



Введение в нелинейную динамику в ускорительной физике

А.В. Богомягков

ИЯФ СОРАН, ЦКП «СКИФ»

Гамильтониан частицы во внешнем поле

- Одночастичный гамильтониан

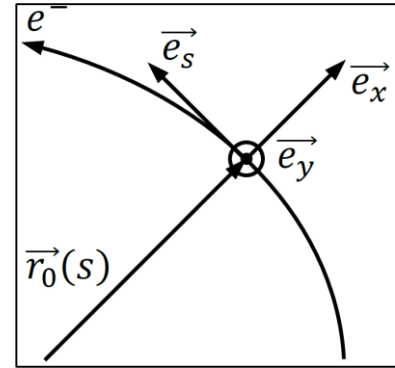
$$\mathcal{H} = e\varphi(\vec{r}, t) + c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2}$$

- $\vec{r} = \{x, y, z\}$ – декартовы координаты
- $\vec{\mathcal{P}} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t)$ – обобщённый импульс ($\vec{p} = \gamma m \vec{v}$)
- $\{\varphi(\vec{r}, t), \vec{A}(\vec{r}, t)\}$ – скалярный и векторный потенциалы

Гамильтониан в сопутствующей системе

Несколько канонических преобразований:

- Декартова \rightarrow криволинейная (Френе-Серре)
- Время $t \rightarrow s \rightarrow \sigma = s - ct$ запаздывание
- Поперечные магнитные поля
- Скалярный потенциал $\varphi = 0$
- Нормировка энергии и импульса относительно равновесной частицы $E_0, p_0, p_\sigma = \frac{E - E_0}{p_0 c}$
- Ультрарелятивизм $\beta_0 \rightarrow 1$



$$H = \frac{A_s}{B\rho} (1 + Kx) + p_\sigma - (1 + Kx) \sqrt{(1 + p_\sigma)^2 - p_x^2 - p_y^2}$$

6d Гамильтониан в сопутствующей системе

Приближения, разложения...

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1 + p_\sigma)} - \overbrace{K_0 x p_\sigma + K_0^2 \frac{x^2}{2}}^{\text{Диполь}} + \overbrace{K_1 \frac{x^2 - y^2}{2}}^{\text{Квадруполь}}$$
$$+ \overbrace{K_2 \frac{x^3 - 3xy^2}{6}}^{\text{Секступоль}} + \overbrace{K_3 \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{4}}^{\text{Октуполь}} + \dots$$
$$+ \left(-\frac{eV_0}{p_0 c} \right) \frac{\lambda_{RF}}{2\pi} \cos \left(\phi_s + \frac{2\pi\sigma}{\lambda_{RF}} \right) \delta(s - s_0) + \frac{\sigma U_0}{\Pi p_0 c}$$

ВЧ Резонатор **Излучение**

Последовательные приближения

- 4d: $\{x, p_x, y, p_y\}$, $p_\sigma = 0$ ($\nu_{x,y} \sim 1 - 500$, $\nu_s \sim 0.01$)
- 5d: $\{x, p_x, y, p_y\}$, $p_\sigma = \text{const}$
- 6d: $\{x, p_x, y, p_y, \sigma, p_\sigma\}$, без излучения (нет затухания), есть продольные (синхротронные) колебания
- 6d: $\{x, p_x, y, p_y, \sigma, p_\sigma\}$, с излучением (затухание), наиболее реалистичный
- Кусочно-постоянные $K_i(s)$, линейные матрицы перехода + теория возмущений (нелинейных) + ряды Фурье

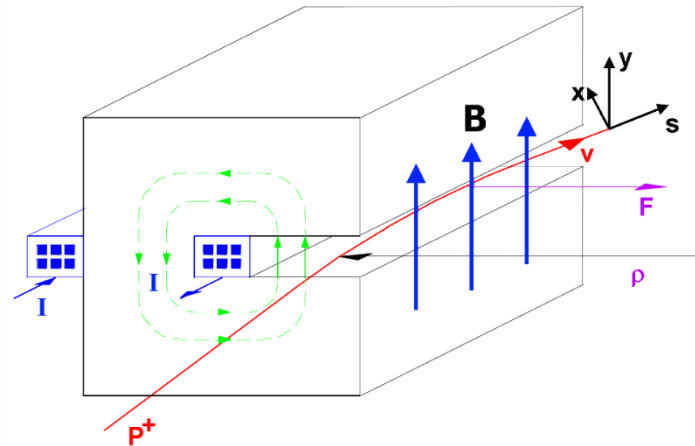
4d Гамильтониан (секступоль)

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + K_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + K_2 \frac{x^3 - 3xy^2}{6}, \quad K_0^2 \ll |K_1|$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} x' = p_x \\ p_x' = -K_1 x - K_2 \frac{x^2 - y^2}{2} \\ y' = p_y \\ p_y' = K_1 y + K_2 xy \end{cases} \begin{cases} x'' + K_1(s)x = -K_2(s) \frac{x^2 - y^2}{2} \\ y'' - K_1(s)y = K_2(s)xy \end{cases}$$

Поперечная динамика: диполь



Магнитное поле: $\vec{B} = B_y \vec{e}_y = const$

Магнитная жёсткость: $B\rho = \frac{\gamma m v}{q} = \frac{p}{q}$, $B\rho [T \cdot m] = \frac{E_0 [eV]}{c [\frac{m}{c}]}$

Кривизна [1/m]: $K_0 = \frac{B_y}{B\rho} = \frac{1}{R}$

Угол поворота: $\varphi = \frac{B_y L}{B\rho} = K_0 L$

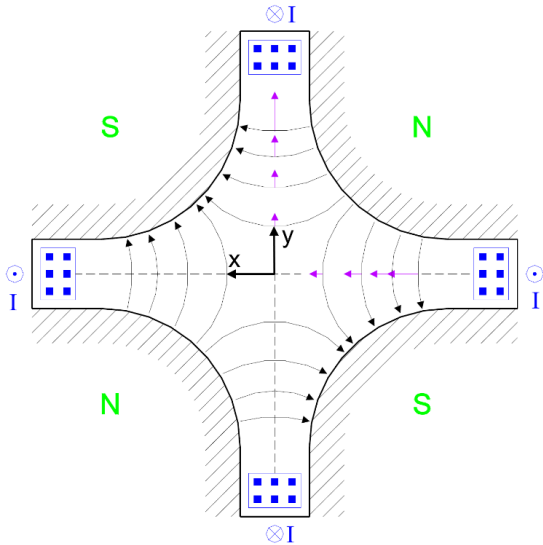
Уравнения движения:
$$\begin{cases} x'' + K_0^2 x = K_0 p_\sigma \\ y'' = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x(s) = x_0 \cos(K_0 s) + x'_0 \frac{\sin(K_0 s)}{K_0} + p_\sigma \left(1 - \frac{\cos(K_0 s)}{K_0}\right) \\ x'_0(s) = x_0 (-K_0) \sin(K_0 s) + x'_0 \cos(K_0 s) + p_\sigma \sin(K_0 s) \\ y(s) = y_0 + y'_0 s \\ y'(s) = y'_0 \end{cases}$$



Поперечная динамика: квадруполь



Магнитное поле:

$$\begin{cases} B_x = G y \\ B_y = G x \end{cases}$$

Градиент [Т/м]:

$$G = \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=0, y=0}$$

Квадрупольная сила [1/м²]:

$$K_1 = \frac{G}{B\rho}$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} x'' + K_1 x = 0 \\ y'' - K_1 y = 0 \end{cases}$$



Решение:

$$\begin{cases} x(s) = x_0 \cos(\sqrt{K_1}s) + x'_0 \frac{\sin(\sqrt{K_1}s)}{\sqrt{K_1}} \\ x'_0(s) = x_0(-\sqrt{K_1}) \sin(\sqrt{K_1}s) + x'_0 \cos(\sqrt{K_1}s) \\ y(s) = y_0 \cosh(\sqrt{K_1}s) + y'_0 \frac{\sinh(\sqrt{K_1}s)}{\sqrt{K_1}} \\ y'(s) = y_0 \sqrt{K_1} \sinh(\sqrt{K_1}s) + y'_0 \cosh(\sqrt{K_1}s) \end{cases}$$

Поперечная динамика: 4d уравнения движения

$$\begin{cases} x'' + (K_0^2(s) + K_1(s))x = 0 \\ y'' - K_1(s)y = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\text{Функциональное: } \begin{cases} x(s) = A_x \sqrt{\beta_x(s)} \cos(\varphi_x(s) + \varphi_{x,0}), & \varphi'_x = \frac{1}{\beta_x}, & \nu_x = \frac{\varphi_x(\Pi)}{2\pi} = \frac{\mu_x}{2\pi} \\ y(s) = A_y \sqrt{\beta_y(s)} \cos(\varphi_y(s) + \varphi_{y,0}), & \varphi'_y = \frac{1}{\beta_y}, & \nu_y = \frac{\varphi_y(\Pi)}{2\pi} = \frac{\mu_y}{2\pi} \end{cases}$$

$$\text{Инвариант (действие): } x^2 + (\alpha x + \beta x')^2 = A_x^2 = 2j_x = \text{const}$$

$$\text{Преобразование: } \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,3} & m_{3,4} \\ 0 & 0 & m_{4,3} & m_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}, \quad \det M = 1$$

Поперечная динамика: параметризация Твисса

Преобразование: $M = R_n R_{n-1} \dots R_1$ для $\{x, x'\}$ или $\{y, y'\}$

$$\text{Матрица: } M(s_1 \rightarrow s_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos(\Delta\mu) + \alpha_1 \sin(\Delta\mu)) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin(\Delta\mu) \\ -\frac{1 + \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \sin(\Delta\mu) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \cos(\Delta\mu) & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos(\Delta\mu) - \alpha_2 \sin(\Delta\mu)) \end{pmatrix}$$

$$\text{Периодическая: } M(s \rightarrow s + \Pi) = \begin{pmatrix} \cos(\mu) + \alpha \sin(\mu) & \beta \sin(\mu) \\ -\frac{1 + \alpha^2}{\beta} \sin(\mu) & \cos(\mu) - \alpha \sin(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$\cos(\mu) = \frac{m_{1,1} + m_{2,2}}{2}, \quad \beta = \frac{m_{1,2}}{\sin(\mu)}, \quad \alpha = -\frac{1}{2} \frac{d\beta}{ds} = \frac{m_{1,1} - m_{2,2}}{2 \sin(\mu)}, \quad \gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta}, \quad \nu = \mu/2\pi$$

Поперечная динамика: 5d уравнения движения

$$\begin{cases} x'' + (K_0^2(s) + K_1(s))x = K_0 p_\sigma, \text{ где } p_\sigma = \text{const} \\ y'' - K_1(s)y = 0 \end{cases}$$

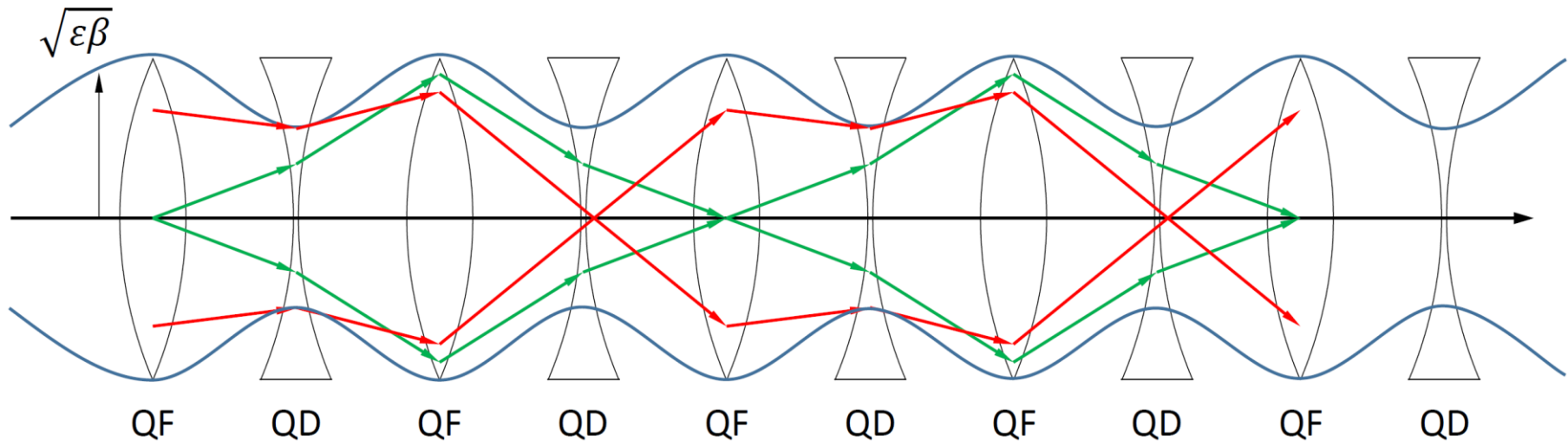
Функциональное решение:

$$\begin{cases} x = A_x \sqrt{\beta_x(s)} \cos(\varphi_x(s) + \varphi_{x,0}) + \eta_x p_\sigma \\ y = A_y \sqrt{\beta_y(s)} \cos(\varphi_y(s) + \varphi_{y,0}) \end{cases}$$

