

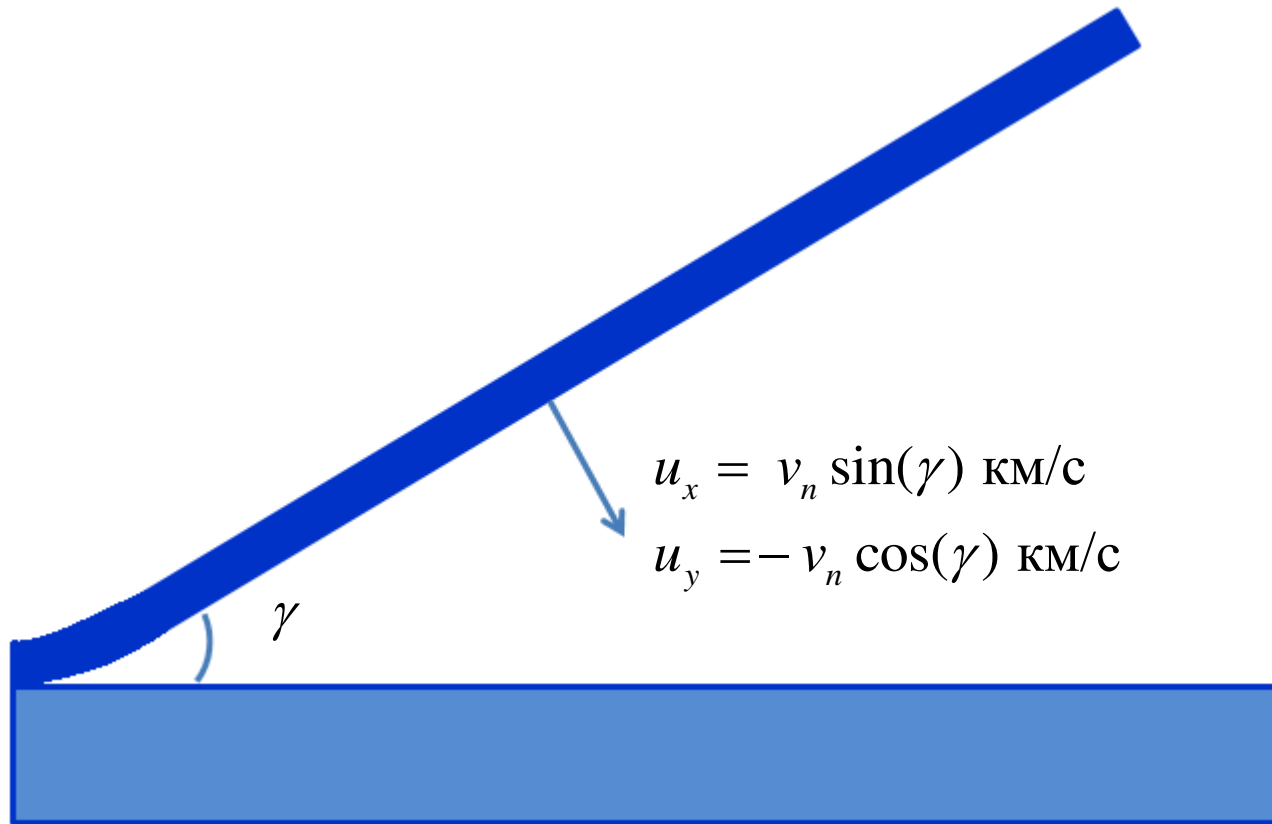
Моделирование упруго-пластических деформаций

С.К. Годунов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Новосибирск
17 июня 2013 г.

Постановка задачи о сварке взрывом

Метание верхней пластины осуществляется в результате детонации накрывающего ее слоя ВВ



На этой задаче мы будем демонстрировать результаты модельных расчётов

Описание деформаций

Эйлеровы координаты:

$$x^i = x^i(\underbrace{\xi_1, \xi_2, \xi_3}_t, t)$$

лагранжевы координаты

$$\left\{ \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right\} = \{C_j^i\} = C \quad C|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

«Эффективная» деформация

$$D = CB \quad (\det B = 1)$$

остаточная деформация при $t = 0$

$$\det(C) > 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi^2} & \frac{\partial}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial}{\partial \xi^2} & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi^1} \\ -\frac{\partial}{\partial \xi^3} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} & 0 \end{pmatrix} C = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi^2} & \frac{\partial}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial}{\partial \xi^2} & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi^1} \\ -\frac{\partial}{\partial \xi^3} & \frac{\partial}{\partial \xi^1} & 0 \end{pmatrix} B \stackrel{?}{=} 0$$

$$\det D = \det C = \det \left\{ \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right\}$$

Это равенства будут использоваться вместе с уравнениями

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad !$$

пока не рассматриваются
пластические деформации

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = u^i$$

для расчета D и C

Уравнение состояния

$$E = E^{(0)}(\det CB, S) + E^{(1)}(CB) =$$

$$= \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma(\gamma-1)} \left[\sigma(S) (\det CB)^{-(\gamma-1)} + (\gamma-1) \det CB \right] + \rho_0 c_1^2 \text{tr} \left[\sqrt{(CB)(CB)^T} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\sqrt{(CB)(CB)^T} \right) I \right]^2$$

Закон сохранения импульса (**подкорректированный** для учёта остаточных деформаций **B**):

$$\frac{\partial \rho_0 u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left[\rho_0 \mathbf{B}_j^k E_{(CB)_j^k} \right] = 0 \quad \left(\rho_0 \mathbf{B}_j^k E_{(CB)_j^k} = \rho_0 E_{c_j^i} \right)$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{u^i u_j}{2} + \rho_0 E \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left[\rho_0 u^i \mathbf{B}_j^k E_{(CB)_j^k} \right] = 0$$

Энтропийное
неравенство: $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$

Энтропия растёт на **разрывных** решениях и при пластических деформациях при изменении **B**

При расчете потоков через границы сеточных ячеек можно использовать уравнение неразрывности.

$$\frac{\partial}{\partial t} \det(CB) = \frac{\partial}{\partial t} \det C = \frac{\partial}{\partial \xi^j} (A_i^j u^i) \quad (A_i^j) = (\det C) C^{-1}$$

Однако, мы пойдём другим путём – **более геометрическим!**

Максвелловская релаксация

Релаксация напряжений (пластичность) обеспечивается изменением тензора остаточной деформации (по схеме Максвелла)

$$D_j^i = C_k^i B_j^k$$

$$\frac{\partial c_j^i}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} = 0 \quad \frac{\partial B_j^k}{\partial t} = \frac{R_j^k}{\tau} \quad \frac{\partial D_j^i}{\partial t} = \frac{\partial C_k^i B_j^k}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial \xi^k} B_j^k + \frac{C_k^i R_j^k}{\tau}$$

В этом случае корректировка энтропии проводится после изменения B

Во время этих релаксаций **появляется и меняется кривизна u поля эффективных деформаций**, описываемых матрицей $D_j^i = C_k^i B_j^k$

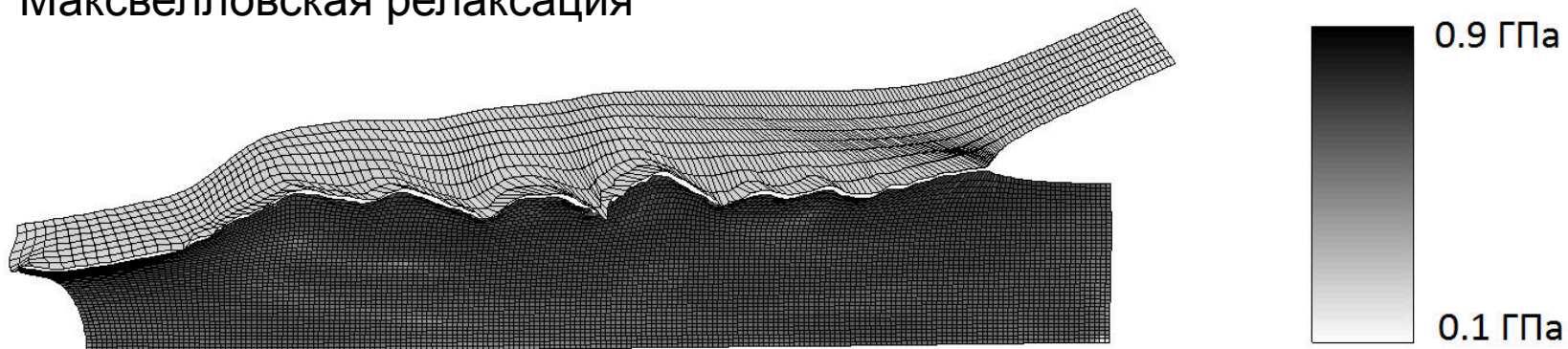
Следствие:

В поле напряжений появляются моменты.

