

С. П. НОВИКОВ      И. А. ТАЙМАНОВ

# СОВРЕМЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ПОЛЯ

Издание второе, исправленное

Москва  
Издательство МЦНМО  
2014

УДК 271.21  
ББК 22.15  
Н73

**Новиков С. П., Тайманов И. А.**

Н73 Современные геометрические структуры и поля. — 2-е изд.,  
испр. — М.: МЦНМО, 2014. — 584 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0182-4

Излагаются основные сведения о геометрии евклидова пространства и пространства Минковского, включая их преобразования, теорию кривых и поверхностей, основы тензорного анализа и римановой геометрии, сведения из вариационного исчисления, пограничные с геометрией, элементы наглядной топологии многообразий. Изложение ведется в свете современных представлений о геометрии реального мира.

Для студентов физико-математических специальностей университетов.

Первое издание книги вышло в 2005 г.

ББК 22.15

ISBN 978-5-4439-0182-4

© Новиков С. П., Тайманов И. А., 2005, 2014.

© МЦНМО, 2014.

# Оглавление

Предисловие	10
<b>Глава 1. Декартовы пространства и евклидова геометрия</b>	<b>13</b>
§ 1.1. Координаты. Пространство-время . . . . .	13
1. Декартовы координаты (13). 2. Замена координат (14).	
§ 1.2. Геометрия Евклида и линейная алгебра . . . . .	17
1. Векторные пространства и скалярные произведения (17). 2. Длина кривой (21).	
§ 1.3. Аффинные преобразования . . . . .	22
1. Матричный формализм. Ориентация (22). 2. Аффинная группа (24). 3. Движения евклидовых пространств (29).	
§ 1.4. Кривые в евклидовом пространстве . . . . .	33
1. Натуральный параметр и кривизна кривой (33). 2. Кривые на плоскости (35). 3. Кривизна и кручение кривых в $\mathbb{R}^3$ (37).	
Упражнения к главе 1 . . . . .	40
<b>Глава 2. Симплектические и псевдоевклидовы пространства</b>	<b>43</b>
§ 2.1. Геометрические структуры в линейных пространствах . . . . .	43
1. Псевдоевклидовы и симплектические пространства (43). 2. Симплектические преобразования (46).	
§ 2.2. Пространство Минковского . . . . .	50
1. Пространство событий специальной теории относительности (50). 2. Группа Пуанкаре (53). 3. Преобразования Лоренца (54).	
Упражнения к главе 2 . . . . .	56
<b>Глава 3. Геометрия двумерных многообразий</b>	<b>58</b>
§ 3.1. Поверхности в трехмерном пространстве . . . . .	58
1. Регулярные поверхности (58). 2. Локальные координаты (61). 3. Касательное пространство (62). 4. Поверхности как двумерные многообразия (63).	
§ 3.2. Риманова метрика на поверхности . . . . .	65
1. Длины кривых на поверхности (65). 2. Площадь поверхности (68).	

