УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

С.К. Годунов

Институт математики им. С.Л. Соболева

Вариант от 10.06.2013

Уравнения Максвелла

Первая система

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0 \qquad (i,k,l)=(1,2,3),(2,3,0),(3,0,1),(0,1,2)$$

$$(F_{ik})=\begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вторая запись той же системы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}=(0,0,0,0) \qquad (*)$$

Параметризация той же системы

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x^0}+\frac{\partial A^i}{\partial x^i}=0$$

$$-\frac{\partial A_i}{\partial x^0}+\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}=E_i$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_3}{\partial x^2}-\dfrac{\partial A_2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial x^3}-\dfrac{\partial A_3}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial x^1}-\dfrac{\partial A_1}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ -B_1 \\ -B_2 \\ -B_3 \end{pmatrix}=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ E_3 \\ -E_2 \end{pmatrix}=0$$

...

и остальные равенства системы *

Первая подсистема уравнений Максвелла

Состоит из равенств

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0,0)$$

В которой B_i, E_i связаны уравнениями

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x^0} + \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0$$

$$-\frac{\partial A_i}{\partial x^0} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = E_i$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

Вторая подсистема уравнений Максвелла

$$\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k}+J^i=0 \qquad G^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & -W_{E_1} & -W_{E_2} & -W_{E_3} \\ W_{E_1} & 0 & W_{B_3} & -W_{B_2} \\ W_{E_2} & -W_{B_3} & 0 & W_{B_1} \\ W_{E_3} & W_{B_2} & -W_{B_1} & 0 \end{pmatrix}$$ - тензор

Его структуру мы сформулируем позднее, когда мы определим лоренцовы инварианты

$$W^{(1)}=\frac{1}{4}g^{ik}F_{kl}g^{lj}F_{lj}$$

$$W^{(2)}=\frac{1}{2}\frac{u^l F_{lm}g^{mj}F_{jk}u^k}{-u_\alpha u^\alpha}=\frac{g^{mj}z_m z_j}{-2u_\alpha u^\alpha}$$

где $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$W^{(1)}=\frac{B_k B_k-E_k E_k}{2}$$

v^k - трехмерные компоненты скорости

$$W^{(2)}=\frac{E_k E_k+2\sqrt{1-|v|^2}\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}}{2\left(1-|v|^2\right)}+\frac{\left(v^k E_k\right)^2+\left(v^2 B_3-v^3 B_2\right)^2+\left(v^3 B_1-v^1 B_3\right)^2+\left(v^1 B_2-v^2 B_1\right)^2}{2\left(1-|v|^2\right)}\approx E_k E_k\left(\text{при } |v|\ll 1\right)$$

$$W=W\left(W^{(1)},W^{(2)},\mu,\varepsilon\right)$$

$W^{(1)},W^{(2)}$ -лоренц-инвариантные квадратичные формы от B_i, E_j

Формальный вывод закона сохранения энергии импульса

При ограничительной гипотезе: $\varepsilon \equiv const,\ \mu \equiv const,\ u^i = const$

$2W = E_k W_{E_k} + B_k W_{B_k}$ − квадратичная форма от $E_i,\ B_i$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3},1\right)\begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -W_{B_1} & -W_{B_2} & -W_{B_3} \\ W_{B_1} & 0 & W_{E_3} & -W_{E_2} \\ W_{B_2} & -W_{E_3} & 0 & W_{E_1} \\ W_{B_3} & W_{E_2} & -W_{E_1} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3},1\right)\begin{pmatrix} 0 & -W_{E_1} & -W_{E_2} & -W_{E_3} \\ W_{E_1} & 0 & W_{B_3} & -W_{B_2} \\ W_{E_2} & -W_{B_3} & 0 & W_{B_1} \\ W_{E_3} & W_{B_2} & -W_{B_1} & 0 \\ J^0 & J^1 & J^2 & J^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 0$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\left(\begin{pmatrix} 0 & -W_{E_1} & -W_{E_2} & -W_{E_3} \\ W_{E_1} & 0 & W_{B_3} & -W_{B_2} \\ W_{E_2} & -W_{B_3} & 0 & W_{B_1} \\ W_{E_3} & W_{B_2} & -W_{B_1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{W}_{w^{(1)}}\begin{pmatrix} w^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^{(1)} \end{pmatrix} + \mathrm{W}_{w^{(2)}}\begin{pmatrix} w^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^{(2)} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Сила Лоренца

$$(f_0, f_1, f_2, f_3) = (E_k J^k \mid -E_1 J^0 + J^3 B_2 - J^2 B_3 \mid -E_2 J^0 + J^1 B_3 - J^3 B_1 \mid -E_3 J^0 + J^2 B_1 - J^1 B_2)$$

Моделирование релятивисткой гидродинамики

$$(g_{\alpha\beta}) = (g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad u = \begin{cases} (u^0, u^1, u^2, u^3) \\ (u_0, u_1, u_2, u_3) = (-u^0, u^1, u^2, u^3) \end{cases}$$

Скаляры:

$$q = -u_\alpha u^\alpha$$
$$r$$
$$\theta$$

Термодинамический потенциал $L = L(q, r, \theta)$

---

u^α	$\dfrac{\partial}{\partial x^\beta}(u^\beta L)_{u^\alpha} = f_\alpha$
r	$\dfrac{\partial}{\partial x^\beta}(u^\beta L)_r = 0$
θ	$\dfrac{\partial}{\partial x^\beta}(u^\beta L)_\theta = 0$

$$(u^\alpha f_\alpha \equiv 0, \ \text{если} \ f_\alpha \ - \ \text{сила Лоренца})$$

$$J^k = u^k L_r$$

Уравнение следствие

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[u^\beta(2qL_q + rL_r + \theta L_\theta)\right] = u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}(u^\beta L)_{u^\alpha} + r\frac{\partial}{\partial x^\beta}(u^\beta L)_r + \theta \frac{\partial}{\partial x^\beta}(u^\beta L)_\theta = u^\alpha f_\alpha = 0$$