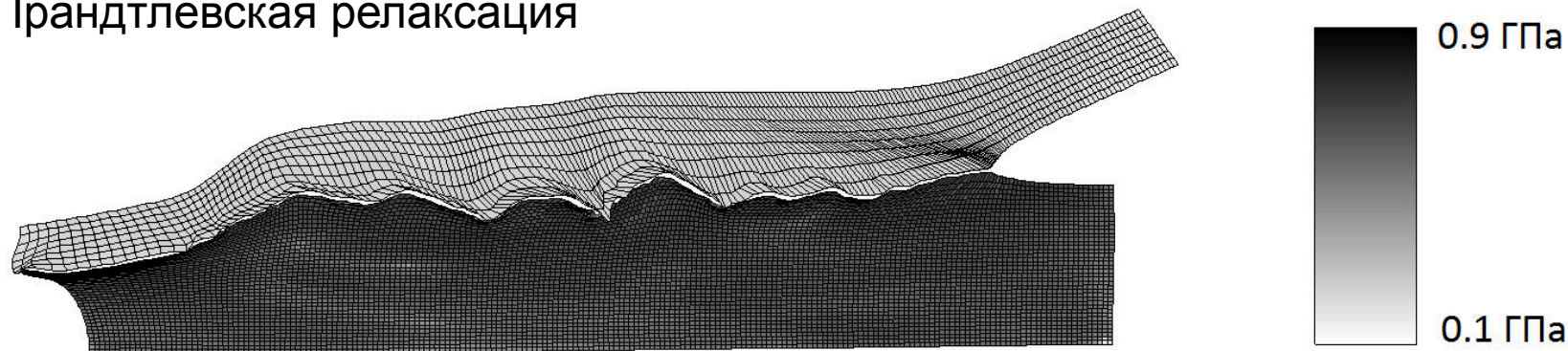
Изучается **моментная** теория упругости

Максвелловская и Прандтлевская релаксация

Максвелловская релаксация

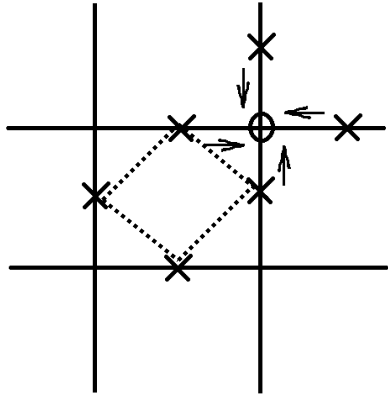


Прандтлевская релаксация

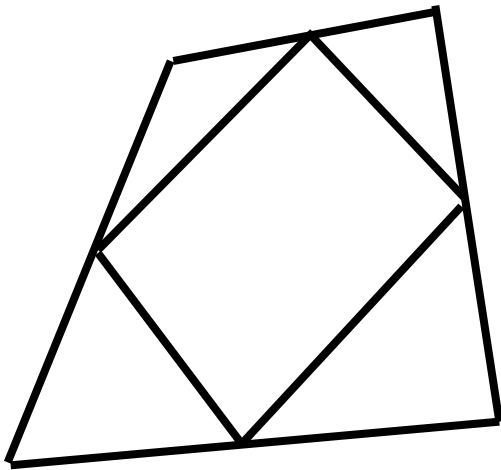


Имеет место полное совпадение результатов расчета!

Расчёт движения точек сетки (двумерный случай)



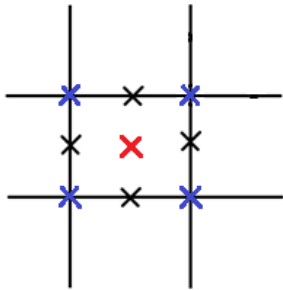
По скоростям, полученным из распадов разрыва на серединах границ между ячейками, осреднением мы получаем скорость угловых точек. По этим угловым точкам определяется их перемещение за шаг по времени и **деформация ячейки** в эйлеровых координатах.



Определяются C_{ij} по координатам вписанного параллелограмма.

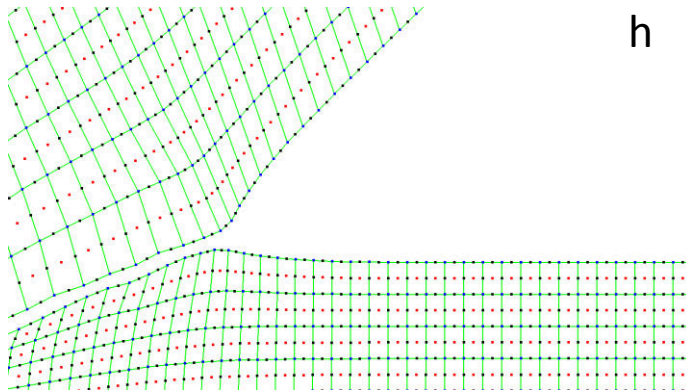
Проводится контроль геометрических погрешностей, он показан на следующих слайдах

Расчёт движения точек сетки (двумерный случай)

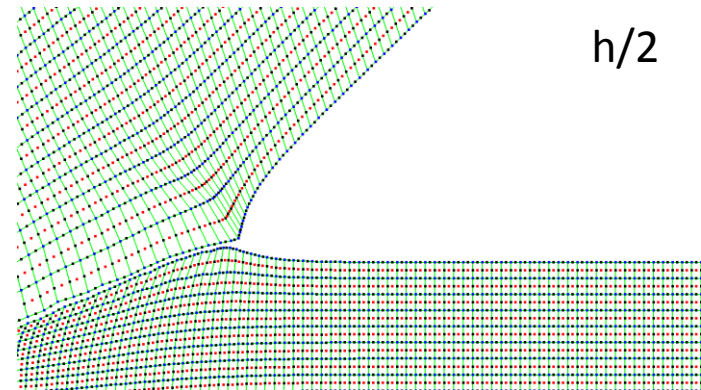


В целом в схеме используются следующие вершины:

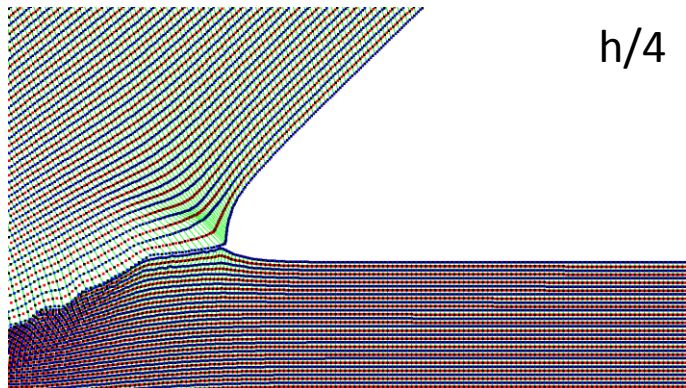
1. Угловые точки (движение сетки)
2. Середины ребер (задача «о распаде разрыва»)
3. Середины ячеек (законы сохранения)



