрической простоты. Собственно аналитичность влекла за собой достаточно хорошую геометрическую структуру множества, на котором интегралы движения функционально зависимы (его образ при отображении момента допускал кусочно-гладкое конечное симплициальное разбиение, дополнение к которому состояло из конечного числа дисков, в общем-то это и было использовано). Мы назвали класс потоков, для существования которых было найдено препятствие, геометрически простым.

Как оказалось, это условие существенно. Недавно Батлер доказал, что геодезический поток левоинвариантной метрики на пространстве

$$M = \mathcal{H}/\mathcal{H}_{\mathbb{Z}},$$

где

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ :\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

— группа Гейзенберга, а $\mathcal{H}_\mathbb{Z}$ — решетка, образованная матрицами с целыми коэффициентами, интегрируем посредством C^∞ интегралов движения [24]. Заметим, что фундаментальная группа многообразия M не почти коммутативна.

При построении интегралов Батлер использовал глобальные координаты на нильпотентной группе $\mathcal{H}$.

Анализируя причины, почему метод доказательства нашей теоремы из [16] не проходит в этом случае, мы (совместно с А. В. Болсиновым) заметили, что этот эффект и само построение первых интегралов можно красивее объяснить, если рассматривать многообразие $\mathcal{H}/\mathcal{H}_\mathbb{Z}$ как надстройку нильпотентного автоморфизма двумерного тора: $\mathcal{H}/\mathcal{H}_\mathbb{Z} = M_T$. Если же заменить нильпотентный автоморфизм на гиперболический

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то можно получить более интересный пример геодезического потока. А именно, имеет место

Теорема 3.1 ([23]). *Существует такое вещественно-аналитическое риманово многообразие M_A (размерности 3), что*

i) его геодезический поток C^∞-интегрируем, но аналитически неинтегрируем;

ii) топологическая энтропия геодезического потока положительна, но энтропия для любой гладкой меры равна нулю;

iii) фундаментальная группа $\pi_1(M_A)$ имеет экспоненциальный рост;

iv) многообразие линейных элементов SM_A содержит такое подмногообразие, диффеоморфное тору T^2, что оно инвариантно относительно сдвига (за время $T = 1$) и ограничение сдвига задается аносовской матрицей A.

Это первый пример геодезического потока с ненулевой топологической энтропией, но с нулевой энтропией по отношению к любой гладкой инвариантной мере (в том числе к мере Лиувилля). Это же — первый пример интегрируемого потока с ненулевой топологической энтропией.

Отметим еще два интересных его свойства: построенная метрика — однородна и само многообразие является фактор-пространством разрешимой трехмерной группы Sol по равномерной решетке.

Поток вещественно-аналитичен, и почти все фазовое пространство расслаивается на инвариантные торы, которые в пределе стремятся к множеству, на котором интегралы движения функционально зависимы и на котором ограничение потока — аносовское.

К настоящему моменту не известно топологических препятствий к существованию даже аналитически интегрируемых геодезических потоков на односвязных многообразиях. Известен следующий факт, доказанный Патернайном с помощью результатов Громова и Иомдина [33]:

— *если геодезический поток C^∞ метрики на компактном многообразии имеет нулевую топологическую энтропию, то многообразие рационально-эллиптично.*

Рациональная эллиптичность, тоже введенная Сулливаном [35], означает, что сумма рангов гомотопических групп односвязного многообразия M конечна, или, что эквивалентно, все гомотопические группы $\pi_k(M)$, начиная с какого-то значения $k = k_0$, — конечны. Оказывается, как показали Гальперин и Фридлендер, уже из этого предположения можно вывести оценку на числа Бетти $b_k(M) = \dim H_k(M; \mathbb{R})$:

$$\sum b_k \leqslant 2^n, \quad n = \dim M,$$

на эйлерову характеристику:

$$\chi(M) \geqslant 0,$$

на ранги гомотопических групп:

$$\dim \pi_*(M) \otimes \mathbb{Q} \leqslant n,$$

и ряд других.

Еще в начале 1990-х годов мы выдвинули гипотезу, до сих пор не опровергнутую и которую мы сформулируем как вопрос (мы предполагаем, что ответ на него положителен):

- верно ли, что, если геодезический поток на компактном n-мерном многообразии M^n геометрически прост (например аналитически интегрируем), то числа Бетти удовлетворяют оценке

$$b_k(M^n) \leqslant b_k(T^n) = \frac{n!}{(n-k)!k!}?$$

Недавно наш аспирант Павлов доказал, что эти неравенства, улучшенные в два раза, верны для рационально-эллиптических односвязных многообразий [15].