Транспортная матрица:

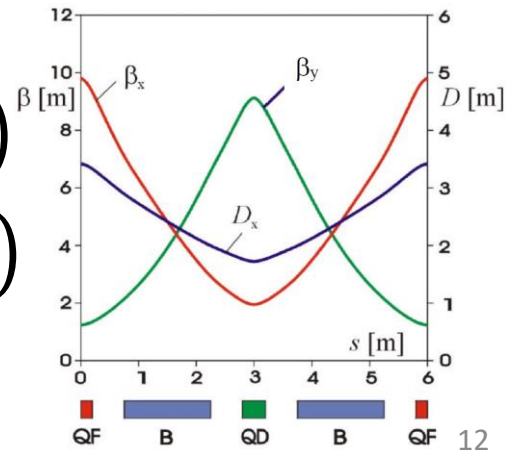
$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ \sigma \\ p_\sigma \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 & 0 & m_{1,6} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 & 0 & m_{2,6} \\ 0 & 0 & m_{3,3} & m_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{4,3} & m_{4,4} & 0 & 0 \\ m_{5,1} & m_{5,2} & 0 & 0 & 1 & m_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ \sigma \\ p_\sigma \end{pmatrix}_1$$

Поперечная динамика: траектории

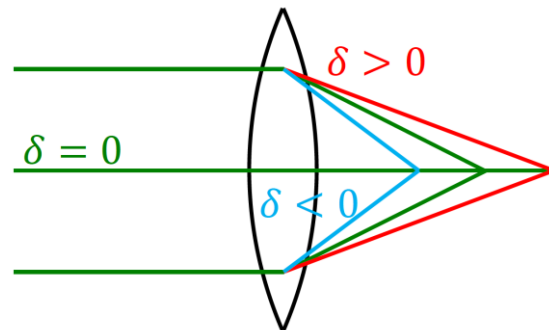
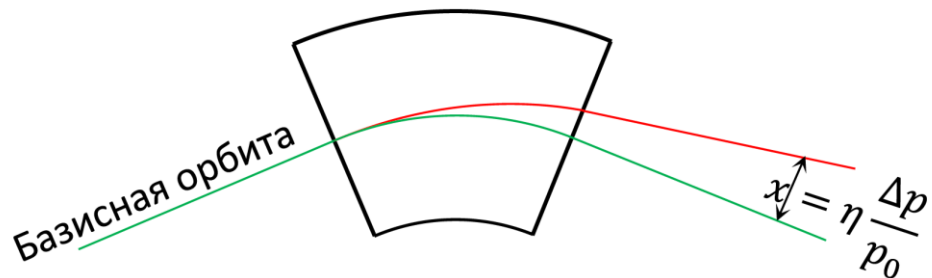


Решение:
$$\begin{cases} x = A_x \sqrt{\beta_x(s)} \cos(\varphi_x(s) + \varphi_{x,0}) \\ y = A_y \sqrt{\beta_y(s)} \cos(\varphi_y(s) + \varphi_{y,0}) \end{cases}$$

Частота: $\varphi_{x,y}(\Pi) = 2 \pi \nu_{x,y}$



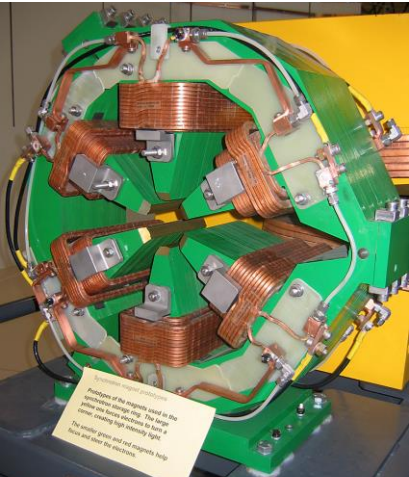
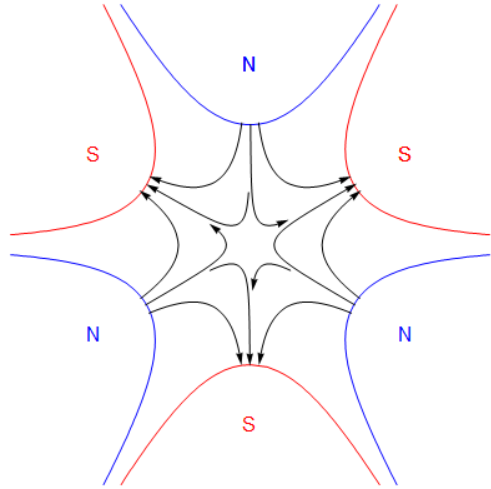
Поперечная динамика: хроматизм



Уравнения движения $\left(\delta = \frac{\Delta p}{p_0} \right)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' + \frac{\left(K_0^2(s) + K_1(s) \right)}{1 + \delta} x = K_0 \frac{\delta}{1 + \delta} - \frac{K_2}{1 + \delta} \frac{(x^2 - y^2)}{2} \\ y'' - \frac{K_1(s)}{1 + \delta} y = \frac{K_2}{1 + \delta} xy \end{array} \right.$$

Поперечная динамика: секступоль



Магнитное поле:

Градиент [Т/м²]:

Сила секступоля [1/м³]:

Уравнения движения:

Решение (kick approximation):

$$\begin{cases} B_x = S xy \\ B_y = \frac{S}{2} (x^2 - y^2) \end{cases}$$

$$S = \left. \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right|_{x=0, y=0}$$

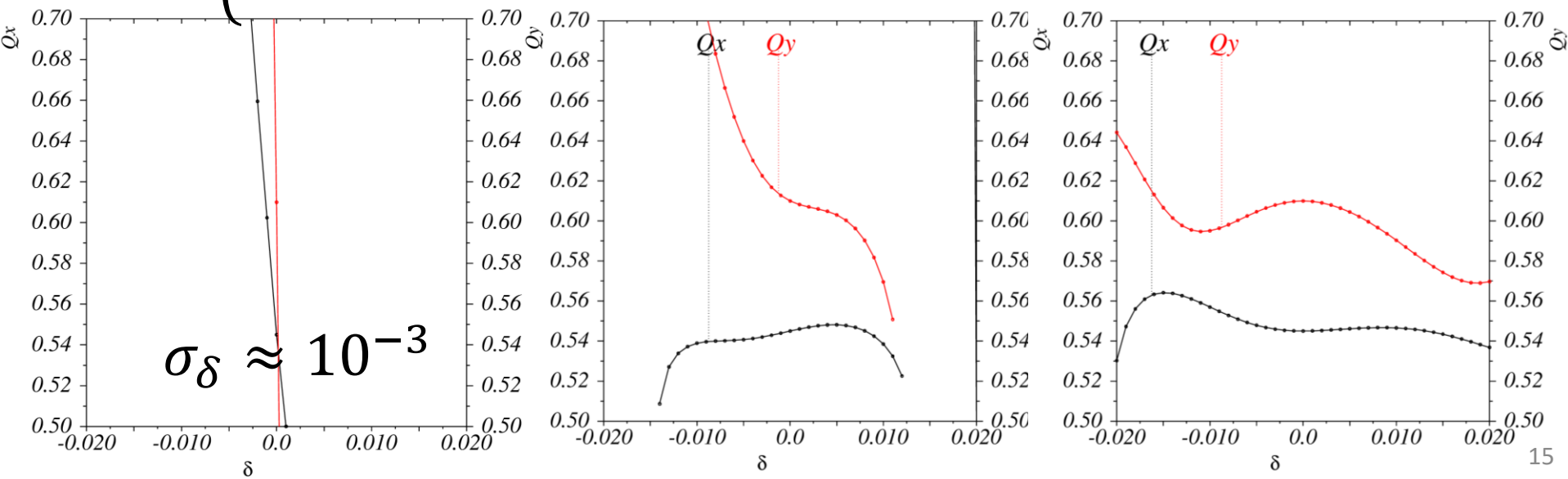
$$K_2 = \frac{S}{B\rho}$$

$$\begin{cases} x'' = -K_2(s) \frac{x^2 - y^2}{2} \\ y'' = K_2(s) xy \end{cases}$$

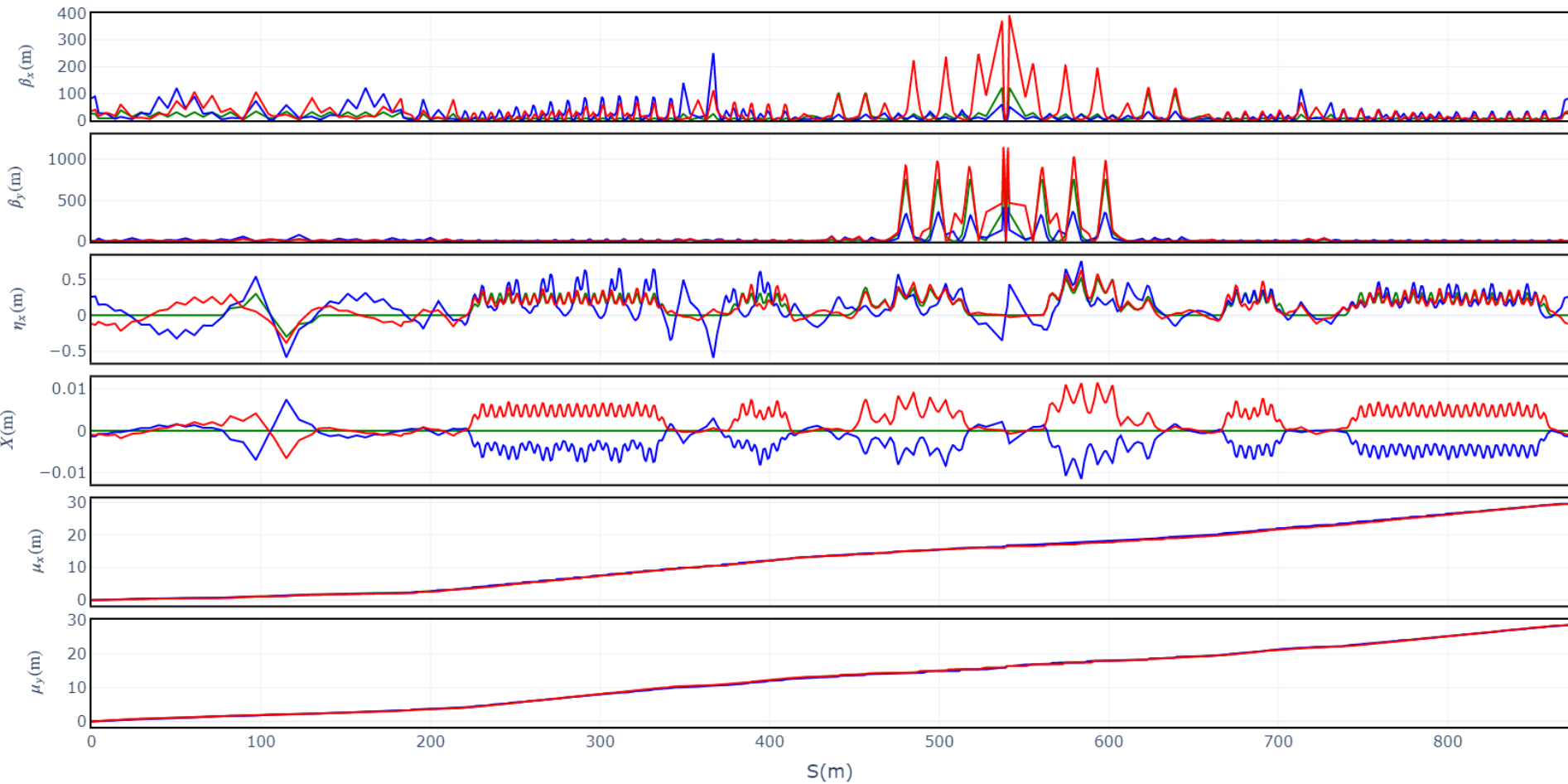
$$\begin{cases} x = x_0 \\ x'_0 = x'_0 - K_2 L \frac{x_0^2 - y_0^2}{2} \\ y = y_0 \\ y'_0 = y'_0 + K_2 L x_0 y_0 \end{cases}$$