h



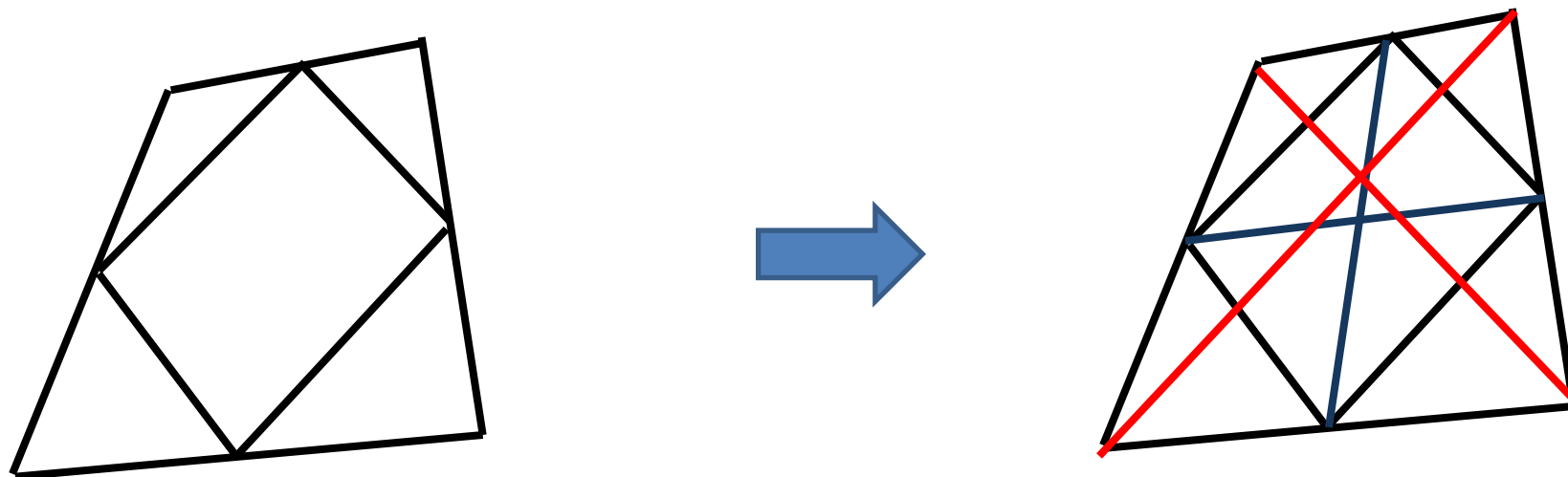
$h/2$



$h/4$

**Граница, по которой пластины
«сварились»,
на графиках не совпадают.
На этой границе расстояние между
соответствующими точками
верхней и нижней пластин
пропорционально шагу сетки!**

Расчет геометрических погрешностей сетки в двумерной задаче

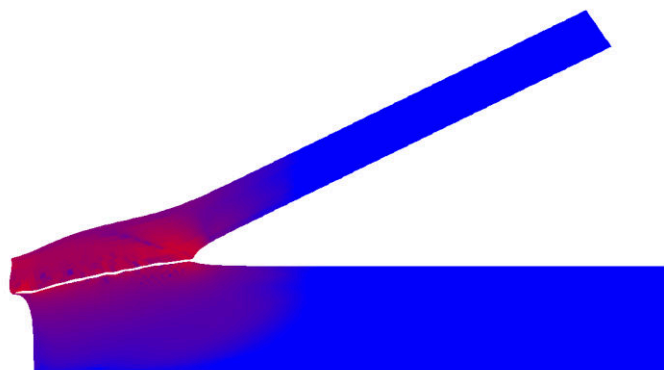


$$\frac{\rho_{\square} - \rho_{\diamond}}{h} \approx 10^{-8}$$

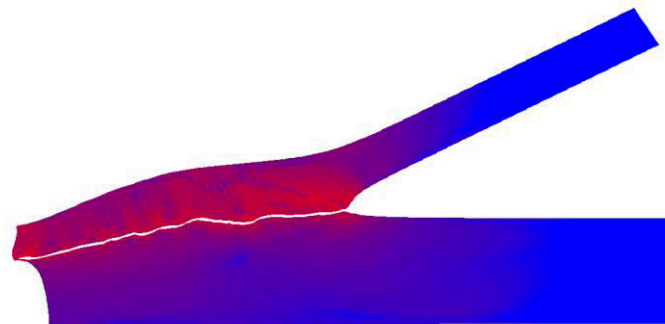
Осуществляется также контроль расстояния $\rho_{\square} - \rho_{\diamond}$ между «центрами» вписанного параллелограмма и основного четырехугольника.

Аналогичный подход можно осуществить в трехмерном случае

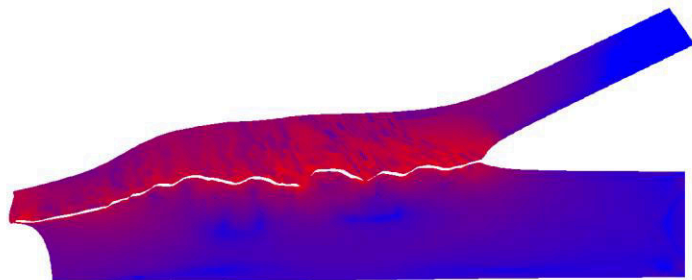
Расчет геометрических погрешностей сетки в двумерной задаче (расстояние между центрами)