Подход Патернайна состоял в том, чтобы доказать, что интегрируемость, в каком-то смысле, влечет равенство нулю топологической энтропии и вывести отсюда, что односвязное многообразие с интегрируемым геодезическим потоком рационально-эллиптично [33]. Он сделал это при сильных дополнительных предположениях на интегралы движения. Как показывает теорема 3.1 аналитичность видимо существенна, но следующий вопрос до сих пор открыт:

- верно ли, что аналитически интегрируемый геодезический поток имеет нулевую топологическую энтропию?

Другой интересный вопрос касается теоремы Козлова. В начале 1980-х годов Колокольцов распространил ее на случай, когда дополнительный интеграл движения аналитичен только по импульсам [10]. Остается открытым вопрос

- верно ли, что теорема Козлова верна в предположении, что дополнительный интеграл движения гладкий?

Ответ на него не ясен, есть надежды построить интегрируемые геодезические потоки хотя бы финслеровых метрик на поверхностях большого рода.

В двумерном случае остается открытой другая проблема:

- верно ли, что, если геодезический поток на двумерном торе допускает гладкий (или хотя бы аналитический) дополнительный интеграл движения, то метрика на торе приводится к лиувиллеву виду $(f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$ и поток имеет дополнительный интеграл первой или второй степени по импульсам?

4. Многообразия положительной секционной кривизны

С рациональной эллиптичностью связана известная гипотеза, впервые сформулированная Грове и Гальпериным [27] и приписываемая Ботту (как и выше мы сформулируем ее в форме вопроса, на который ответ предполагается положительным):

- верно ли, что, если компактное односвязное многообразие допускает метрику неотрицательной (или хотя бы положительной) секционной кривизны, то многообразие рационально-эллиптично?

Если она верна, то мы получаем ряд важных следствий:

а) гипотезу Громова об оценке чисел Бетти: $\sum b_k \leqslant 2^n$,

б) гипотезу Хопфа об эйлеровой характеристике: $\chi \geqslant 0$,

и ряд других утверждений.

Вывести ее из динамических соображений трудно: положительность секционной кривизны не влечет регулярность геодезического потока. Мы можем получать потоки с положительной топологической энтропией уже на двумерных сферах, сколь угодно близких к эллипсоидам.

Тем не менее до сих пор привлекает внимание топологическое сходство классов односвязных многообразий, допускающих метрики неотрицательной секционной кривизны, и односвязных многообразий, допускающих метрики с регулярными геодезическими потоками (например с нулевой топологической энтропией).

Построить контрпример к гипотезе Ботта тем более трудно, что почти нет примеров многообразий положительной секционной кривизны.

Заметим, что для пространств с нерегулярными метриками — для александровских пространств — аналог гипотезы Ботта не верен.

К началу 1980-х годов все примеры многообразий положительной секционной кривизны получались как однородные пространства (мы указываем только односвязные примеры):

1) компактные ранга один симметрические пространства S^n, $\mathbb{C}P^n$, HP^n и CaP^2;

2) пространства Берже $Sp(2)/SU(2)$ и $SU(5)/(Sp(2) \times S^1)$;

3) пространства Уоллаха $SU(3)/T^2, Sp(3)/Sp(1)^3$ и $F_4/Spin(8)$;

4) пространства Алоффа–Уоллаха $SU(3)/S^1_{k,l}$.

Трудность состояла в том, чтобы оценить кривизны во всех точках, и поэтому примеры метрик искались среди однородных. Как было строго доказано, других однородных односвязных примеров, кроме указанных выше, нет.

Позднее Эшенбург нашел примеры пространств двойных частных вида $SU(3)//T^2$ и $U(3)//S^1_{k,l,m}$, где выражение $G//H$ означает, что подгруппа H действует умножениями на G одновременно и слева, и справа. В этом случае опять можно применить более сложные вычисления в алгебрах Ли и получить положительные нижние оценки на секционные кривизны.

В серии работ Базайкин установил следующие результаты [1]):

Теорема 4.1 ([3–5]). *1) Существует бесконечная серия (попарно негомеоморфных) неоднородных замкнутых многообразий положительной секционной кривизны вида* $U(5)//(Sp(2) \times S^1 \times S^1)$.