Поперечная динамика: хроматизм

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{d\delta} = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_x(s) \left(K_0^2(s) + K_1(s) - K_2(s)\eta(s) \right) ds \\ \frac{dv_y}{d\delta} = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_y(s) \left(K_1(s) - K_2(s)\eta(s) \right) ds \end{cases}$$

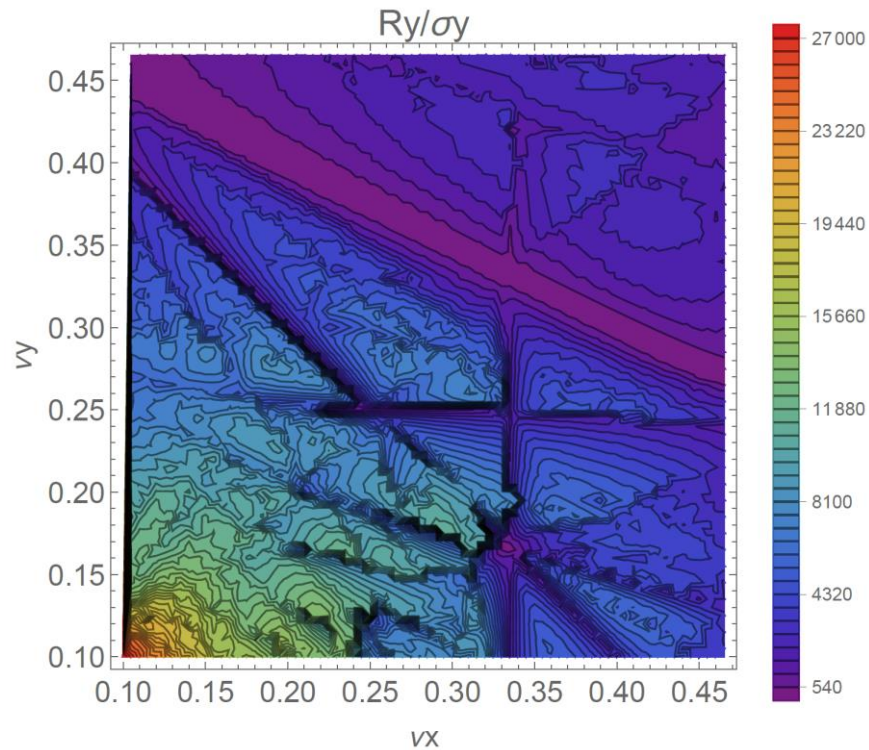
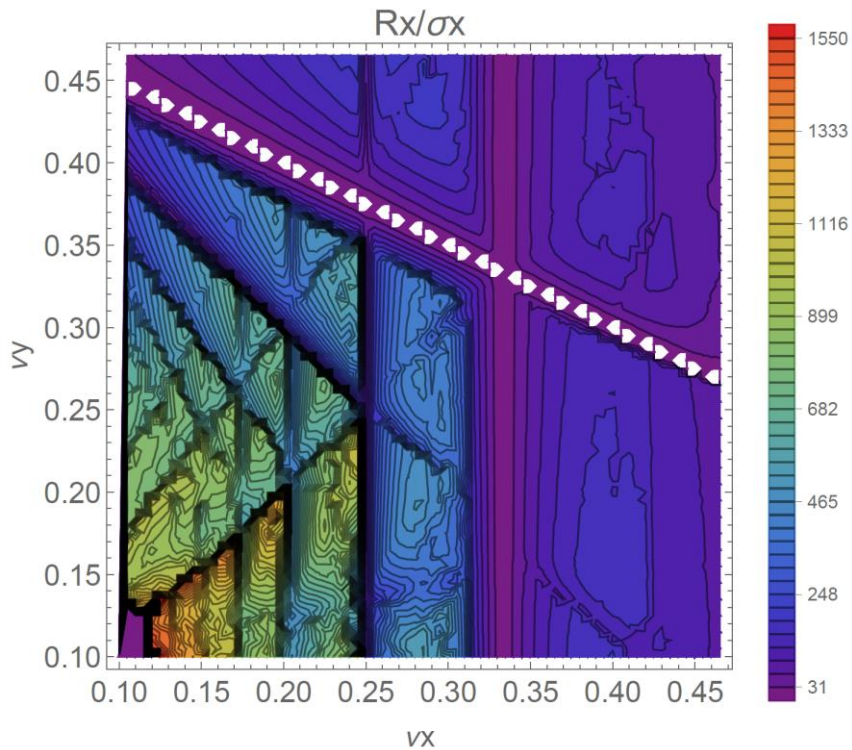
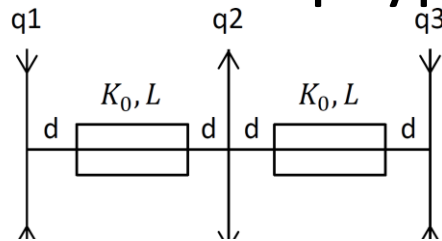


Поперечная динамика: хроматизм



Поперечная динамика: динамическая апертура

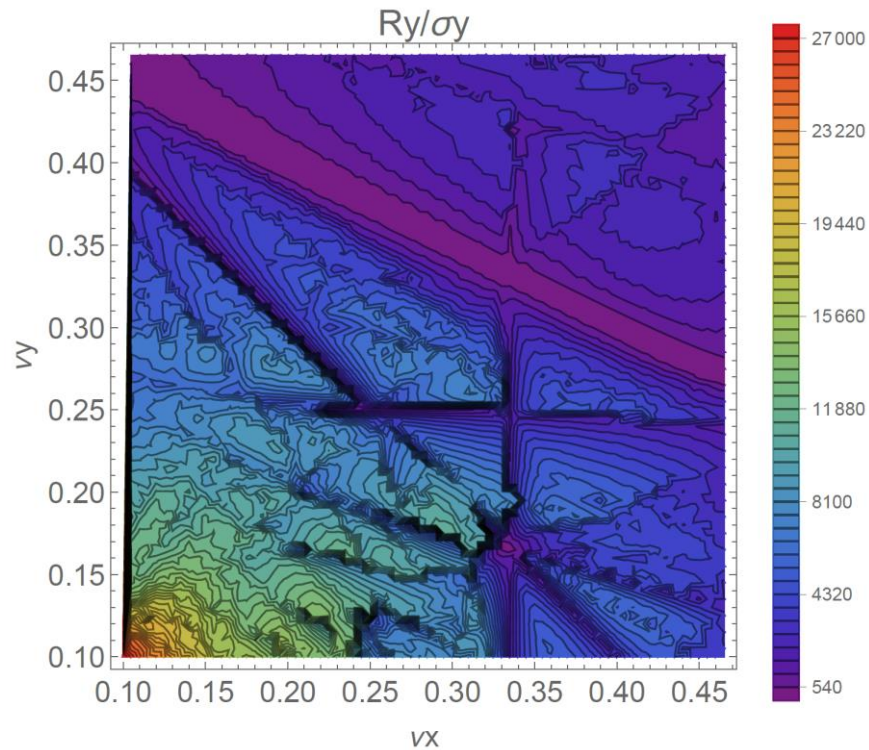
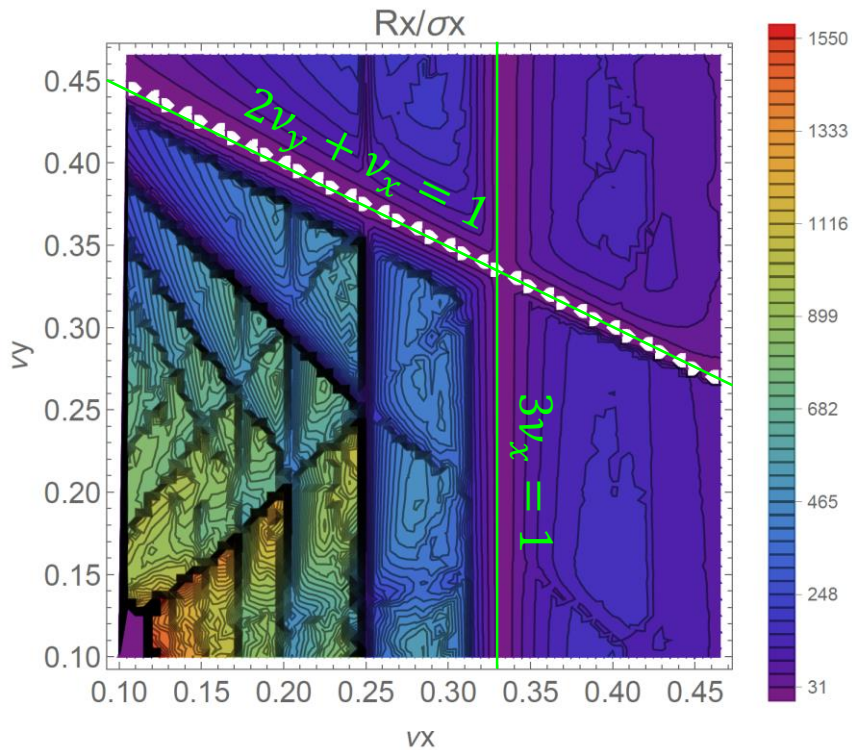
$$\begin{cases} x'' + (K_0^2(s) + K_1(s))x = -K_2(s) \frac{(x^2 - y^2)}{2} \\ y'' - K_1(s)y = K_2(s)xy \end{cases}$$



Поперечная динамика: динамическая апертура

$$\begin{cases} x'' + (K_0^2(s) + K_1(s))x = -K_2(s) \frac{(x^2 - y^2)}{2} \\ y'' - K_1(s)y = K_2(s)xy \end{cases}$$

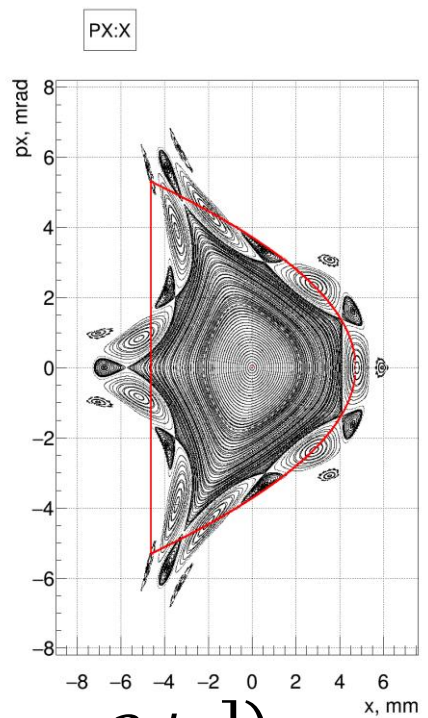
$$n v_x + m v_y = k$$



Цели, вопросы

- Как получить большую динамическую апертуру?
 - Численная оптимизация (долго)
 - Другой параметр?
- Как аналитически сосчитать динамическую апертуру?
- Как расставить секступоли, чтобы получить большую динамическую апертуру?
 - Комбинации секступолей
- Следующие нелинейности