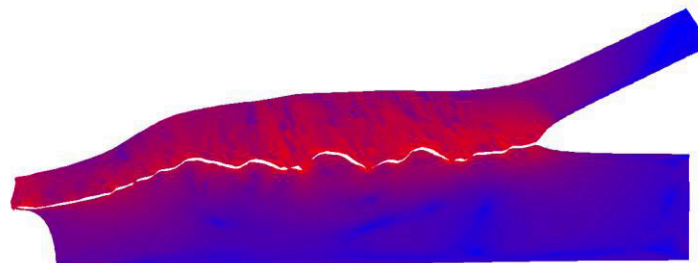
$t = 0.05$



$t = 0.1$



$t = 0.15$



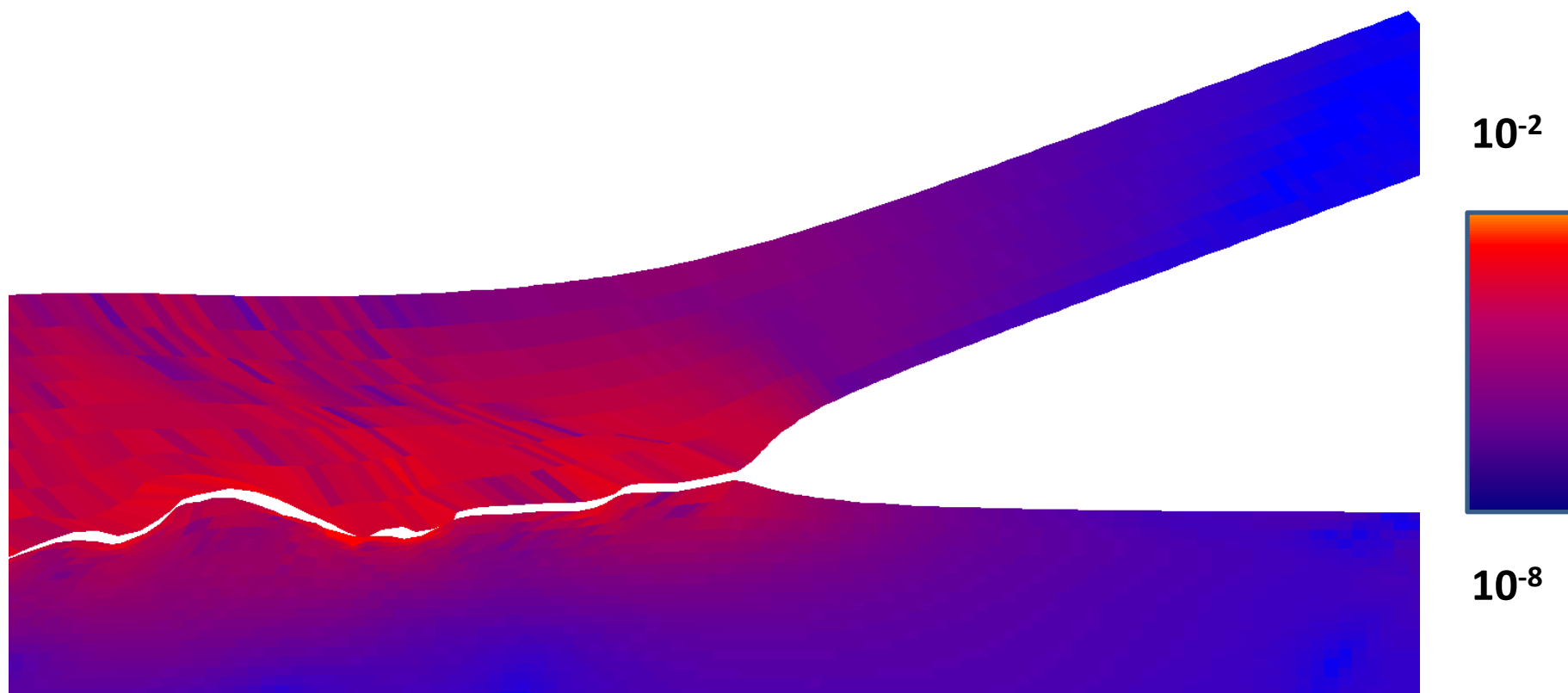
$t = 0.17$

10^{-2}

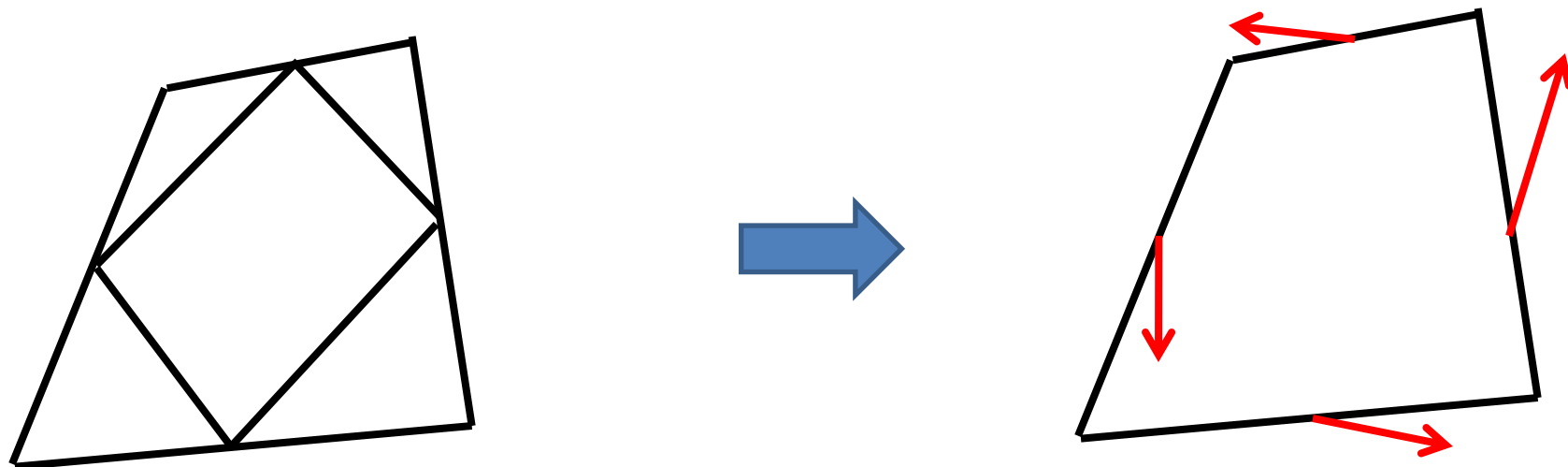


10^{-8}

Расчет геометрических погрешностей сетки в двумерной задаче (расстояние между центрами)



Расчет геометрических погрешностей сетки в двумерной задаче

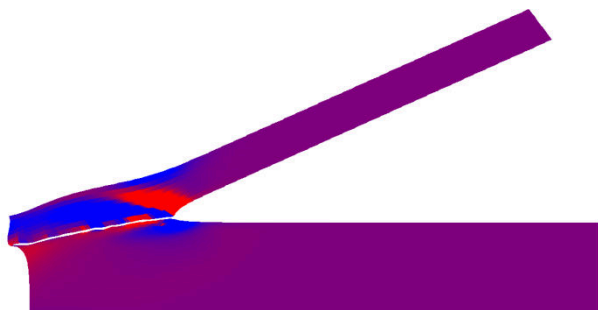


$$\left(\frac{\partial v^2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial U^2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial U^1}{\partial \xi^2} \right)$$

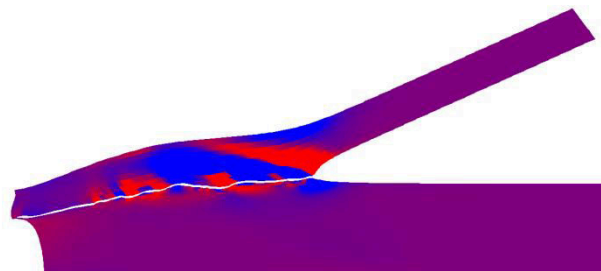
Осуществляется также контроль момента количества движения по угловым точкам и центрам ребер

Аналогичный подход можно осуществить в трехмерном случае

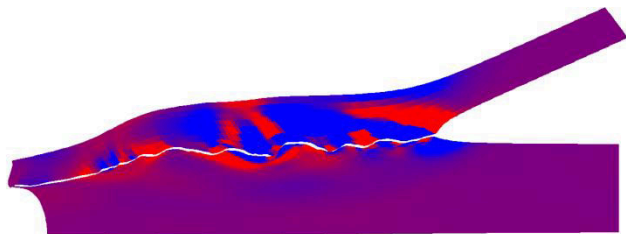
Расчет геометрических погрешностей сетки в двумерной задаче (момент количества движения)