2) Геодезические потоки метрик положительной секционной кривизны, построенных Эшенбургом и Базайкиным, интегрируемы.

3) Существует замкнутое многообразие положительной секционной кривизны с $\pi_1 = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

К настоящему времени другие примеры односвязных многообразий, допускающих метрики положительной секционной кривизны, неизвестны.

Заметим, что при $\dim M = 2n+1 > 13$ все известные примеры — сферы. Бесконечные серии имеются только в размерностях семь (Алофф–Уоллах, Эшенбург) и тринадцать (Базайкин).

Оказываются многие пространства Эшенбурга реализуются как вполне геодезические подпространства пространств Базайкина, составляя компоненты многообразий неподвижных точек при изометрических инволюциях [17]. В этой же статье показано, что аналогичная связь существует для пространств Уоллаха, что объясняет совпадение для них оптимальных констант защемления метрик.

Многообразия Алоффа–Уоллаха очень интересны с топологической точки зрения. Как установили Крек и Штольц среди них есть пары попарно недиффеоморфных, но гомеоморфных однородных многообразий (это — первые примеры однородных многообразий с различными гладкостями). В частности, отсюда следует, что одно из них может быть получено из другого связной суммой с экзотической сферой. Примеры метрик неотрицательной секционной кривизны на экзотических сферах известны (Громолл–Мейер, Грове–Циллер), но следующий вопрос открыт:

---

[1]) Эти работы составили его кандидатскую диссертацию. Еще одна кандидатская диссертация, подготовленная в рамках проектов, была защищена другим нашим учеником Мироновым на основе работ [11–13].

- существуют ли метрики положительной секционной кривизны на сферах с нетривиальными гладкостями?

Известно, что есть экзотические сферы которые не допускают метрик даже положительной скалярной кривизны (Хитчин [29]).

Отсутствие примеров породило вопрос Чженя: верно ли, что у фундаментальных групп многообразий положительной секционной кривизны все абелевы подгруппы цикличны? Это так в случае неотрицательной кривизны, в положительной кривизне аргументов в пользу аналогичного ответа не было.

Как недавно показал Шанкар существует многообразие с фундаментальной группой $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ [34]. Позднее Базайкин и независимо Грове–Шанкар построили пример с $\pi_1 = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$. Других примеров пока нет.

Классификация пространств двойных частных тоже по-видимому исчерпала все возможности найти среди них новые многообразия с положительной секционной кривизной.

Остается важной проблема:

- как строить многообразия положительной секционной кривизны?

Известно, что суммы чисел Бетти многообразий неотрицательной секционной кривизны ограничены: $\sum b_k(M) \leqslant C(n)$, $n = \dim M$ (Громов [26]), откуда следует, что такие пространства не выдерживают хирургии, которые можно неограниченно итерировать.

Отсутствие большого числа примеров, как экспериментальной основы для исследований, является проблемой для развития теории многообразий положительной секционной кривизны.

Так как старые возможности (однородные пространства, пространства двойных частных) исчерпали себя, то построение любого нового примера даст какой-то метод, который будет сам по себе интересен.

Список литературы

1. *Бабенко И.К., Тайманов И.А.* О неформальных односвязных симплектических многообразиях // Сибирский матем. журнал. 2000. Т. 41, № 2. С. 253–269.
2. *Бабенко И.К., Тайманов И.А.* Произведения Масси в симплектических многообразиях // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 8. С. 3–44.
3. *Базайкин Я.В.* Об одном семействе 13-мерных замкнутых римановых многообразий положительной кривизны // Сибирский матем. журнал. 1996. Т. 37. С. 1219–1237.
4. *Базайкин Я.В.* Многообразие положительной секционной кривизны с фундаментальной группой $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ // Сибирский матем. журнал. 1999. Т. 40. С. 994–996.
5. *Базайкин Я.В.* Двойные частные групп Ли с интегрируемым геодезическим потоком // Сибирский матем. журнал. 2000. Т. 41. С. 513–530.
6. *Болсинов А.В., Тайманов И.А.* Интегрируемые геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов // Труды Математического института РАН. 2000. Т. 231. С. 46–63.