§ 3.3. Кривизна поверхности . . . . .	69
1. О понятии кривизны поверхности (69). 2. Кривизна линий на поверхности (70). 3. Собственные значения пары скалярных произведений (72). 4. Главные кривизны и гауссова кривизна (74).	
§ 3.4. Основные уравнения теории поверхностей . . . . .	76
1. Девриационные уравнения как условие «нулевой кривизны». Каллибровочные поля (76). 2. Уравнения Кодацци и $\sin$ -Гордон (79). 3. Теорема Гаусса (81).	
Упражнения к главе 3 . . . . .	82
<b>Глава 4. Комплексный анализ в теории поверхностей</b> . . . . .	<b>85</b>
§ 4.1. Комплексные пространства и аналитические функции . . . . .	85
1. Комплексные векторные пространства (85). 2. Эрмитовы скалярные произведения (86). 3. Унитарные и дробно-линейные преобразования (88). 4. Голоморфные функции и уравнения Коши—Римана (89). 5. Комплексно-аналитические замены координат (91).	
§ 4.2. Геометрия сферы . . . . .	93
1. Метрика сферы (93). 2. Группа движений сферы (95).	
§ 4.3. Геометрия псевдосферы . . . . .	99
1. Пространственноподобные поверхности в псевдоевклидовых пространствах (99). 2. Метрика и группа движений псевдосферы (101). 3. Модели гиперболической геометрии (102). 4. Теорема Гильберта о непогружаемости псевдосферы в $\mathbb{R}^3$ (104).	
§ 4.4. Теория поверхностей в терминах конформного параметра . . . . .	105
1. Существование конформного параметра (105). 2. Основные уравнения в терминах конформного параметра (108). 3. Дифференциал Хопфа и его приложения (109). 4. Поверхности постоянной гауссовой кривизны. Уравнение Лиувилля (111). 5. Поверхности постоянной средней кривизны. Уравнение $\text{sh}$ -Гордон (112).	
§ 4.5. Минимальные поверхности . . . . .	114
1. Формулы Вейерштрасса—Эннепера для минимальных поверхностей (114). 2. Примеры минимальных поверхностей (117).	
Упражнения к главе 4 . . . . .	118
<b>Глава 5. Гладкие многообразия</b> . . . . .	<b>120</b>
§ 5.1. Гладкие многообразия . . . . .	120
1. Топологические и метрические пространства (120). 2. О понятии гладкого многообразия (124). 3. Гладкие отображения и касательные пространства (127). 4. Многомерные поверхности в $\mathbb{R}^n$ . Многообразия с краем (130). 5. Разбиение единицы. Многообразия как многомерные поверхности в евклидовых пространствах (134). 6. Дискретные действия и фактормногообразия (136). 7. Комплексные многообразия (138).	

§5.2. Группы преобразований как многообразия . . . . .	148
1. Группы движений как многомерные поверхности (148). 2. Комплексные поверхности и подгруппы в $GL(n, \mathbb{C})$ (154). 3. Группы аффинных преобразований и группа Гейзенберга (155). 4. Экспоненциальное отображение (156).	
§5.3. Кватернионы и группы движений . . . . .	160
1. Алгебра кватернионов (160). 2. Группы $SO(3)$ и $SO(4)$ (162). 3. Кватернионно-линейные преобразования (164).	
Упражнения к главе 5 . . . . .	165
<b>Глава 6. Группы движений</b> . . . . .	<b>166</b>
§6.1. Группы и алгебры Ли . . . . .	166
1. Группы Ли (166). 2. Алгебры Ли (168). 3. Основные матричные группы и алгебры Ли (175). 4. Инвариантные метрики на группах Ли (180). 5. Однородные пространства (184). 6. Комплексные группы Ли (191). 7. О классификации алгебр Ли (192). 8. Двумерные и трехмерные алгебры Ли (195). 9. Пуассоновы структуры (198). 10. Градуированные алгебры и супералгебры Ли (202).	
§6.2. Кристаллографические группы и их обобщения . . . . .	206
1. Кристаллографические группы в евклидовых пространствах (206). 2. Квазикристаллографические группы (216).	
Упражнения к главе 6 . . . . .	225
<b>Глава 7. Тензорная алгебра</b> . . . . .	<b>227</b>
§7.1. Тензоры ранга 1 и 2 . . . . .	227
1. Касательное пространство и тензоры ранга 1 (227). 2. Тензоры ранга 2 (230). 3. Преобразования тензоров ранга не выше 2 (232).	
§7.2. Тензоры произвольного ранга . . . . .	232
1. Преобразование компонент (232). 2. Алгебраические операции над тензорами (234). 3. Дифференциальная форма записи тензоров (237). 4. Инвариантные тензоры (238). 5. Пример из механики: тензоры деформации и напряжения (239).	
§7.3. Внешние формы . . . . .	241
1. Симметризация и альтернирование (241). 2. Кососимметрические тензоры типа $(0, k)$ (243). 3. Внешняя алгебра. Симметрическая алгебра (245).	
§7.4. Тензоры в пространстве со скалярным произведением . . . . .	247
1. Поднятие и опускание индексов (247). 2. Собственные значения скалярных произведений (248). 3. Оператор двойственности Ходжа (250). 4. Фермионы и бозоны. Пространства симметрических и кососимметрических тензоров как фоковские пространства (251).	