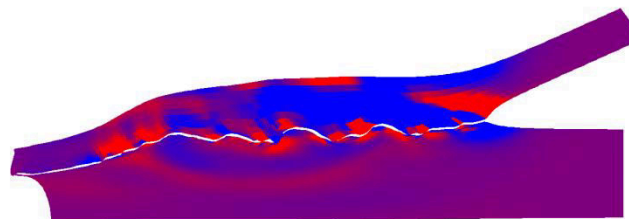
$t = 0.05$



$t = 0.1$



$t = 0.15$



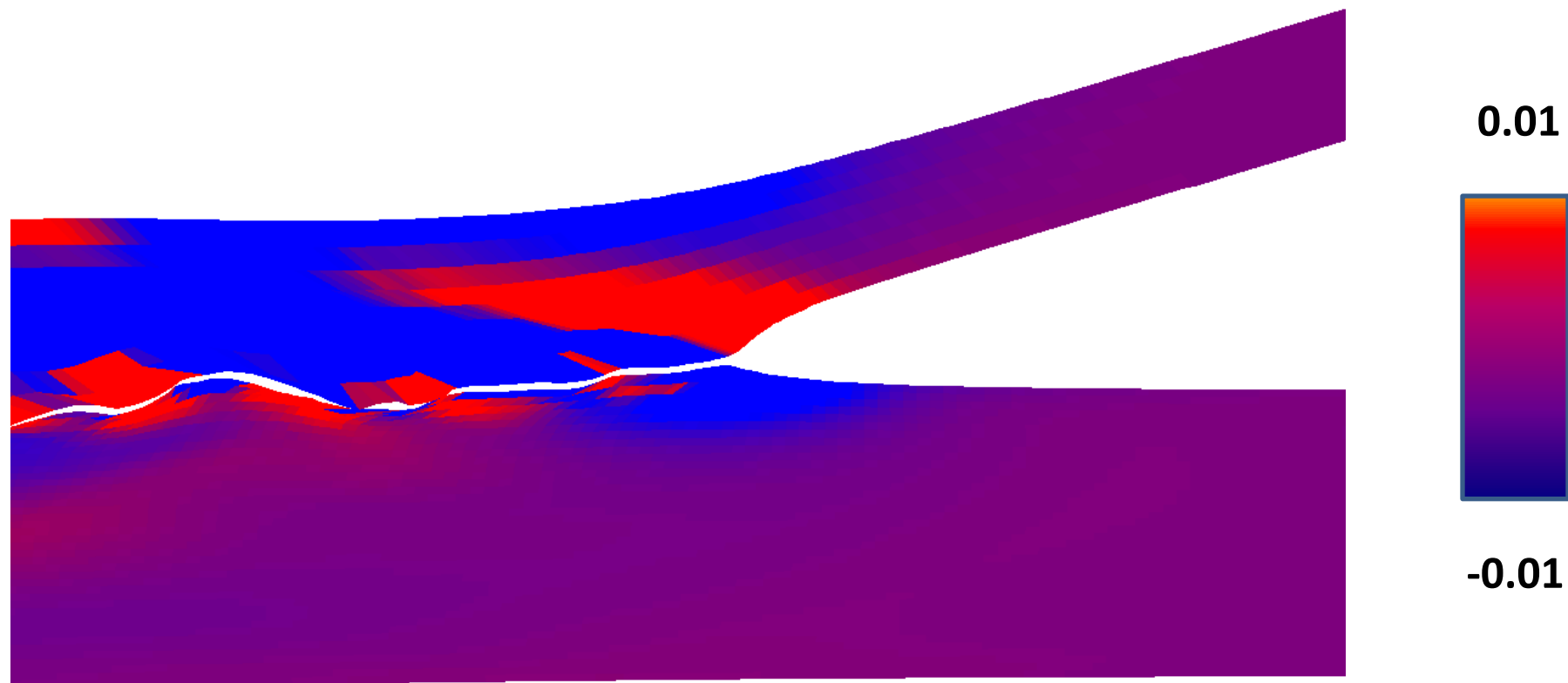
$t = 0.17$

0.01

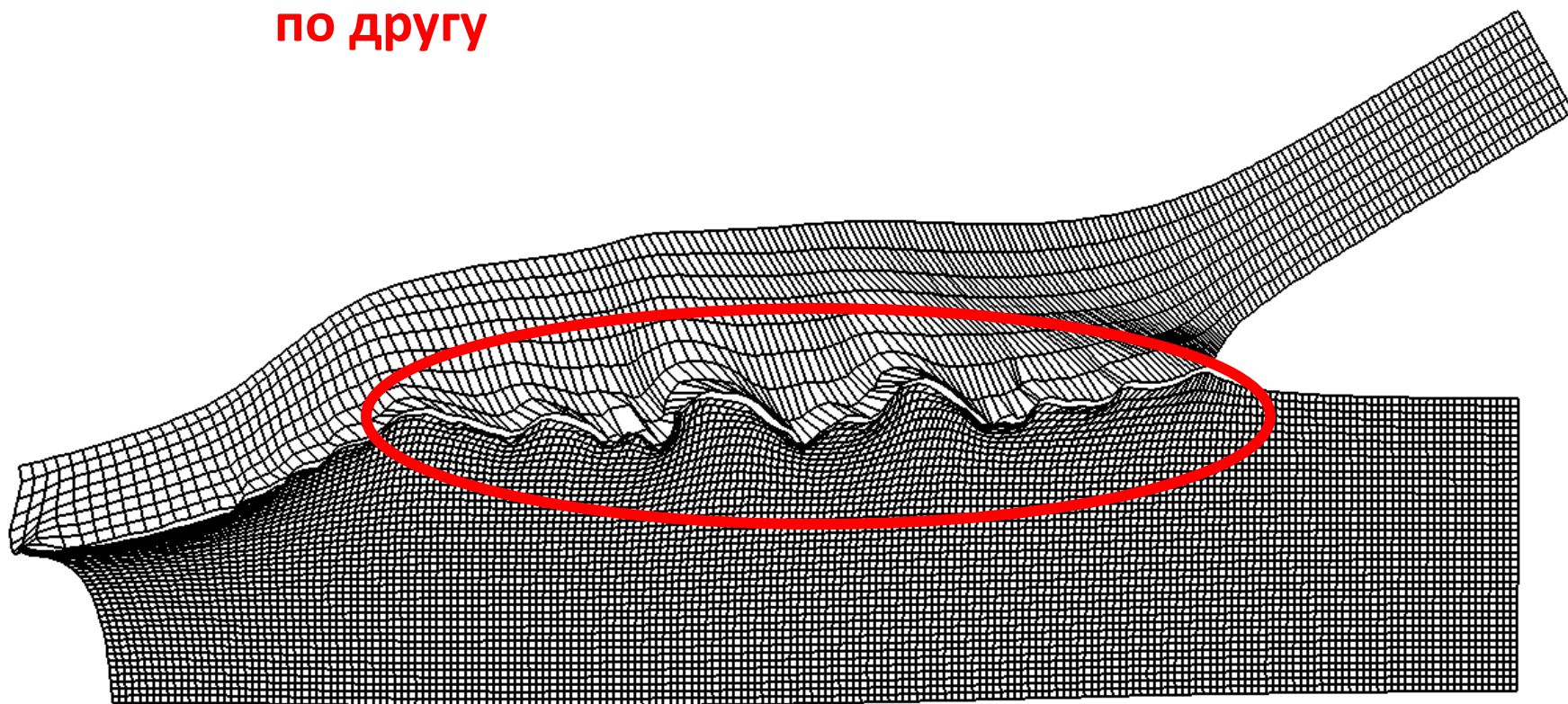


-0.01

Расчет геометрических погрешностей сетки в двумерной задаче (момент количества движения)

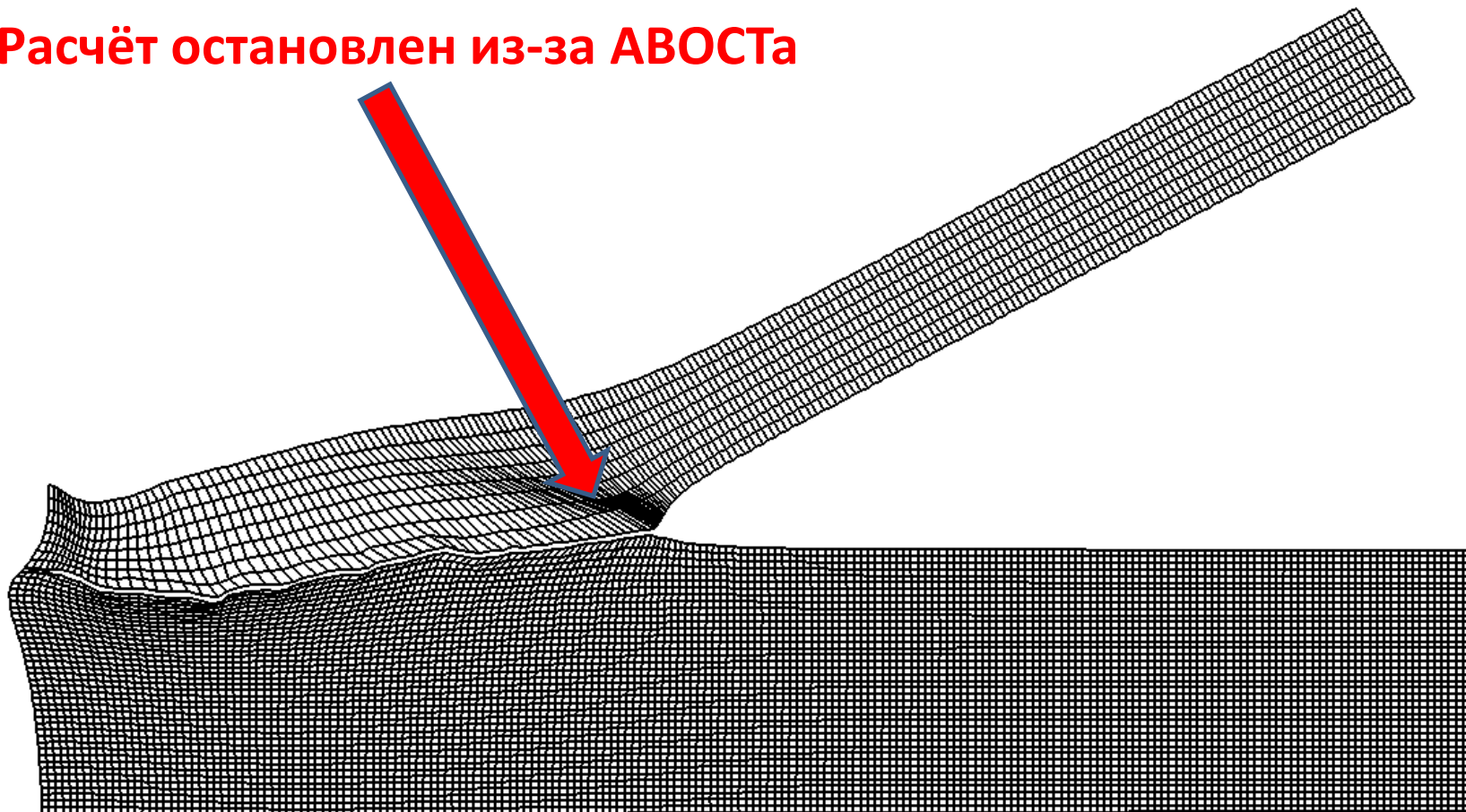


**Границы пластин могут
«проскальзывать» друг
по другу**



Волны при проскальзывании стали крупнее

Расчёт остановлен из-за АВОСТА



Проведение расчёта с ещё большим **мельчением** сетки позволило убедиться, что **опасная точка**, в которой отказывает расчётная модель, осталась **на том же месте**

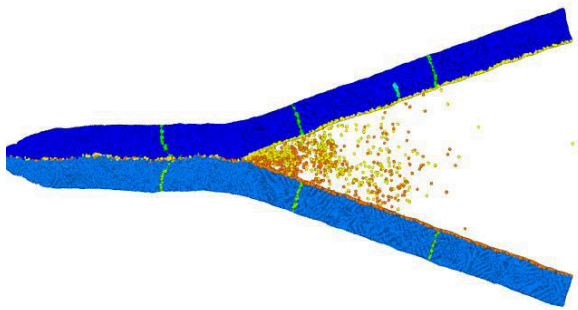
Причина «АВОСТА» - граница области применимости уравнения состояния