7. *Бухштабер В.М.* Группы полиномиальных преобразований прямой, неформальные симплектические многообразия и алгебра Ландвебера–Новикова // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54, вып. 4. С. 161–162.
8. *Качуровский А.Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51, вып. 4. С. 73–124.
9. *Козлов В.В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН СССР. 1979. Т. 249, вып. 6. С. 1299–1302.
10. *Колокольцов В.Н.* Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралам // Известия АН СССР, серия матем. 1982. Т. 46, вып. 5. С. 994–1010.
11. *Миронов А.Е.* Коммутативные кольца дифференциальных операторов, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сибирский матем. журнал. 2000. Т. 41. С. 1389–1403.
12. *Миронов А.Е.* О нелинейных уравнениях, интегрируемых в тэта-функциях не главно поляризованных абелевых многообразий // Сибирский матем. журнал. 2001. Т. 42. С. 113–122.
13. *Миронов А.Е.* Вещественные коммутирующие дифференциальные операторы, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сибирский матем. журнал. 2002. Т. 43. С. 126–143.
14. *Миронов А.Е.* Коммутативные кольца матричных дифференциальных операторов, отвечающие многомерным алгебраическим многообразиям // Сибирский матем. журнал. 2002. Т. 43. С. 1086–1097.
15. *Павлов А.В.* Оценки чисел Бетти рационально эллиптических пространств // Сибирский матем. журнал. 2002. Т. 43. С. 1332–1338.
16. *Тайманов И.А.* Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях // Известия АН СССР, сер. матем. 1987. Т. 51. С. 429–435.
17. *Тайманов И.А.* О вполне геодезических вложениях 7-мерных многообразий в 13-мерные многообразия положительной секционной кривизны // Матем. сборник. 1996. Т. 187, № 12. С. 121–136.
18. *Тайманов И.А.* Секущие абелевых многообразий, тэта-функции и солитонные уравнения // Успехи мат. наук. 1997. Т. 52, вып. 1. С. 149–224.
19. *Тайманов И.А.* Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ // Функц. анализ и его прил. 1998. Т. 32, вып. 4. С. 49–62.
20. *Тайманов И.А.* Представление Вейерштрасса сфер в $\mathbb{R}^3$, числа Уиллмора и солитонные сферы // Труды Математического института РАН. 1999. Т. 225. С. 339–361.
21. *Babenko I.K.*, *Taimanov I.A.* On the formality problem for symplectic manifolds // AMS. Contemp. Math. 2001. V. 288. P. 1–9.
22. *Berger M.* Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemannienes // Bull. Soc. Math. France. 1955. V. 83. P. 279–330.
23. *Bolsinov A.V.*, *Taimanov I.A.* Integrable geodesic flows with positive topological entropy // Invent. Math. 2000. V. 140. P. 639–650.
24. *Butler L.* New examples of integrable geodesic flows // Asian J. Math. 2000. V. 4. P. 515–526.
25. *Deligne P.*, *Griffiths P.*, *Morgan J.*, *Sullivan D.* Real homotopy theory of Kähler manifolds // Invent. Math. 1975. V. 19. P. 245–274.

26. *Gromov M.* Curvature, diameter and Betti numbers // Comment. Math. Helvetici. 1981. V. 56. P. 179–195.
27. *Grove K.*, *Halperin S.* Contributions of rational homotopy theory to global problems in geometry // Publ. IHES. 1982. V. 56. P. 379–385.
28. *Grove K.*, *Shankar K.* Rank two fundamental groups of positively curved manifolds // J. Geom. Anal. 2000. V. 10. P. 679–682.
29. *Hitchin N.* Harmonic spinors // Advances in Math. 1974. V. 14. P. 1–55.
30. *Joyce D.* Compact manifolds with special holonomy. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.
31. *McDuff D.* Examples of symplectic simply connected manifolds with no Kähler structure // J. Diff. Geom. 1984. V. 20. P. 267–277.
32. *Novikov S.P.*, *Taimanov I.A.* Difference analogs of the harmonic oscillator // Translations of the Amer. Math. Soc., Ser. 2. V. 179. 1997. P. 126–130.
33. *Paternain G.P.* On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows // Ergod. Theory Dynam. Syst. 1992. V. 12. P. 109–121.
34. *Shankar K.* On the fundamental groups of positively curved manifolds // J. Differ. Geom. 1998. V. 49. P. 179–182.
35. *Sullivan J.* Infinitesimal computations in topology // Publ. IHES. 1978. V. 47. P. 269–331.
36. *Taimanov I.A.* Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces // Translations of the Amer. Math. Soc., Ser. 2. 1997. V. 179. P. 133–151.

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ИНФОРМАТИКА

ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ,
посвященной 10-летию
РФФИ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2005