4d гамильтониан (секступоль)



$$\begin{aligned} H(\psi_x, j_x, \psi_y, j_y; \theta) &= v_x j_x + v_y j_y \\ &+ \frac{RK_2}{6\sqrt{2}} j_x^{\frac{3}{2}} \beta_x^{\frac{3}{2}} (3 \cos[\phi_x] + \cos[3\phi_x]) \\ &- \frac{RK_2}{2\sqrt{2}} j_y \beta_y j_x^{\frac{1}{2}} \beta_x^{\frac{1}{2}} (2 \cos[\phi_x] + \cos[\phi_x - 2\phi_y] + \cos[\phi_x + 2\phi_y]) \\ &= H_0(j_x, j_y) + V(\psi_x, j_x, \psi_y, j_y, \theta) \end{aligned}$$

$$\phi_{x,y} = \psi_{x,y} + \varphi_{x,y}(\theta) - v_{x,y} \theta$$

4d гамильтониан, гармоника (секступоль)

$$V = (2j_x)^{\frac{3}{2}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \left(3A_{1,m} \cos[\psi_x + m\theta] + A_{3,m} \cos[3\psi_x + m\theta] \right)$$

$$-3(2j_x)^{\frac{1}{2}}(2j_y) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} 2B_{1,m} \cos[\psi_x + m\theta]$$

$$-3(2j_x)^{\frac{1}{2}}(2j_y) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} B_{1,2,m} \cos[\psi_x + 2\psi_y + m\theta]$$

$$-3(2j_x)^{\frac{1}{2}}(2j_y) \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} B_{1,-2,m} \cos[\psi_x - 2\psi_y + m\theta]$$

$$v_x + nv_y = m, (n, m) \in \mathbb{Z}$$

4d гамильтониан, резонансы

Приближение изолированного резонанса

(усреднение): $mv_x = -p$

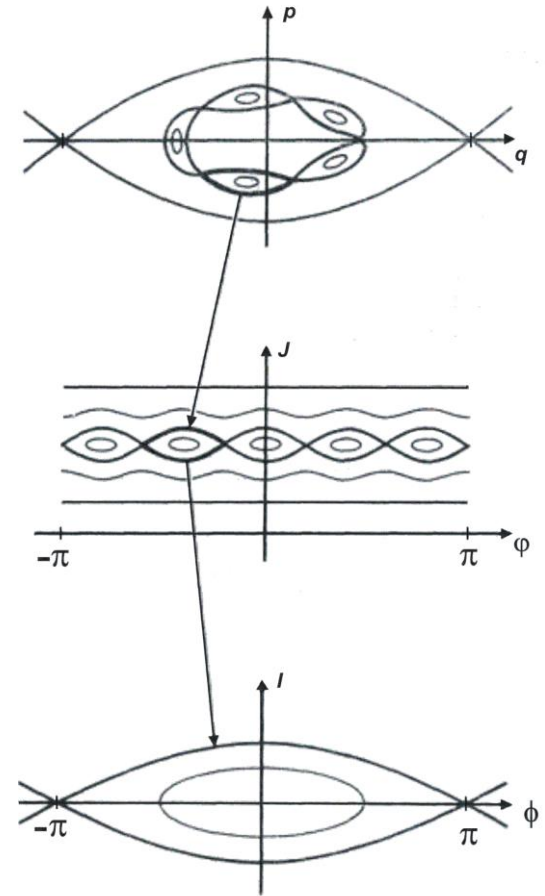
Отстройка: $\delta = \nu_x + \frac{p}{m} \ll 1$

Резонансные переменные:

$$F_2(\psi, j_1) = \left(\psi + \frac{p}{m} \theta \right) j_1$$

Резонансный гамильтониан:

$$h_m = \delta j_1 + a(j_1) + f(j_1) \cos(m\psi_1)$$



4d гамильтониан, резонансы

- Резонансное действие: $\Delta\nu = 0 = \left\langle \frac{\partial h_m}{\partial j_1} \right\rangle_{\psi_1} = \delta + a'(j_r)$

- Особые точки: $\nabla h_m = 0 \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = \frac{\pi k}{m} \\ \delta + a'(j_1) \pm f'(j_1) = 0 \end{cases}$

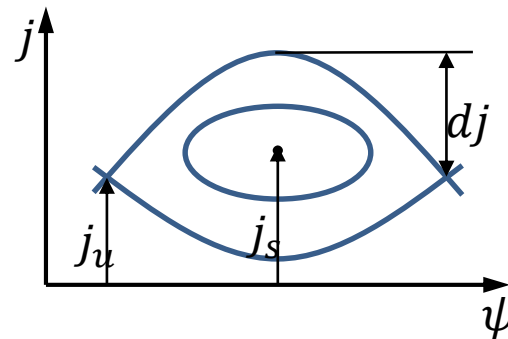
- Устойчивые, неустойчивые

$$H(h_m) = \det \begin{pmatrix} a'' \pm f'' & 0 \\ - & \mp m^2 f \end{pmatrix} = \mp m^2 f(a'' \pm f'')$$

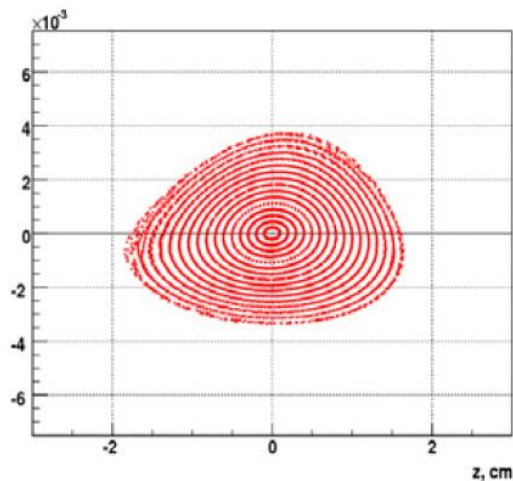
$$j_u = j_r - \frac{f'(j_r)}{a''(j_r) + f''(j_r)},$$

$$j_s = j_r + \frac{f'(j_r)}{a''(j_r) - f''(j_r)}$$

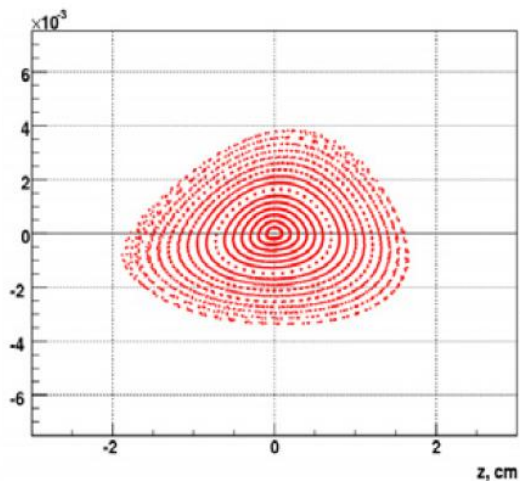
$$dj = 2 \sqrt{\frac{f(j_u)}{a''(j_u) - f''(j_u)}}$$



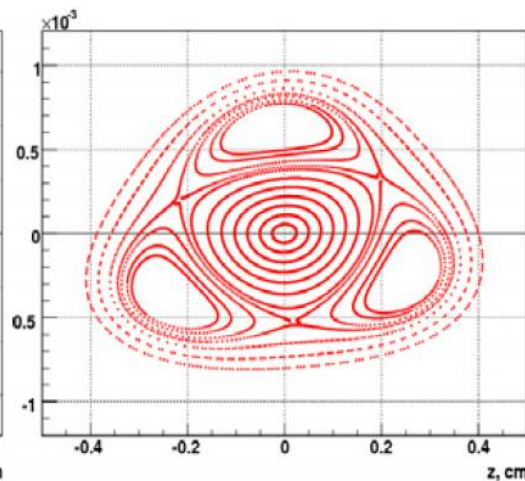
4d гамильтониан, пересечение резонанса $3\nu_z = 23$



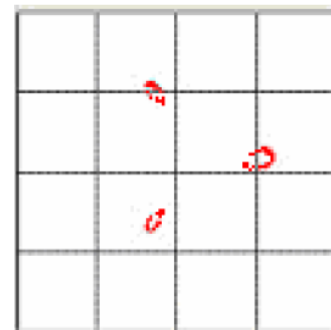
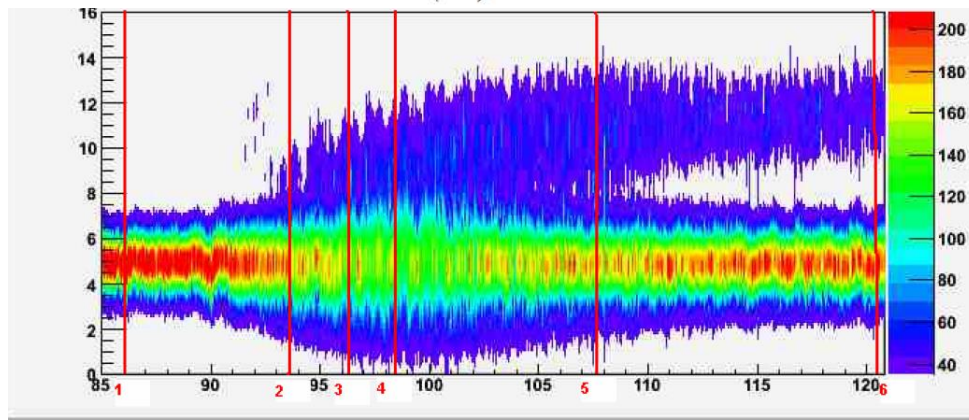
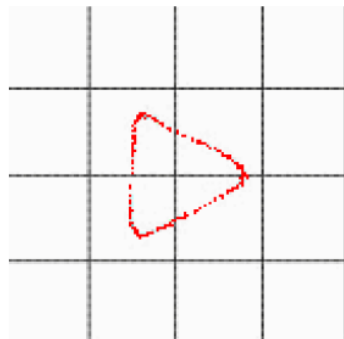
$$-2.66 \times 10^{-3}$$



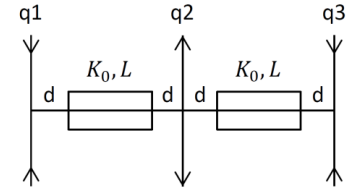
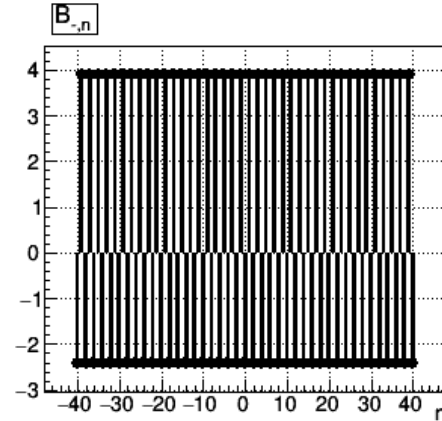
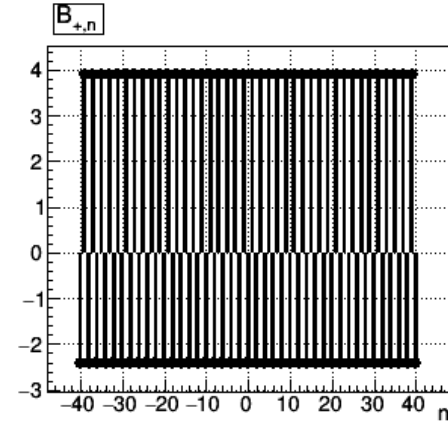
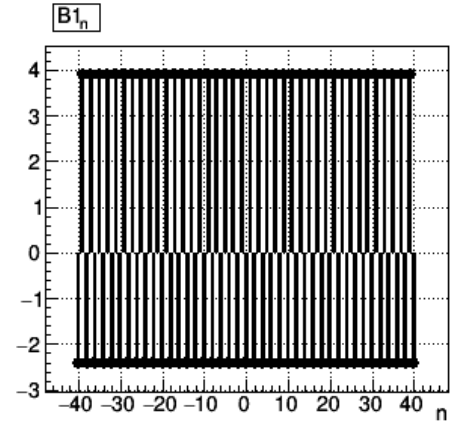
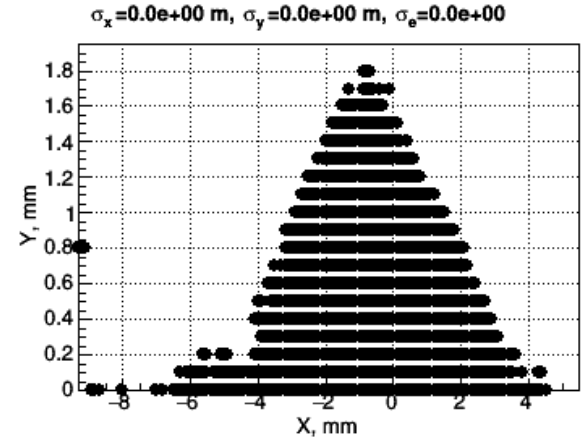
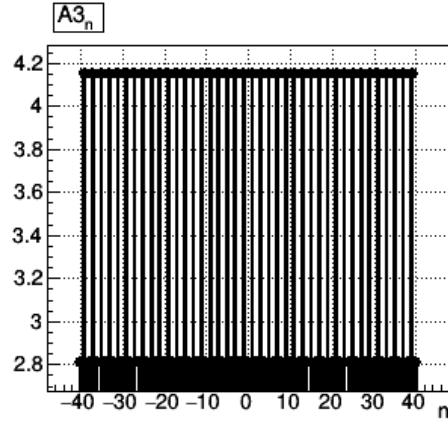
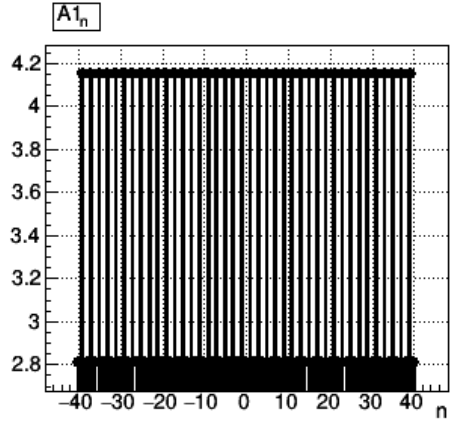
$$\delta(\theta) = 0$$