§ 7.5. Поливекторы и интеграл от антикоммутирующих переменных . . .	258
1. Антикоммутирующие переменные и супералгебры (258). 2. Интеграл от антикоммутирующих переменных (260).	
Упражнения к главе 7 . . . . .	262
<b>Глава 8. Тензорные поля в анализе</b>	<b>264</b>
§ 8.1. Тензоры ранга 2 в псевдоевклидовом пространстве . . . . .	264
1. Электромагнитное поле (264). 2. Приведение кососимметрических тензоров к каноническому виду (266). 3. Симметрические тензоры (268).	
§ 8.2. Поведение тензоров при отображениях . . . . .	270
1. Действие отображений на тензорах с верхними индексами (270). 2. Ограничение тензоров с нижними индексами (271). 3. Гауссово отображение (273).	
§ 8.3. Векторные поля . . . . .	275
1. Интегральные кривые (275). 2. Алгебры Ли векторных полей (277). 3. Линейные векторные поля (279). 4. Экспонента от векторного поля (281). 5. Инвариантные поля на группах Ли (282). 6. Производная Ли (283). 7. Центральные расширения алгебр Ли (287).	
Упражнения к главе 8 . . . . .	289
<b>Глава 9. Анализ дифференциальных форм</b>	<b>291</b>
§ 9.1. Дифференциальные формы . . . . .	291
1. Кососимметрические тензоры и их дифференцирование (291). 2. Внешний дифференциал (293). 3. Уравнения Максвелла (296).	
§ 9.2. Интегрирование дифференциальных форм . . . . .	298
1. Определение интеграла (298). 2. Интеграл от формы по многообразию (302). 3. Интегралы от дифференциальных форм в $\mathbb{R}^3$ (304). 4. Теорема Стокса (305). 5. Доказательство теоремы Стокса для куба (310). 6. Интегрирование по суперпространству (311).	
§ 9.3. Когомологии . . . . .	313
1. Когомологии де Рама (313). 2. Гомотопическая инвариантность когомологий (315). 3. Примеры вычисления групп когомологий (317).	
Упражнения к главе 9 . . . . .	323
<b>Глава 10. Связность и кривизна</b>	<b>325</b>
§ 10.1. Ковариантное дифференцирование . . . . .	325
1. Ковариантное дифференцирование векторных полей (325). 2. Ковариантное дифференцирование тензоров (331). 3. Калибровочные поля (332). 4. Связности Картана (335). 5. Параллельный перенос (336). 6. Связности, согласованные с метрикой (338).	

§ 10.2. Тензор кривизны . . . . .	341
1. Определение тензора кривизны (341). 2. Симметрии тензора кривизны (344). 3. Тензоры Римана многообразий малой размерности, тензор Риччи, скалярная и секционная кривизны (346). 4. Тензор конформной кривизны (349). 5. Тетрадный формализм (351). 6. Кривизна инвариантных метрик на группах Ли (352).	
§ 10.3. Геодезические линии . . . . .	354
1. Геодезический поток (354). 2. Геодезические линии как кратчайшие (357). 3. Формула Гаусса—Бонне (360).	
Упражнения к главе 10 . . . . .	362
<b>Глава 11. Конформная и комплексная геометрии</b>	<b>366</b>
§ 11.1. Конформная геометрия . . . . .	366
1. Конформные преобразования (366). 2. Теорема Лиувилля о конформных отображениях (369). 3. Алгебра Ли конформной группы (371).	
§ 11.2. Комплексные структуры на многообразиях . . . . .	372
1. Комплексные дифференциальные формы (372). 2. Кэлеровы метрики (375). 3. Топология кэлеровых многообразий (379). 4. Почти комплексные структуры (382). 5. Абелевы торы (384).	
Упражнения к главе 11 . . . . .	388
<b>Глава 12. Теория Морса и гамильтонов формализм</b>	<b>390</b>
§ 12.1. Элементы теории Морса . . . . .	390
1. Критические точки гладких функций (390). 2. Лемма Морса и теоремы трансверсальности (393). 3. Степень отображения (402). 4. Градиентные системы и перестройки Морса (404). 5. Топология двумерных многообразий (412).	
§ 12.2. Одномерные задачи: принцип наименьшего действия . . . . .	416
1. Примеры функционалов (геометрия и механика). Вариационная производная (416). 2. Уравнения движения (примеры) (420).	
§ 12.3. Группы симметрий и законы сохранения . . . . .	422
1. Законы сохранения энергии и импульса (422). 2. Поля симметрий (424). 3. Законы сохранения в релятивистской механике (425). 4. Законы сохранения в классической механике (428). 5. Системы релятивистских частиц и рассеяние (432).	
§ 12.4. Вариационный принцип Гамильтона . . . . .	433
1. Теорема Гамильтона (433). 2. Лагранжианы и замены координат, зависящие от времени (435). 3. Вариационные принципы типа Ферма (438).	
Упражнения к главе 12 . . . . .	440