Модель молекулярной динамики

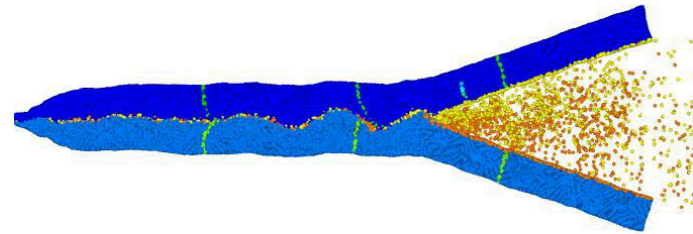
Волны при соударении алюминиевых пластин, ИТПМ СО РАН

В численном расчете длина волны $\lambda = 586 \text{ \AA}$, Расчет длины волны по формуле Кудинова $\lambda_K = 26\delta \sin^2(\gamma/2) = 624 \text{ \AA}$

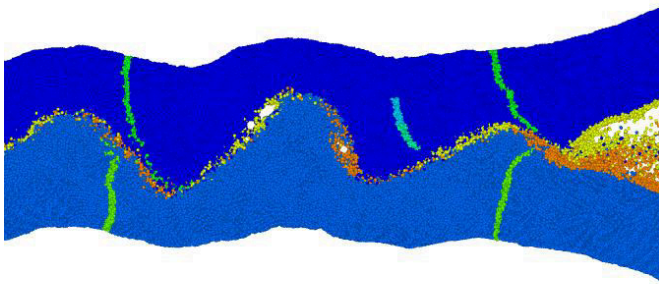
$t = 53 \text{ ps}$



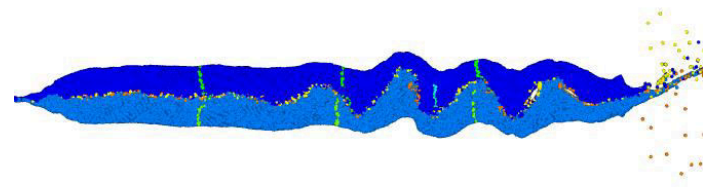
$t = 75 \text{ ps}$



$t = 90 \text{ ps}$



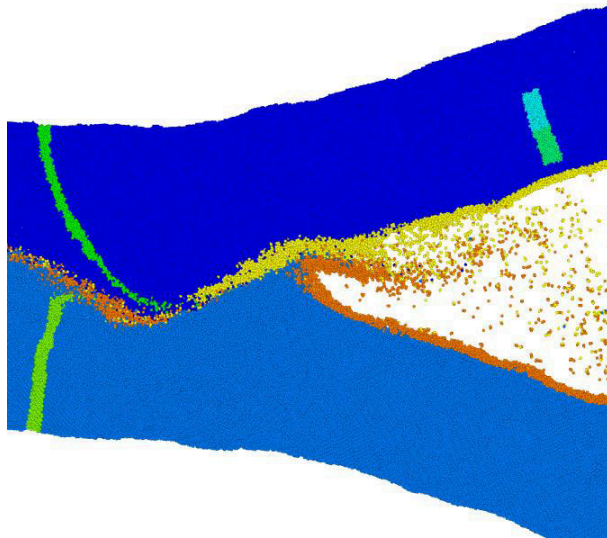
$t = 135 \text{ ps}$



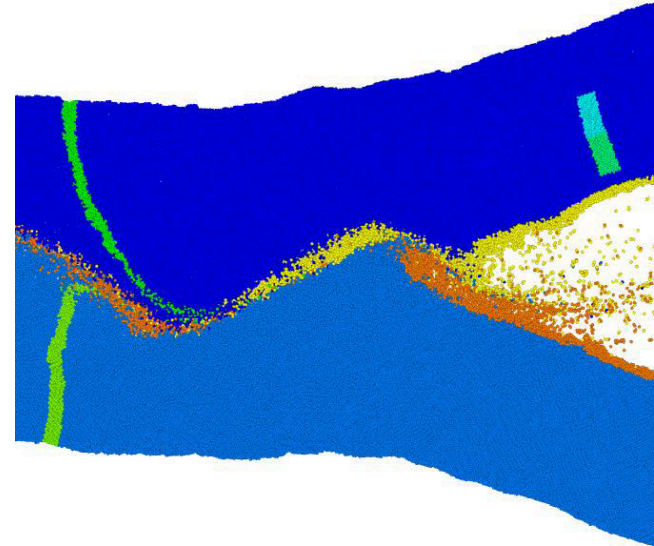
Модель молекулярной динамики

Волны при соударении алюминиевых пластин, ИТПМ СО РАН

$t = 71,5 \text{ ps}$



$t = 75 \text{ ps}$



Киселев, Мали, ФГВ, 2012, Т. 48, №2



Рентгеновский снимок во время
взрывного эксперимента
(ИГиЛ СО РАН)

Уравнение состояния в каноническом виде

Пусть имеется сингулярное разложение матрицы

$$D = CB = U \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} V$$

Для близкой матрицы допускается представление:

$$\tilde{D} = U \begin{pmatrix} k_1 + \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \gamma_1^3 \\ \gamma_2^1 & k_2 + \gamma_2^2 & \gamma_2^3 \\ \gamma_3^1 & \gamma_3^2 & k_3 + \gamma_3^3 \end{pmatrix} V = U (K + \Gamma) V$$

Можно доказать, что сингулярные числа для близкой матрицы имеют вид:

$$\tilde{k}_1 = k_1 + \gamma_1^1 + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^1)^2}{k_1 - k_2} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^1)^2}{k_1 + k_2} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^3 + \gamma_3^1)^2}{k_1 - k_3} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^3 - \gamma_3^1)^2}{k_1 + k_3} + \dots$$

$$\tilde{k}_2 = k_2 + \gamma_2^2 + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^1)^2}{k_2 - k_1} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^1)^2}{k_2 + k_1} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_2^3 + \gamma_3^2)^2}{k_2 - k_3} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_2^3 - \gamma_3^2)^2}{k_2 + k_3} + \dots$$

$$\tilde{k}_3 = k_3 + \gamma_3^3 + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^3 + \gamma_3^1)^2}{k_3 - k_1} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_1^3 - \gamma_3^1)^2}{k_3 + k_1} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_2^3 + \gamma_3^2)^2}{k_3 - k_2} + \frac{1}{4} \frac{(\gamma_2^3 - \gamma_3^2)^2}{k_3 + k_2} + \dots$$

Уравнение состояния в каноническом виде

Будем рассматривать уравнение состояния, зависящее от инвариантов:

$$E = E\left(\det D, tr DD^T, -\frac{1}{3} tr^2 \sqrt{DD^T}, tr \sqrt{DD^T}, S\right)$$

сделаем разложение в ряд

$$E(k_1 + \gamma_1^1, \gamma_1^2, \dots, k_3 + \gamma_3^3) = E(k_1, 0, \dots, k_3) + \sum_j \gamma_{jj} E_{k_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} E_{k_i k_j} \gamma_i^j \gamma_j^i + \\ \rho_0 \sum_{i \neq j} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} + \frac{1}{2} \frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} \right) (\gamma_i^j)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} - \frac{1}{2} \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} \right) \gamma_i^j \gamma_j^i + \left(\frac{1}{2} \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} + \frac{1}{2} \frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} \right) (\gamma_j^i)^2 \right] + \dots$$

Выделенные **красным цветом** элементы и накладывают ограничения на положительную определенность квадратичной формы и, как следствие, всего уравнения состояния.

$$\frac{E_{k_i} - E_{k_j}}{k_i - k_j} \geq 0 \quad \frac{E_{k_i} + E_{k_j}}{k_i + k_j} \geq 0 \quad E_{k_i k_j} \geq 0$$