$$3.4 \times 10^{-4}$$

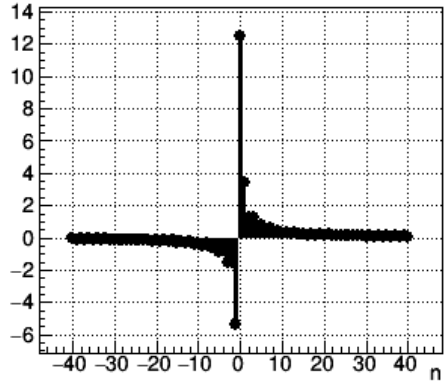


4d гамильтониан, гармоники (секступоль)

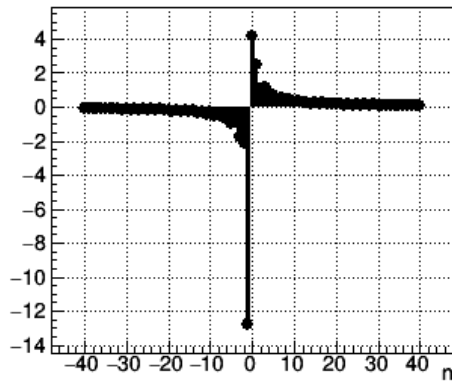


4d гамильтониан, гармоники (секступоль)

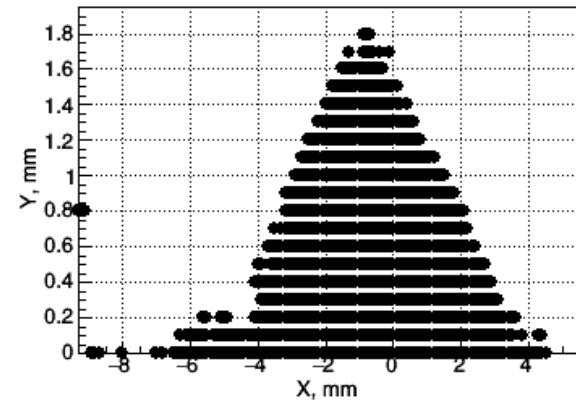
$A1_n/(n+v_x)$



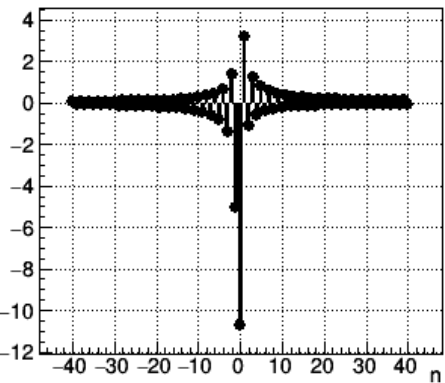
$A3_n/(n+3v_x)$



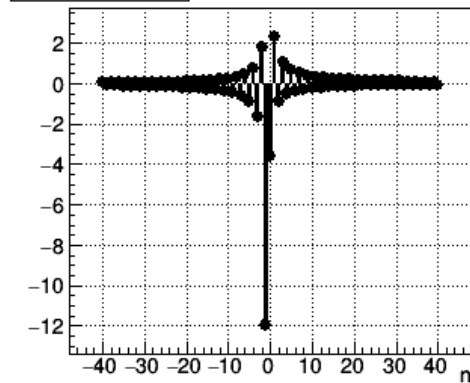
$\sigma_x=0.0e+00$ m, $\sigma_y=0.0e+00$ m, $\sigma_e=0.0e+00$



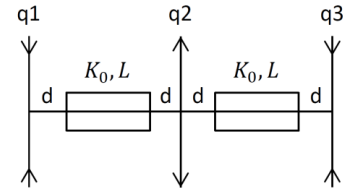
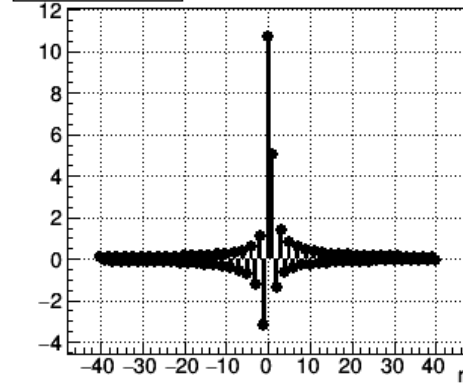
$B1_n/(n+v_x)$



$B_{+,n}/(n+v_x+2v_y)$



$B_{-,n}/(n+v_x-2v_y)$



4d гамильтониан, резонансы (секступоль)

- Первый порядок: $\nu_x = p$, $3\nu_x = m$, $\nu_x \pm 2\nu_y = p$, $(n, m, p) \in \mathbb{Z}$
 - Сила резонанса = гармоника
 - Хорошо считается
- Высшие порядки: $n\nu_x + m\nu_y = p$
 - Сила резонанса = многократные ряды из гармоник
 - Сколько членов брать?
- Приближение изолированного резонанса: $n\nu_x = -p$
 - Не работают вблизи резонансов
 - Между резонансами нет предсказаний
- Какой спектр для большой динамической апертуры?

4d гамильтониан, теория возмущений (секступоль)

$$\begin{aligned} H(\psi_x, j_x, \psi_y, j_y; \theta) &= v_x j_x + v_y j_y \\ &+ \frac{RK_2}{6\sqrt{2}} j_x^{\frac{3}{2}} \beta_x^{\frac{3}{2}} (3 \cos[\phi_x] + \cos[3\phi_x]) \\ &- \frac{RK_2}{2\sqrt{2}} j_y \beta_y j_x^{\frac{1}{2}} \beta_x^{\frac{1}{2}} (2 \cos[\phi_x] + \cos[\phi_x - 2\phi_y] + \cos[\phi_x + 2\phi_y]) \\ &= H_0(j_x, j_y) + \varepsilon H_1(\psi_x, j_x, \psi_y, j_y, \theta) \end{aligned}$$

$$\phi_{x,y} = \psi_{x,y} + \varphi_{x,y}(\theta) - v_{x,y} \theta$$

Цель: найти новые переменные $\{\Psi, J\}$ и гамильтониан $H(J)$

- Классическая теория Пуанкаре-вон-Цайпеля
 - Запутанные старые новые переменные
- Теория непрерывных преобразований Ли и ряды Дебри
 - Кусочно-постоянные, многомерные интегралы

4d гамильтониан, теория возмущений (секступоль)

Функции возмущения:

$$D_1 = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{RK_2(\tau)\beta_x(\tau)^{\frac{3}{2}} \exp[i(\varphi_x(\tau) - \varphi_x(\theta) - \pi\nu_x)]}{4\sqrt{2} \sin[\pi\nu_x]} d\tau$$

$$D_3 = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{RK_2(\tau)\beta_x(\tau)^{\frac{3}{2}} \exp[3i(\varphi_x(\tau) - \varphi_x(\theta) - \pi\nu_x)]}{4\sqrt{2} \sin[3\pi\nu_x]} d\tau$$

$$D_2 = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{RK_2(\tau)\beta_y(\tau)\beta_x(\tau)^{\frac{1}{2}} \exp[i(\varphi_x(\tau) - \varphi_x(\theta) - \pi\nu_x)]}{4\sqrt{2} \sin[\pi\nu_x]} d\tau$$

$$D_{\pm} = \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \frac{RK_2(\tau)\beta_y(\tau)\beta_x(\tau)^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{2} \sin[\pi\nu_x \pm 2\pi\nu_y]} \times \\ \times \exp \left[i \left(\varphi_x(\tau) - \varphi_x(\theta) - \pi\nu_x \pm 2(\varphi_y(\tau) - \varphi_y(\theta) - \pi\nu_y) \right) \right] d\tau$$

4d гамильтониан, теория возмущений (секступоль)

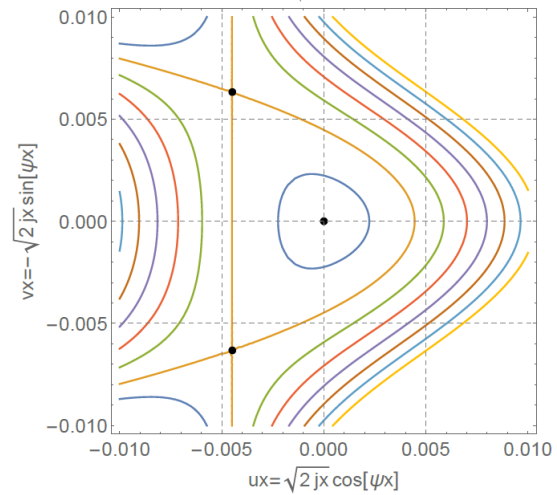
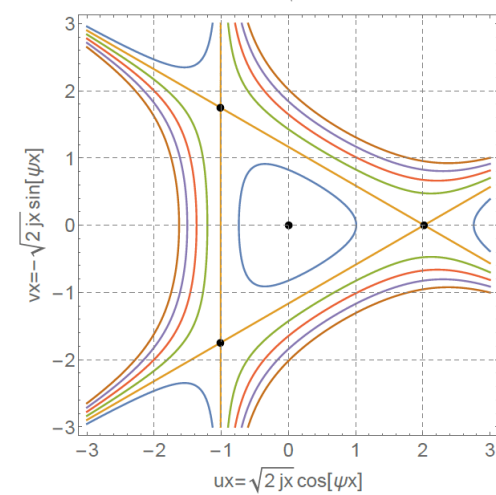
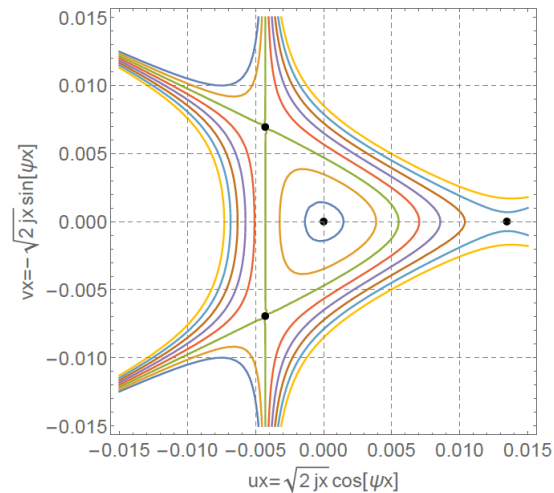
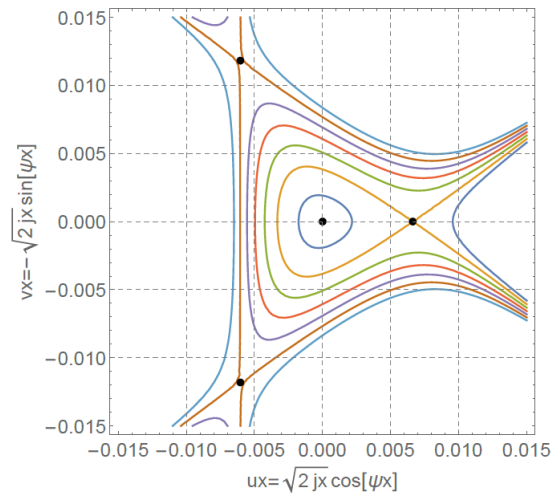
Новые инвариантные $\{J_{1,x}, J_{1,y}\}$

$$J_{1,x} = j_x + j_x^{\frac{3}{2}} \operatorname{Re} \left(D_1(\theta) e^{i\phi_x(\theta)} + D_3(\theta) e^{i3\phi_x(\theta)} \right) \\ - j_y j_x^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \left(2D_2(\theta) e^{i2\phi_x(\theta)} \right) \\ - j_y j_x^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \left(D_+(\theta) e^{i[\phi_x(\theta)+2\phi_x(\theta)]} + D_-(\theta) e^{i[\phi_x(\theta)-2\phi_x(\theta)]} \right) \\ J_{1,y} = j_y - 2j_y j_x^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \left(D_+(\theta) e^{i[\phi_x(\theta)+2\phi_x(\theta)]} - D_-(\theta) e^{i[\phi_x(\theta)-2\phi_x(\theta)]} \right)$$