<b>Глава 13. Пуассоновы и лагранжевы многообразия</b>	442
§ 13.1. Симплектические и пуассоновы многообразия . . . . .	442
1. $g$ -градиентные системы и симплектические многообразия (442).	
2. Примеры фазовых пространств (445). 3. Расширенное фазовое пространство (451). 4. Пуассоновы многообразия. Алгебры Пуассона (452). 5. Редукция алгебр Пуассона (456). 6. Основные примеры алгебр Пуассона (458). 7. Канонические преобразования (463).	
§ 13.2. Лагранжевы подмногообразия и их применения . . . . .	466
1. Уравнение Гамильтона—Якоби и пучки траекторий (466). 2. Запись канонических преобразований (470). 3. Конические лагранжевы поверхности (472). 4. Переменные «действие–угол» (475).	
§ 13.3. Условие локальной минимальности . . . . .	479
1. Формула второй вариации и оператор Якоби (479). 2. Сопряженные точки (484).	
Упражнения к главе 13 . . . . .	486
<b>Глава 14. Многомерные вариационные задачи</b>	488
§ 14.1. Вариационное исчисление . . . . .	488
1. Введение. Вариационные производные (488). 2. Тензор энергии-импульса и законы сохранения (491).	
§ 14.2. Примеры многомерных вариационных задач . . . . .	498
1. Минимальные поверхности (498). 2. Уравнения электромагнитного поля (500). 3. Уравнения Эйнштейна. Функционал Гильберта (504). 4. Гармонические формы и разложение Ходжа (508). 5. Функционал Дирихле и гармонические отображения (513). 6. Массивные скалярные и векторные поля (518).	
Упражнения к главе 14 . . . . .	521
<b>Глава 15. Геометрические поля в физике</b>	523
§ 15.1. Элементы теории относительности Эйнштейна . . . . .	523
1. Принципы специальной теории относительности (523). 2. Гравитационное поле как метрика (526). 3. Функционал действия гравитационного поля (529). 4. Метрики Шварцшильда и Керра (532). 5. Взаимодействие материи с гравитационным полем (534). 6. О понятии массы в общей теории относительности (537).	
§ 15.2. Спиноры и уравнение Дирака . . . . .	540
1. Автоморфизмы матричных алгебр (540). 2. Спинорное представление группы $SO(3)$ (541). 3. Спинорное представление группы $O(1, 3)$ (543). 4. Уравнение Дирака (546). 5. Алгебры Клиффорда (549).	
§ 15.3. Поля Янга—Миллса . . . . .	550
1. Калибровочно инвариантные лагранжианы (550). 2. Ковариантное дифференцирование спиноров (554). 3. Кривизна связности (556).	



---

4. Уравнения Янга—Миллса (558). 5. Характеристические классы (560). 6. Инстантоны (563).	
Упражнения к главе 15 . . . . .	567
Литература	571
Предметный указатель	574

## Предисловие

Еще в конце 1960-х гг. одним из авторов этой книги была начата подготовка к написанию серии учебных пособий, позволяющих современному молодому математику выучить геометрию и топологию. Целый ряд задач учебно-тренировочной ориентации уже накопился к тому времени в процессе работы учебных семинаров. Эти задачи (преимущественно топологические) вошли в учебники и учебные пособия [1—3] или были изданы в отдельном сборнике [4]. Упомянутая программа значительно расширилась в процессе изучения учебников по теоретической физике (особенно уникального цикла Ландау—Лифшица, где значительная часть книг, например [5], [6], пересекаются с геометрией в ее современном понимании), а также в результате взаимодействия с механиками мехмата МГУ — особенно Л. И. Седовым и В. П. Мясниковым, — крайне заинтересованными в постановке преподавания современной геометрии для нужд, в первую очередь, механики сплошных сред. Любопытно, что процесс создания современных курсов геометрии начался не на отделении математики, а на отделении механики мехмата МГУ в 1971 г., где эти знания были попросту необходимы для дела. Математики согласились на это позже. В процессе чтения этих курсов были созданы следующие ротапринтные пособия:

С. П. Новиков. Риманова геометрия и тензорный анализ. Части I, II. Ротапринтное издание МГУ, 1972/73.