Уравнение состояния в каноническом виде

Рассмотрим разложение инвариантов по отдельности

$$\begin{aligned} \text{tr}\left(\sqrt{\tilde{D}\tilde{D}^T}\right) &= \text{tr}\left(\tilde{U}\tilde{K}\tilde{U}^T\right) = \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3 = \\ &= k_1 + k_2 + k_3 + \gamma_1^1 + \gamma_2^2 + \gamma_3^3 + \frac{1}{2} \frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^1)^2}{k_1 + k_2} + \frac{1}{2} \frac{(\gamma_2^3 - \gamma_3^2)^2}{k_2 + k_3} + \frac{1}{2} \frac{(\gamma_1^3 - \gamma_3^1)^2}{k_1 + k_3} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\text{tr}\left(\sqrt{\tilde{D}\tilde{D}^T}\right)\right)^2 &= (k_1 + k_2 + k_3)^2 + 2(\gamma_1^1 + \gamma_2^2 + \gamma_3^3)(k_1 + k_2 + k_3) + \\ &+ (k_1 + k_2 + k_3) \left(\frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^1)^2}{k_1 + k_2} + \frac{(\gamma_2^3 - \gamma_3^2)^2}{k_2 + k_3} + \frac{(\gamma_1^3 - \gamma_3^1)^2}{k_1 + k_3} \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}\tilde{D}\tilde{D}^T &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_1\gamma_1^1 + 2k_2\gamma_2^2 + 2k_3\gamma_3^3 + \\ &+ \left((\gamma_1^1)^2 + (\gamma_1^2)^2 + (\gamma_1^3)^2 + (\gamma_2^1)^2 + (\gamma_2^2)^2 + (\gamma_2^3)^2 + (\gamma_3^1)^2 + (\gamma_3^2)^2 + (\gamma_3^3)^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{tr}[\tilde{D}\tilde{D}^T] - \frac{1}{3} \left(\operatorname{tr} \sqrt{\tilde{D}\tilde{D}^T} \right)^2 = \frac{2}{3} [k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_1 k_2 - k_1 k_3 - k_2 k_3] + \\
 & \frac{2}{3} [(2k_1 - k_2 - k_3)\gamma_1^1 + (2k_2 - k_1 - k_3)\gamma_2^2 + (2k_3 - k_1 - k_2)\gamma_3^3] - \\
 & \frac{1}{3} [(\gamma_1^1)^2 + (\gamma_2^2)^2 + (\gamma_3^3)^2 + 2\gamma_1^1 \gamma_2^2 + 2\gamma_1^1 \gamma_3^3 + 2\gamma_2^2 \gamma_3^3] - \\
 & \frac{1}{3} (k_1 + k_2 + k_3) \left[\frac{(\gamma_1^2)^2 - 2\gamma_1^2 \gamma_2^1 + (\gamma_2^1)^2}{k_1 + k_2} + \frac{(\gamma_2^3)^2 - 2\gamma_2^3 \gamma_3^2 + (\gamma_3^2)^2}{k_2 + k_3} + \frac{(\gamma_3^1)^2 - 2\gamma_3^1 \gamma_1^3 + (\gamma_1^3)^2}{k_1 + k_3} \right] + \\
 & \left((\gamma_1^1)^2 + (\gamma_1^2)^2 + (\gamma_1^3)^2 + (\gamma_2^1)^2 + (\gamma_2^2)^2 + (\gamma_2^3)^2 + (\gamma_3^1)^2 + (\gamma_3^2)^2 + (\gamma_3^3)^2 \right) + \dots
 \end{aligned}$$

$$\det \tilde{D} = \begin{vmatrix} k_1 + \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \gamma_1^3 \\ \gamma_2^1 & k_2 + \gamma_2^2 & \gamma_2^3 \\ \gamma_3^1 & \gamma_3^2 & k_3 + \gamma_3^3 \end{vmatrix} = k_1 k_2 k_3 + (k_1 k_2 \gamma_3^3 + k_1 k_3 \gamma_2^2 + k_2 k_3 \gamma_1^1) +$$

$$\left[k_1 (\gamma_2^2 \gamma_3^3 - \gamma_2^3 \gamma_3^2) + k_2 (\gamma_1^1 \gamma_3^3 - \gamma_1^3 \gamma_3^1) + k_3 (\gamma_1^1 \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \gamma_2^1) \right] + \dots$$

Уравнение состояния в каноническом виде

Для произвольной функции от определителя имеет место:

$$\begin{aligned} F(\det \tilde{D}) &= F(\det D) + F'(\det D) \left[(k_1 k_2 \gamma_3^3 + k_1 k_3 \gamma_2^2 + k_2 k_3 \gamma_1^1) + \right. \\ &\quad \left. [k_1 (\gamma_2^2 \gamma_3^3 - \gamma_2^3 \gamma_3^2) + k_2 (\gamma_1^1 \gamma_3^3 - \gamma_1^3 \gamma_3^1) + k_3 (\gamma_1^1 \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \gamma_2^1)] \right] + \\ &\quad F''(\det D) \left[(k_1 k_2 \gamma_3^3 + k_1 k_3 \gamma_2^2 + k_2 k_3 \gamma_1^1)^2 \right] \end{aligned}$$

Для примера будем рассматривать два варианта такой функции:

$F_1(\det D) = \frac{\rho_0 c_0^2 \sigma(S)}{\gamma(\gamma-1)} (\det D)^{-(\gamma-1)} + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \det D$	$F_2(\det D) = \frac{\rho_0 c_0^2 \sigma(S)}{\gamma(\gamma-1)} (\det D)^{-(\gamma-1)}$
$F_1'(\det D) = -\frac{\rho_0 c_0^2 \sigma(S)}{\gamma} (\det D)^{-\gamma} + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}$	$F_2'(\det D) = -\frac{\rho_0 c_0^2 \sigma(S)}{\gamma} (\det D)^{-\gamma}$
$F_1''(\det D) = \rho_0 c_0^2 \sigma(S) (\det D)^{-(\gamma+1)}$	$F_2''(\det D) = \rho_0 c_0^2 \sigma(S) (\det D)^{-(\gamma+1)}$

Уравнение состояния в каноническом виде

Рассмотрим уравнение состояния вида (используемой сейчас в расчетах):

$$\rho_0 E(\tilde{D}) = \underbrace{\frac{\rho_0 c_0^2 \sigma(S)}{\gamma(\gamma-1)} (\det \tilde{D})^{-(\gamma-1)} + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \det \tilde{D}}_{F_1(\det \tilde{D})} + \rho_0 c_1^2 \left[\operatorname{tr}(\tilde{D} \tilde{D}^T) - \frac{1}{3} \left(\operatorname{tr} \sqrt{\tilde{D} \tilde{D}^T} \right)^2 \right]$$

Условие положительной определенности квадратичной формы имеет вид:

$$\max_i \left(\frac{1 - \frac{2c_1^2 \gamma}{c_0^2 k_i}}{(k_1 k_2 k_3)^{-\gamma}} \right) < \sigma(S) < \min_i \left(\frac{1 + \frac{2c_1^2 \gamma}{3c_0^2 k_i} \left[1 - \frac{2k_i}{k_j + k_l} \right]}{(k_1 k_2 k_3)^{-\gamma}} \right)$$

Уравнение состояния в каноническом виде

Рассмотрим другое уравнение состояния :

$$\rho_0 E(\tilde{D}) = \underbrace{\frac{\rho_0 c_0^2 \sigma(S)}{\gamma(\gamma-1)} (\det \tilde{D})^{-(\gamma-1)}}_{F_2(\det \tilde{D})} + \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \frac{\text{tr} \sqrt{\tilde{D} \tilde{D}^T}}{3} + \rho_0 c_1^2 \left[\text{tr}(\tilde{D} \tilde{D}^T) - \frac{1}{3} \left(\text{tr} \sqrt{\tilde{D} \tilde{D}^T} \right)^2 \right]$$

Условие положительной определенности квадратичной формы имеет вид:

$$0 < \sigma(S) < \min_i \left(\frac{\frac{2}{3k_i(k_j + k_l)} + \frac{2c_1^2 \gamma}{3c_0^2 k_i} \left[1 - \frac{2k_i}{k_j + k_l} \right]}{(k_1 k_2 k_3)^{-\gamma}} \right)$$

В изотропной среде: $D_j^i = C_k^i B_j^k$ $V = \det(D)$ - удельный объём

$\sqrt{DD^T} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sqrt{DD^T}) I$ - девиатор деформации (3x3 матрица с нулевым следом)

$D \rightarrow \Omega D \Omega^T, \quad \Omega \Omega^T = I$ (вращение системы координат)

$$\begin{aligned} \sqrt{DD^T} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sqrt{DD^T}) I = & A_{-2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + \\ & A_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_1 \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2)^T$ - вектор, преобразующийся при вращениях Ω по **представлению веса 2**

$$\text{tr} \left[\sqrt{DD^T} - \frac{1}{3} \text{tr}(\sqrt{DD^T}) I \right]^2 = A_{-2}^2 + A_{-1}^2 + A_0^2 + A_1^2 + A_2^2$$