Линии уровней – фазовые траектории

4d гамильтониан, теория возмущений (секступоль)

Инварианты $\{J_{1,x}, J_{1,y}\}$
линии уровней – фазовые
траектории

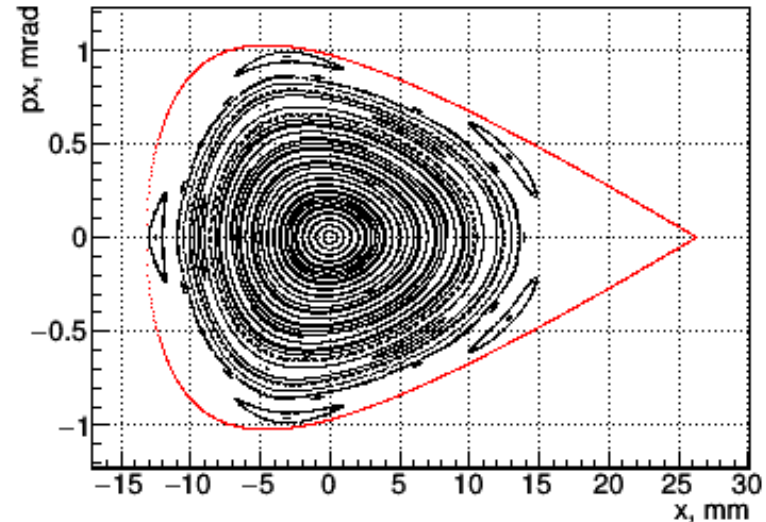
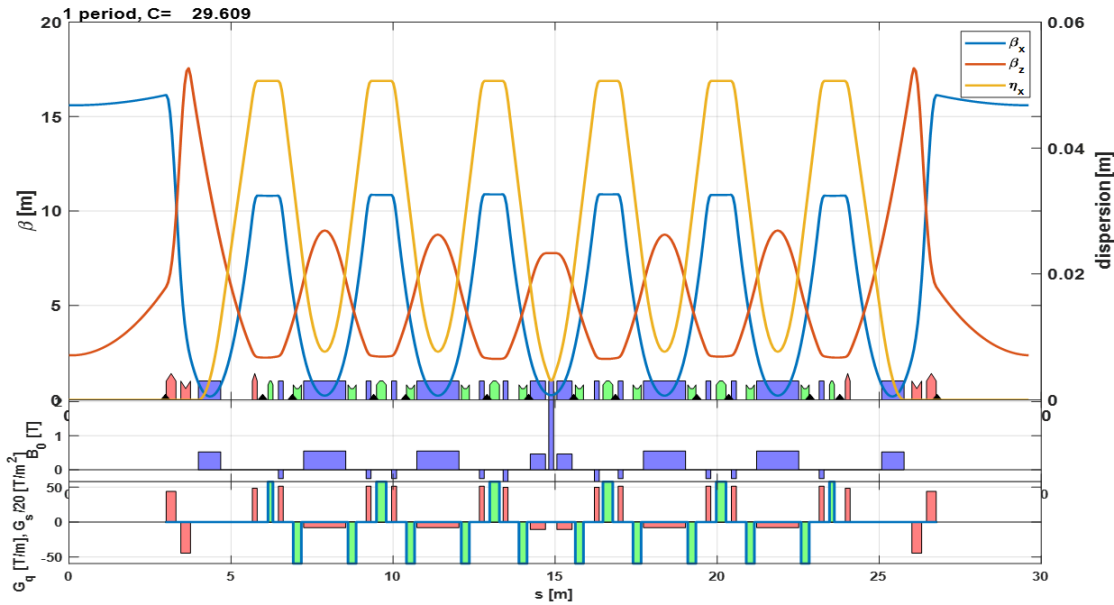


4d гамильтониан, теория возмущений (секступоль)

Новые инварианты $\{J_{1,x}, J_{1,y}\}$

$$J_{1,x} = j_x + j_x^2 \operatorname{Re} \left(D_1(\theta) e^{i\phi_x(\theta)} + D_3(\theta) e^{i3\phi_x(\theta)} \right)$$

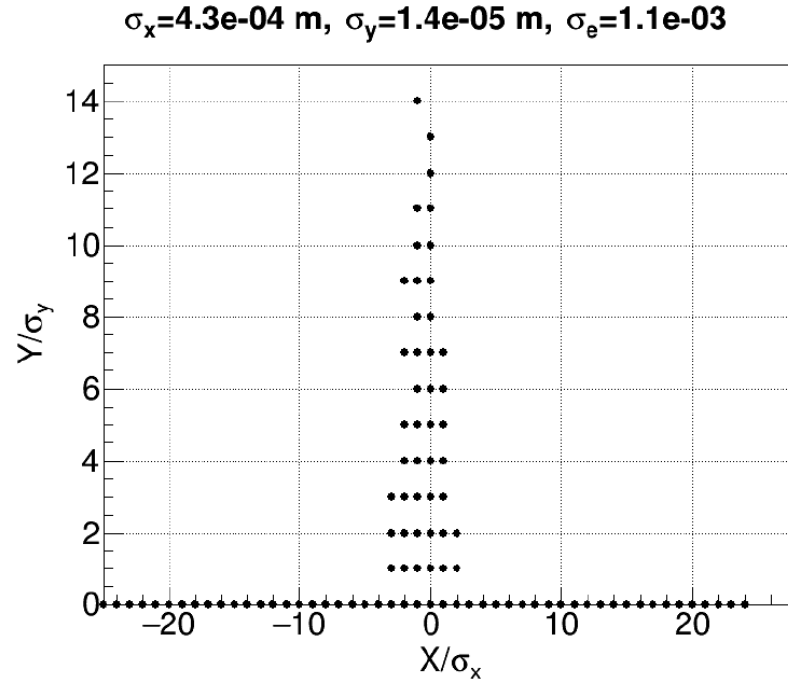
Линии уровней – фазовые траектории



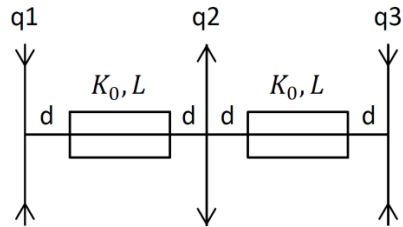
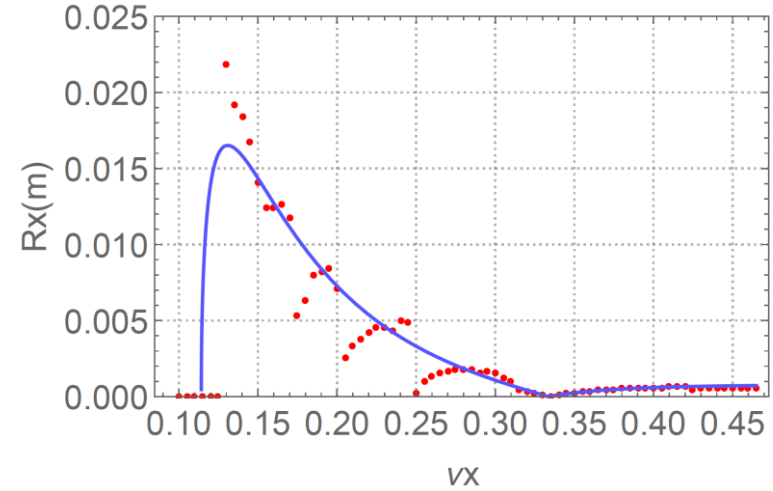
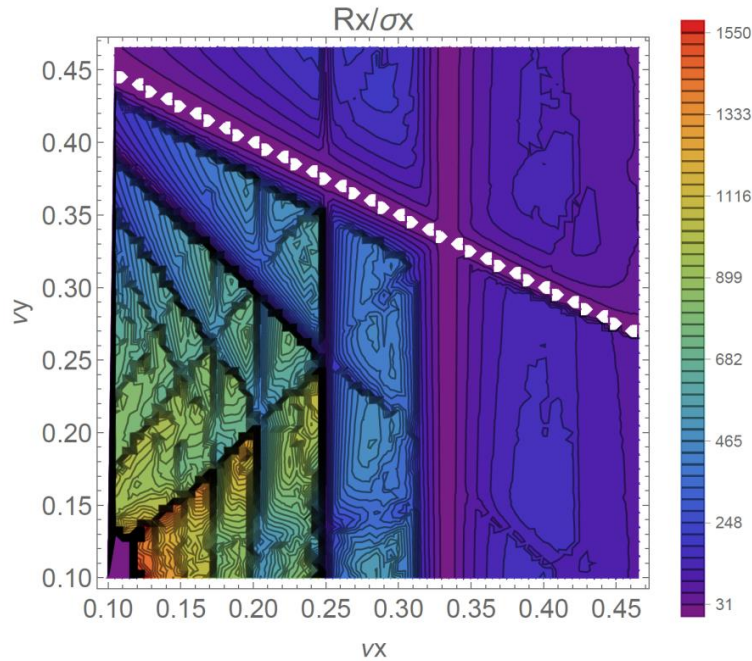
4d гамильтониан, теория возмущений (секступоль)

$$J_{1,y} = j_y - 2j_y j_x^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re}(D_+(\theta) e^{i[\phi_x(\theta) + 2\phi_x(\theta)]} - D_-(\theta) e^{i[\phi_x(\theta) - 2\phi_x(\theta)]})$$