В дальнейшем эти курсы были развиты; было создано продолжение, включающее и элементы топологии:

С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Риманова геометрия и тензорный анализ. Часть III. Ротапринтное издание МГУ, 1974.

После этого С. П. Новиковым была написана программа курса основ современной геометрии и топологии. Она была реализована в серии книг [1—3], совместных с Б. А. Дубровиным и А. Т. Фоменко. Топологическая часть была позднее пополнена энциклопедической книгой [7], содержащей изложение основных идей классической топологии, сложившихся к концу 1960-х — началу 1970-х гг. Более поздние издания [8] содержат также изложение ряда новых топологических достижений, но целый ряд глубоких новых разделов (таких, например, как современная симплектическая и контактная топология, а также новый этап топологии 4-мерных многообразий) остались не охвачены. Мы рекомендуем энциклопедическую книгу [9]. Следует со всей определенностью сказать, что даже сейчас нет удобоваримого учебного курса, покрывающего основные достижения классической топологии 1950—70-х гг., не говоря уже о более позднем периоде. Часть II книги [1] и книга [2] недостаточны; другие книги порой неоправданно абстрактны, как правило, посвящены отдельным узким темам и не дают систематического из-

ложения достижений этого периода, важнейшего в истории топологии. Отдельные хорошо написанные книги [10—13] посвящены специальным разделам. Книга [14] хорошо дополняет книги [1, 2], но одной этой книги явно недостаточно.

Тем не менее, из числа созданных нами, часть II книги [1] — это относительно удачное пособие, содержащее целый спектр нужных основ дифференциальной топологии в ее взаимодействии с физикой. Здесь можно было бы модернизировать, существенно технически улучшить изложение, но в целом она выполняет свою задачу, вместе с продолжающими ее книгами [2] и [7] для более изысканного читателя.

Что же касается части I книги [1], т. е. основ римановой геометрии, то прошедшие 20 лет показали, что необходима значительная переработка в изложении основ, пополнение более современными идеями. Оказались полезны курсы, читавшиеся вторым автором (И. А. Таймановым) в Новосибирском университете [15]. Мы провели совместную работу по написанию нового курса, используя все упомянутые материалы.

По нашему убеждению, сейчас наступает период, когда широкое сообщество математиков — геометров, аналитиков и многих других — возьмется, наконец, за серьезное изучение того математического багажа, который создала теоретическая физика XX в. Уже 25 лет назад было ясно, что такой момент должен наступить; но в тот период широкое математическое сообщество еще не осознало необходимость этого; соответствующие начинания в некоторых наших книгах типа [1] долго оставались недостаточно потребленными в сообществе математиков. Сейчас, по нашему мнению, положение меняется. Осознание необходимости изучить математический аппарат физики среди математиков возросло. К тому же, положение дел в самой теоретической физике таково, что весьма возможно, что сохранить созданные ею в XX в. глубокие математические методы для будущего человечества сможет только сообщество математиков: потеря замечательного соединения трезвой рациональности при изучении реального мира с выдающимся творением новой высокой математики настораживает.

Так или иначе, мы писали эту книгу для широкого сообщества математиков и физиков-теоретиков. Как и в прошлом (см. предисловия к книгам [1, 2]), мы следуем принципам максимальной понятности и минимальной абстрактности языка изложения. Ясное понимание деловой сути предмета должно достигаться до того, как началась формализация: когда формализуешь что-то, надо его уже понимать. Обосновывать еще не понятую теорию нелепо; формальный язык разделяет, а не объединяет математику, затрудняет понимание.

Мы надеемся, что наши идеи найдут понимание в сообществе.

\* \* \*

Во втором издании исправлены замеченные опечатки и неточности и внесены небольшие уточнения. Мы благодарим всех читателей, указавших на необходимые изменения.

Авторы