Сила Лоренца

$$(f_0, f_1, f_2, f_3) = (E_k J^k \ | \ -E_1 J^0 + J^3 B_2 - J^2 B_3 \ | -E_2 J^0 + J^1 B_3 - J^3 B_1 \ | -E_3 J^0 + J^2 B_1 - J^1 B_2)$$

$$J^k = u^k L_r \qquad u^k f_k = 0$$

$$\begin{pmatrix} \left(W - E_k W_{E_k}\right) & B_3 W_{E_2} - B_2 W_{E_3} & B_1 W_{E_3} - B_3 W_{E_1} & B_2 W_{E_1} - B_1 W_{E_2} \\ E_2 W_{B_3} - E_3 W_{B_2} & \begin{pmatrix} W - E_1 W_{E_1} - \\ -B_2 W_{B_2} - B_3 W_{B_3} \end{pmatrix} & B_1 W_{B_2} - E_2 W_{E_1} & B_1 W_{B_3} - E_3 W_{E_1} \\ E_3 W_{B_1} - E_1 W_{B_3} & B_2 W_{B_1} - E_1 W_{E_2} & \begin{pmatrix} W - B_1 W_{B_1} - \\ -E_2 W_{E_2} - B_3 W_{B_3} \end{pmatrix} & B_2 W_{B_3} - E_3 W_{E_2} \\ E_1 W_{B_2} - E_2 W_{B_1} & B_3 W_{B_1} - E_1 W_{E_3} & E_3 W_{B_1} - E_1 W_{B_3} & \begin{pmatrix} W - B_1 W_{B_1} - \\ -B_2 W_{B_2} - E_3 W_{E_3} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -W_{E_1} & -W_{E_2} & -W_{E_3} \\ W_{E_1} & 0 & W_{B_3} & -W_{B_2} \\ W_{E_2} & -W_{B_3} & 0 & W_{B_1} \\ W_{E_3} & W_{B_2} & -W_{B_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{W}_{W^{(1)}} \begin{pmatrix} W^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^{(1)} \end{pmatrix} + \mathrm{W}_{W^{(2)}} \begin{pmatrix} W^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(G^{ik} F_{kj} - \frac{1}{4} \delta^i_j G^{lm} F_{ml}\right) = \left(M^i_j\right)$$

$$\left(G^{ml} F_{lm} = 2\left(E_k W_{E_k} + B_k W_{B_k}\right) = 2\left(W_{W^{(1)}} \left[E_k W^{(1)}_{E_k} + B_k W^{(1)}_{B_k}\right] + W_{W^{(2)}} \left[E_k W^{(2)}_{E_k} + B_k W^{(2)}_{B_k}\right]\right) = 2\left(W_{W^{(1)}} W^{(1)} + W_{W^{(2)}} W^{(2)}\right)\right)$$

При наших ограничениях доказано

$$\frac{\partial M^i_j}{\partial x^i} = -J^k F_{kj} = -f_j$$

Итак, при сформулированных ограничениях справедливо равенство

$$\frac{\partial M_j^i}{\partial x^i} = -J^k F_{kj} = -f_j$$

Закон сохранения энергии-импульса

$$\left(M_j^i\right) = \left(G^{ik} F_{kj} - \frac{1}{4}\delta_j^i G^{lm} F_{ml}\right)$$

Тензор Максвелловских натяжений

$$\frac{\partial M_0^i}{\partial x^i} = -f_0$$

Закон сохранения энергии для электромагнитного поля

$$\begin{pmatrix} \left(W - E_k W_{E_k}\right) \\ E_2 W_{B_3} - E_3 W_{B_2} \\ E_3 W_{B_1} - E_1 W_{B_3} \\ E_1 W_{B_2} - E_2 W_{B_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0^0 \\ M_0^1 \\ M_0^2 \\ M_0^3 \end{pmatrix}$$

ПОСТУЛАТ: Эти равенства являются верными и без наложенных ограничений

Рассмотрим случай:

$$W^{(1)} = \frac{B_k B_k - E_k E_k}{2}, \qquad k = 1,2,3 \qquad v_k = v^k$$

$$u^0 = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{1-|v|^2}}, \qquad u^k = \frac{v^k \sqrt{q}}{\sqrt{1-|v|^2}}$$

$$W^{(2)} = \frac{E_k E_k + 2\sqrt{1-|v|^2}\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}}{2\left(1-|v|^2\right)} + \frac{\left(v_k E_k\right)^2 + \left(v^2 B_3 - v^3 B_2\right)^2 + \left(v^3 B_1 - v^1 B_3\right)^2 + \left(v^1 B_2 - v^2 B_1\right)^2}{2\left(1-|v|^2\right)} \approx E_k E_k$$

Из них составляется **инвариант**:

$$W = \frac{1/\mu}{2} W^{(1)} + \frac{\varepsilon - 1/\mu}{2} W^{(2)}$$

$$W - E_k W_{E_k} \approx \frac{\varepsilon E_k E_k + \dfrac{1}{\mu} B_k B_k}{2} \qquad \text{если} \quad \sqrt{u_k u_k} \Box |u_0|$$

Благодарю за внимание!