$$J_{1,y} = 0 \Rightarrow j_{x,th}$$



FODO: динамическая апертура

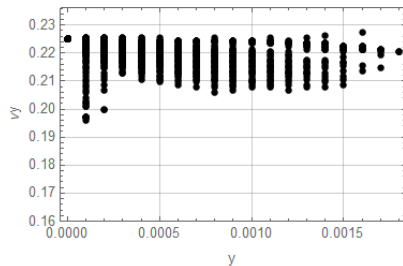
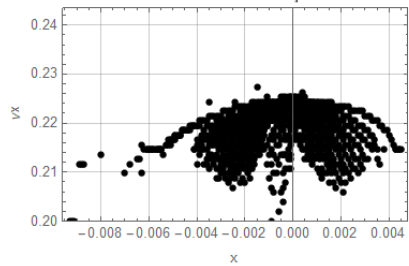
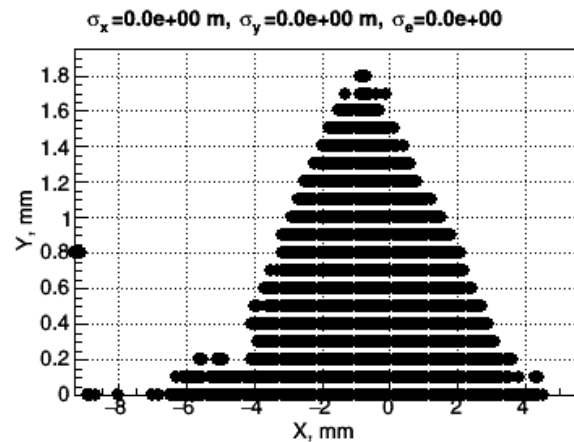
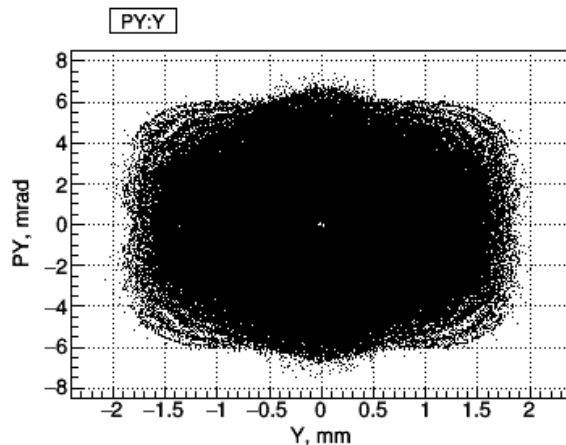
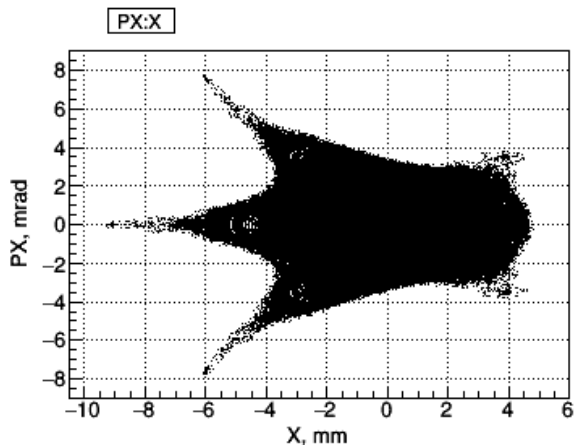


Первый порядок теории возмущений, функции возмущения

$$R_{da} \propto \frac{1}{K_2 L \beta_x}$$

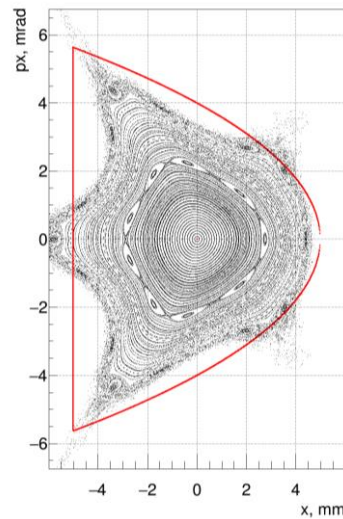
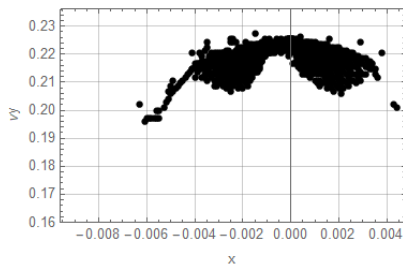
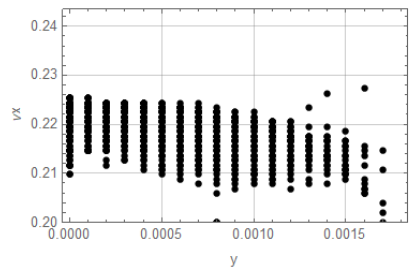
Слишком простая, грубая

FODO: динамическая апертура ($\nu_x = 0.225$)

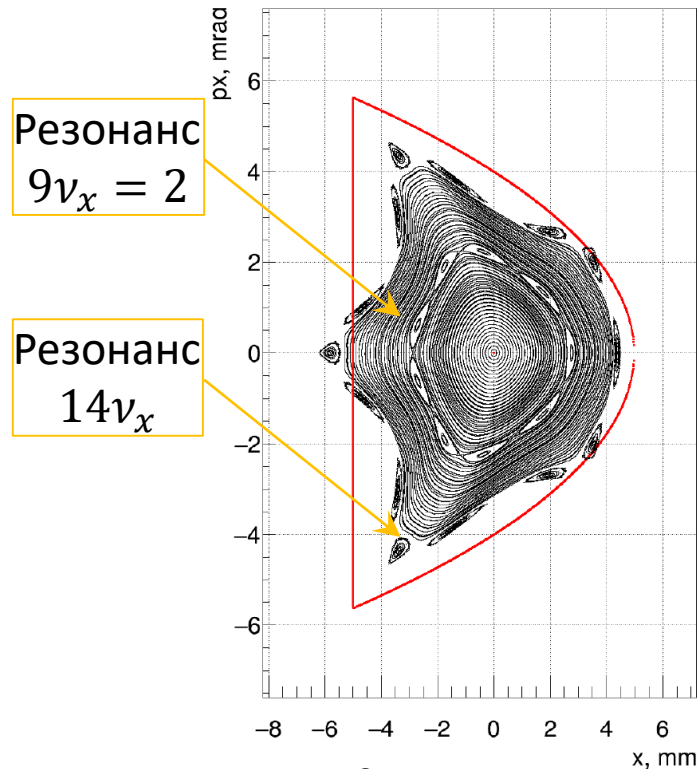


$$\nu_x = \alpha_{xx}j_x + \alpha_{xy}j_y + \dots$$

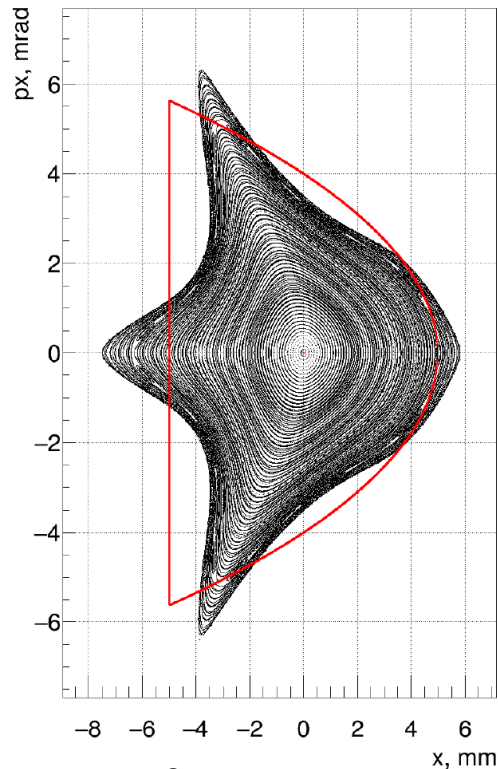
$$\nu_y = \alpha_{yx}j_x + \alpha_{yy}j_y + \dots$$



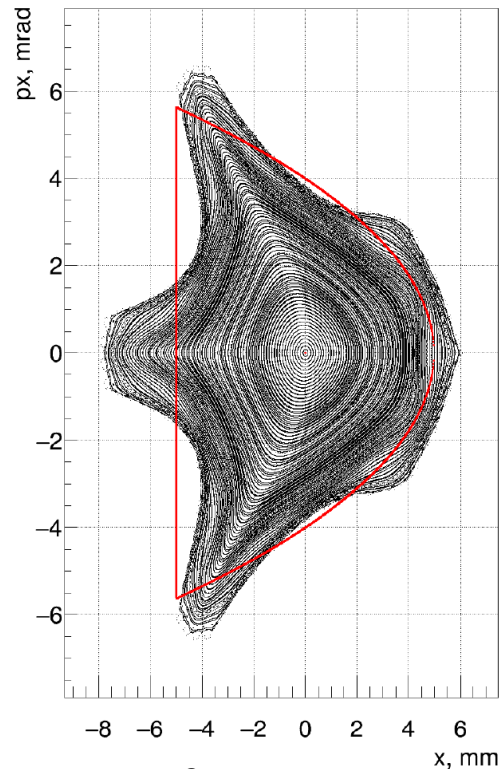
FODO: динамическая апертура ($\nu_x = 0.225$)



$$\frac{\partial \nu_x}{\partial j_x} = -1067$$

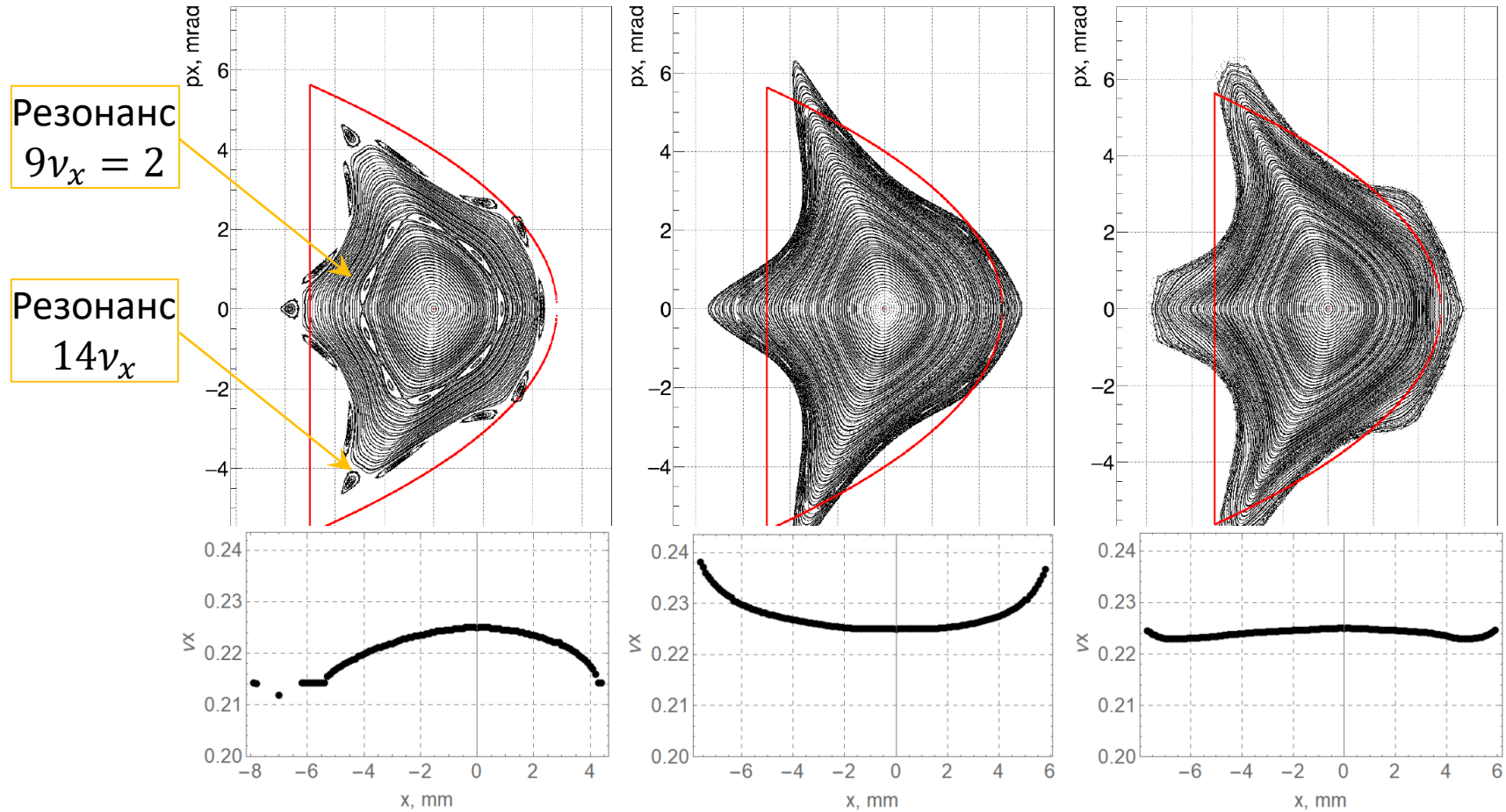


$$\frac{\partial \nu_x}{\partial j_x} = -0.011$$



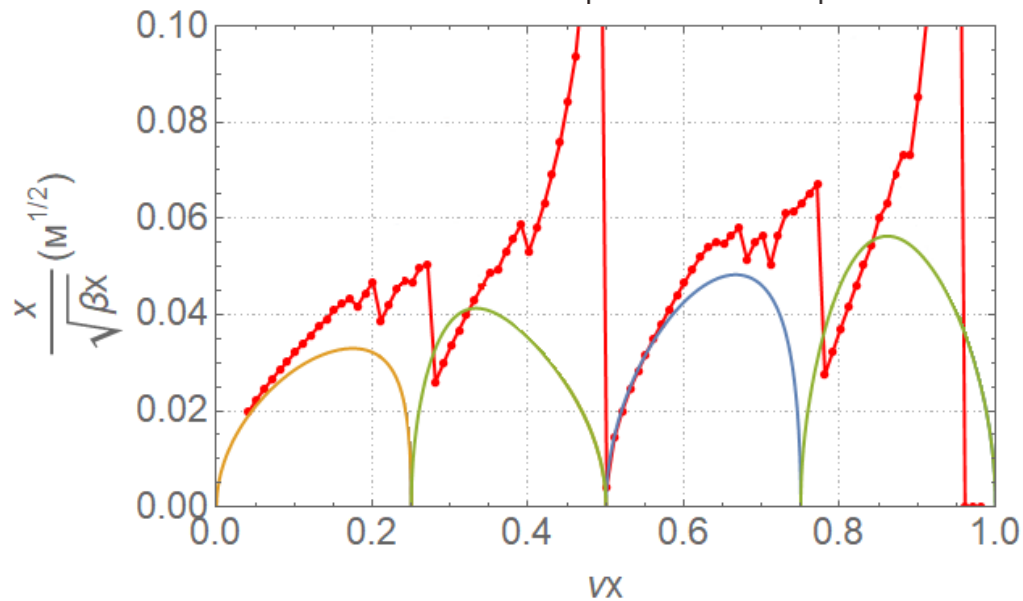
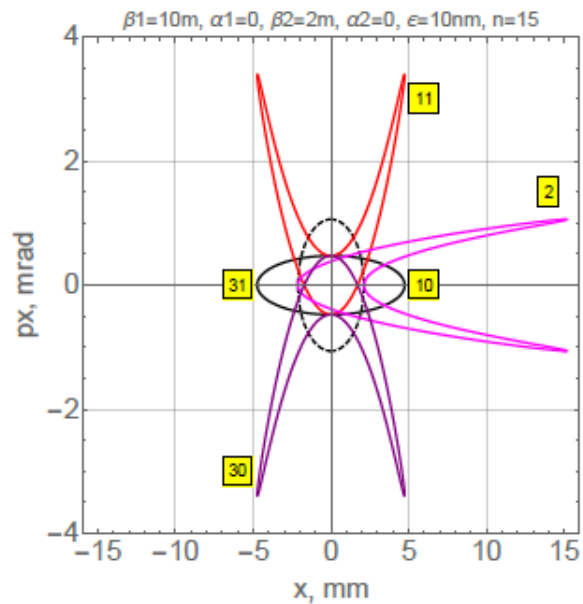
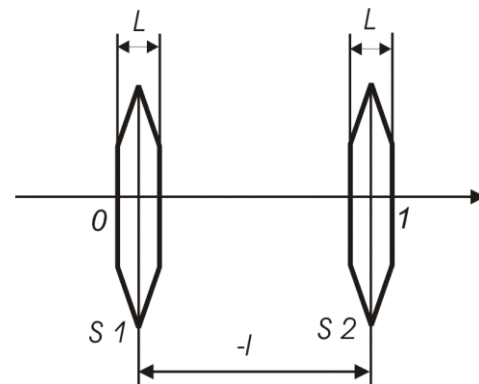
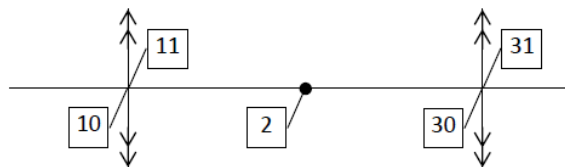
$$\frac{\partial \nu_x}{\partial j_x} = -443$$

FODO: динамическая апертура ($v_x = 0.225$)

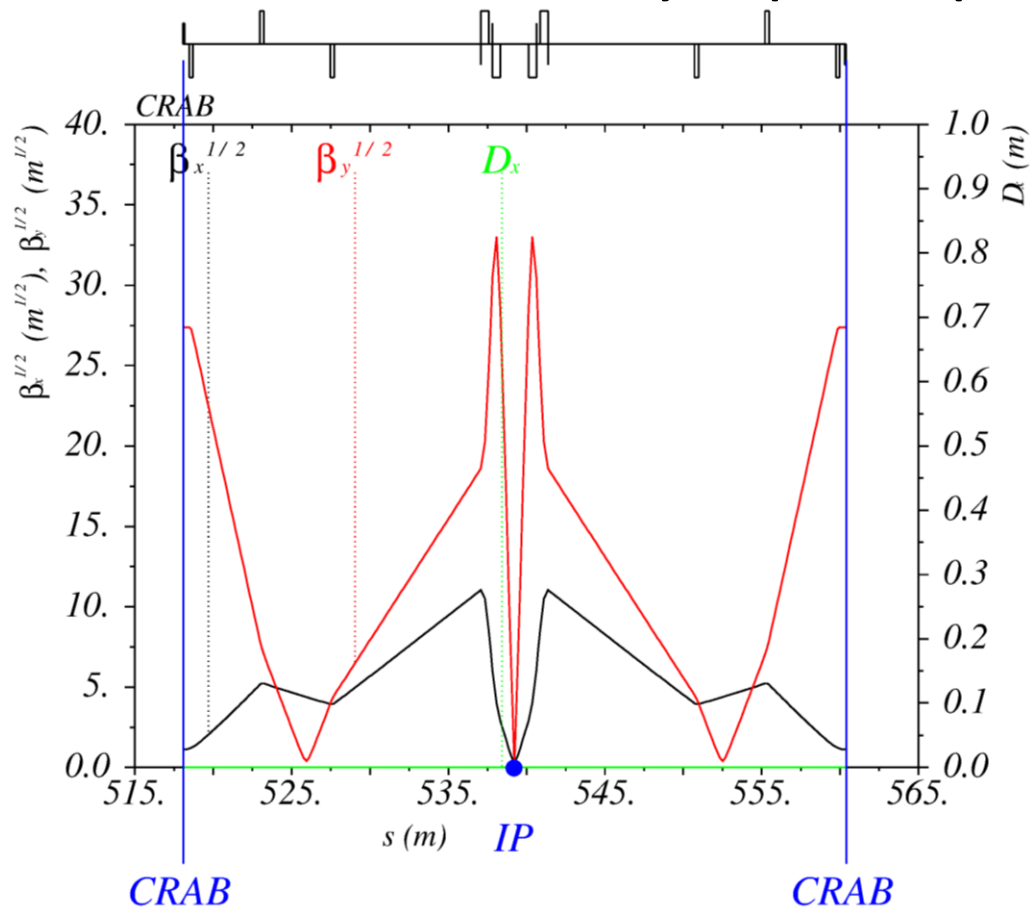


4d гамильтониан, комбинации секступолей

Пара через $-I$



Супер с-τ фабрика



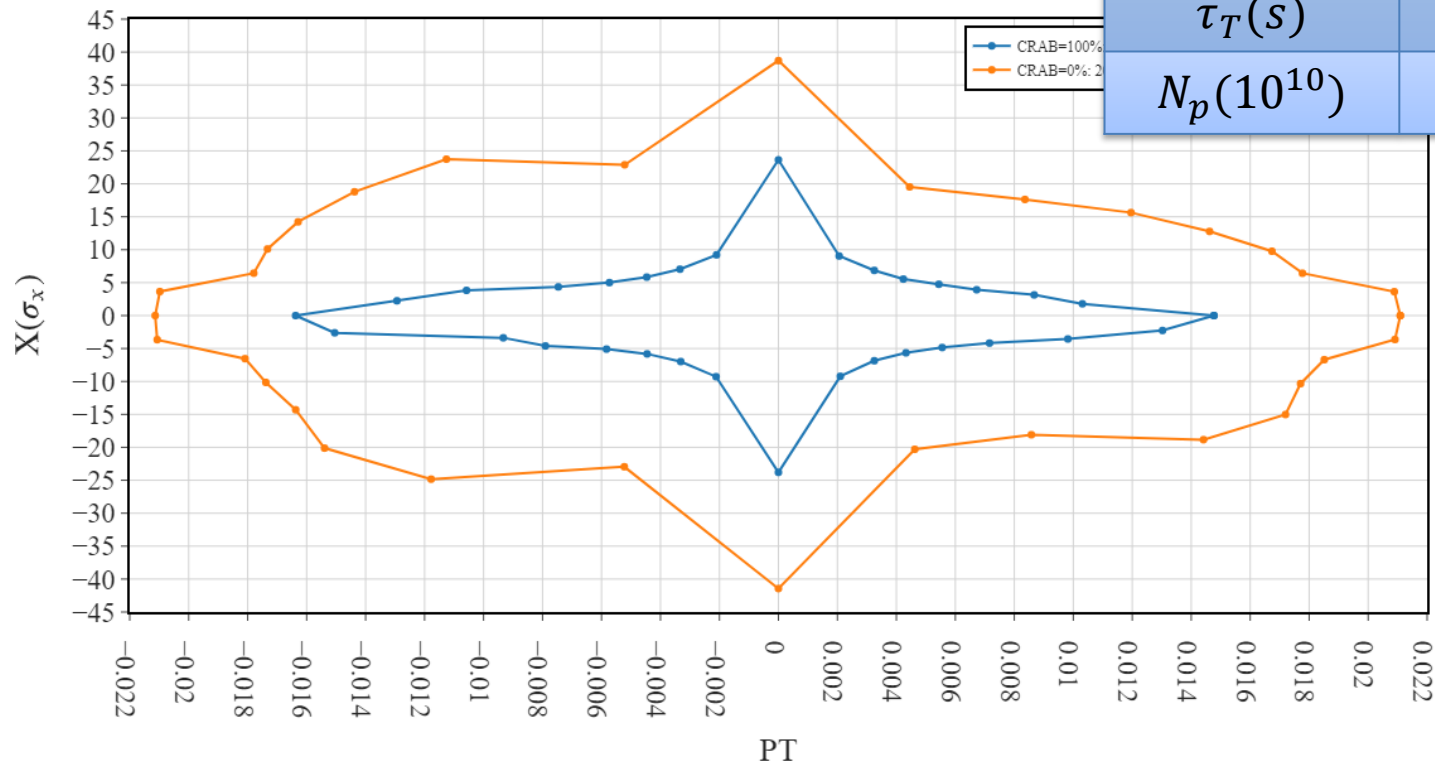
Линейное преобразование
между CRAB секступолями

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ зависит } p_\sigma;$$

CRAB секступоли уменьшают бд ДА

Супер с- τ фабрика

6d-DA, $y_0 = \sigma_y, \sigma_x = 3.50e - 04m, \sigma_e = 1.14e - 03, 2 \text{ GeV}$



$E = 1.5 \text{ GeV}$	CRAB OFF	CRAB ON
$\tau_T (s)$	280	63
$N_p (10^{10})$	9	9

Цели, вопросы

- Первый и второй порядки теории возмущений недостаточны
- Высшие слишком сложны
- Природа теории возмущений – приближения

- Как получить большую динамическую апертуру?
- Как оптимизировать быстрее?
- Какие параметры оптимизировать?

Что рассказал

1) Гамильтониан с нуля

2) 4d поперечная динамика

- Диполь, магнитная жёсткость, уравнение движения
- Квадруполь, градиент, фокусировка, уравнения движения
- траектории, бета функция,
- Секступоль, градиент, уравнения движения
- Хроматизм, уравнения

движения, частоты и бета от дельта

– Динамическая апертура

• 4d гамильтониан,

– Гармоники

– Резонансы

– Теория возмущений

– Функции возмущений

– Новые инварианты

– Линии уровня

– Расстройка частоты