Уравнение состояния для среды, в которой существуют выделенные направления
(например для кристаллов)

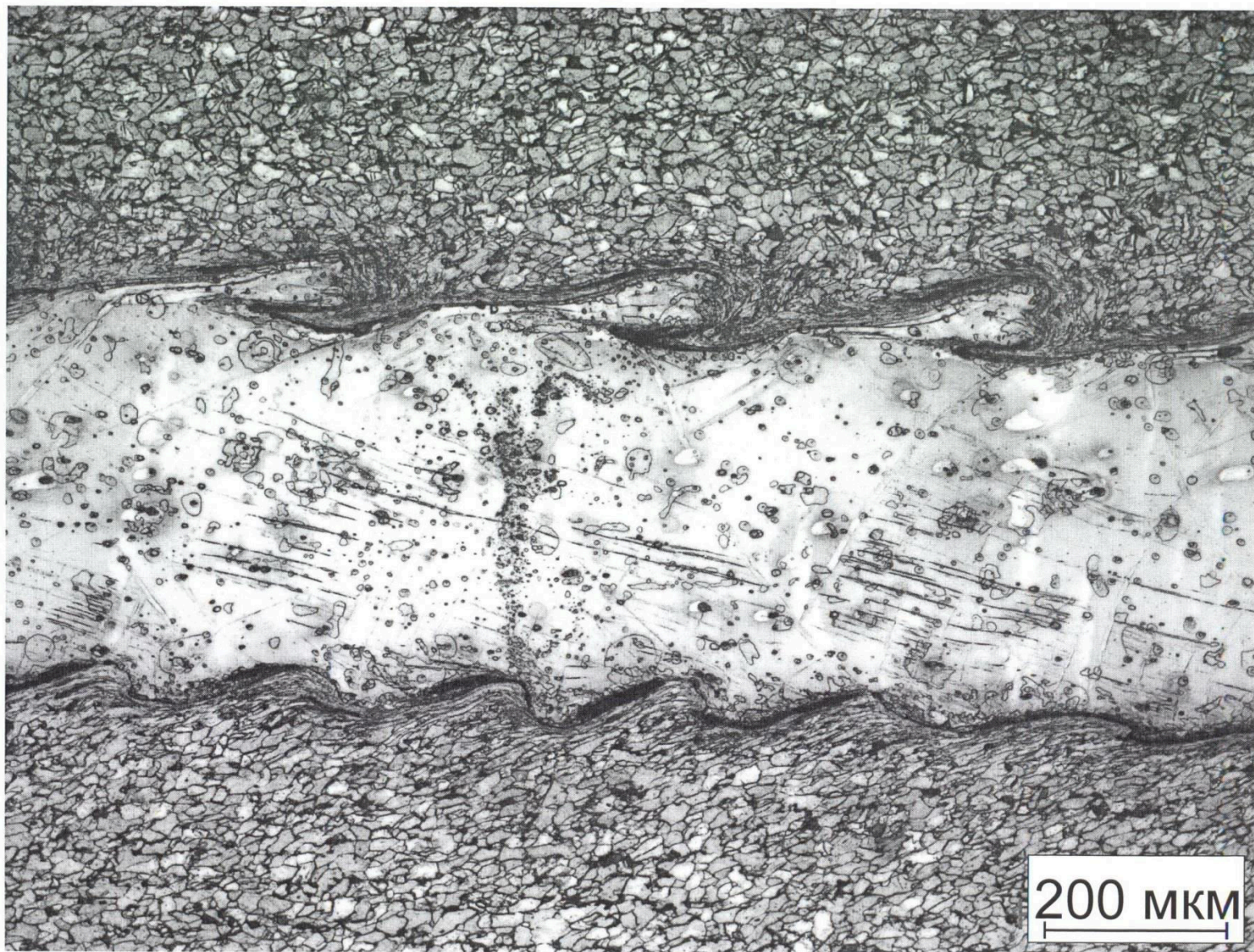
$$E = E \left(\det D, \sum_{j=-2}^2 A_j^2, \sum_{j=-2}^2 a_j G_{2[2,0]}^{j[k,0]} A_k, \sum_{j=-2}^2 b_j G_{2[2,2]}^{j[k,l]} A_k A_l, \sum_{j=-4}^4 d_j G_{4[2,2]}^{j[k,l]} A_k A_l, S \right)$$

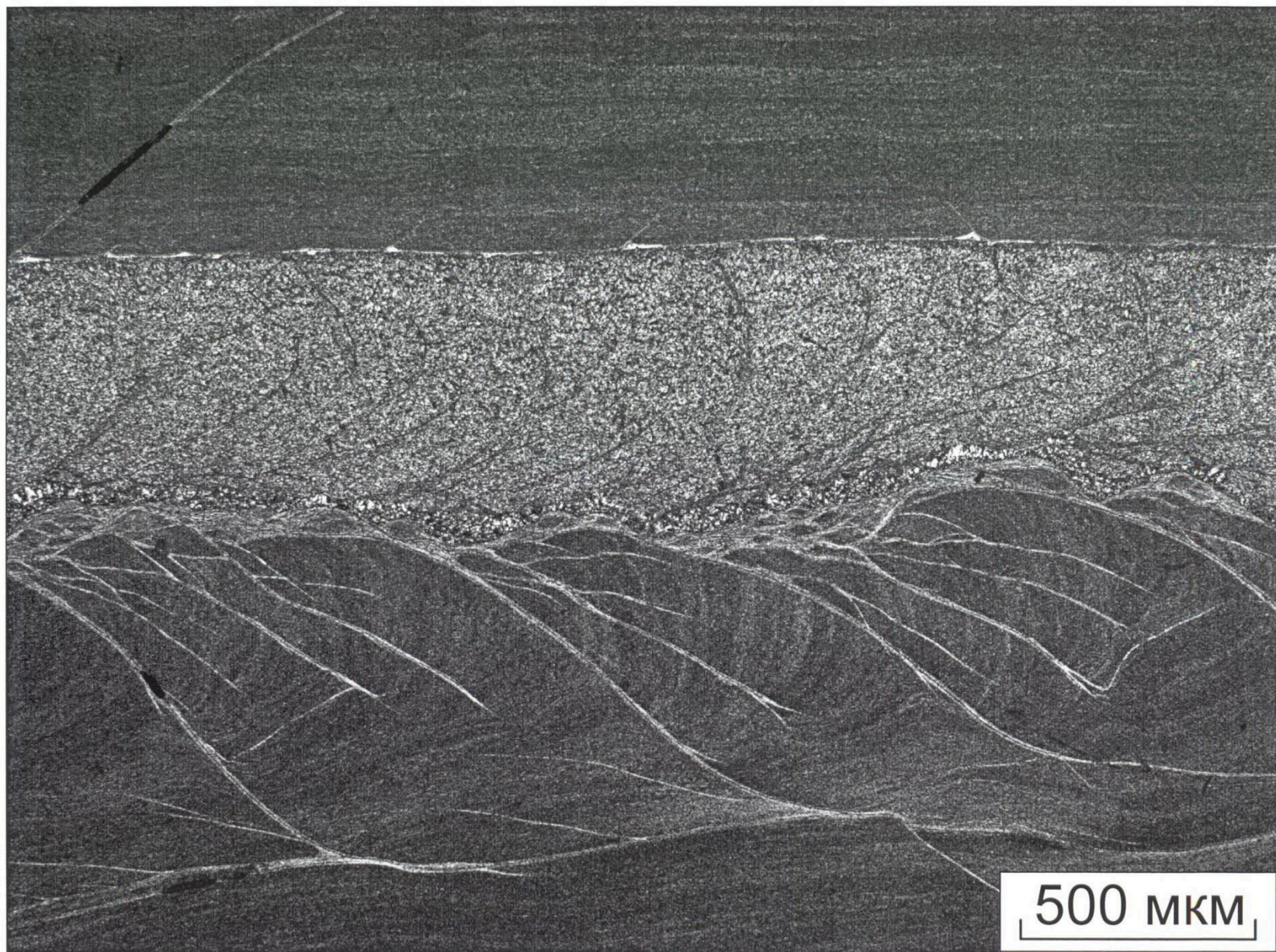
С.В. Селивановой указаны такие значения ненулевых коэффициентов a_j, b_j, d_j при которых в такой форме описываются кристаллы семи классических сингоний.

Вопрос: каковы условия выпуклости для таких уравнений состояния?

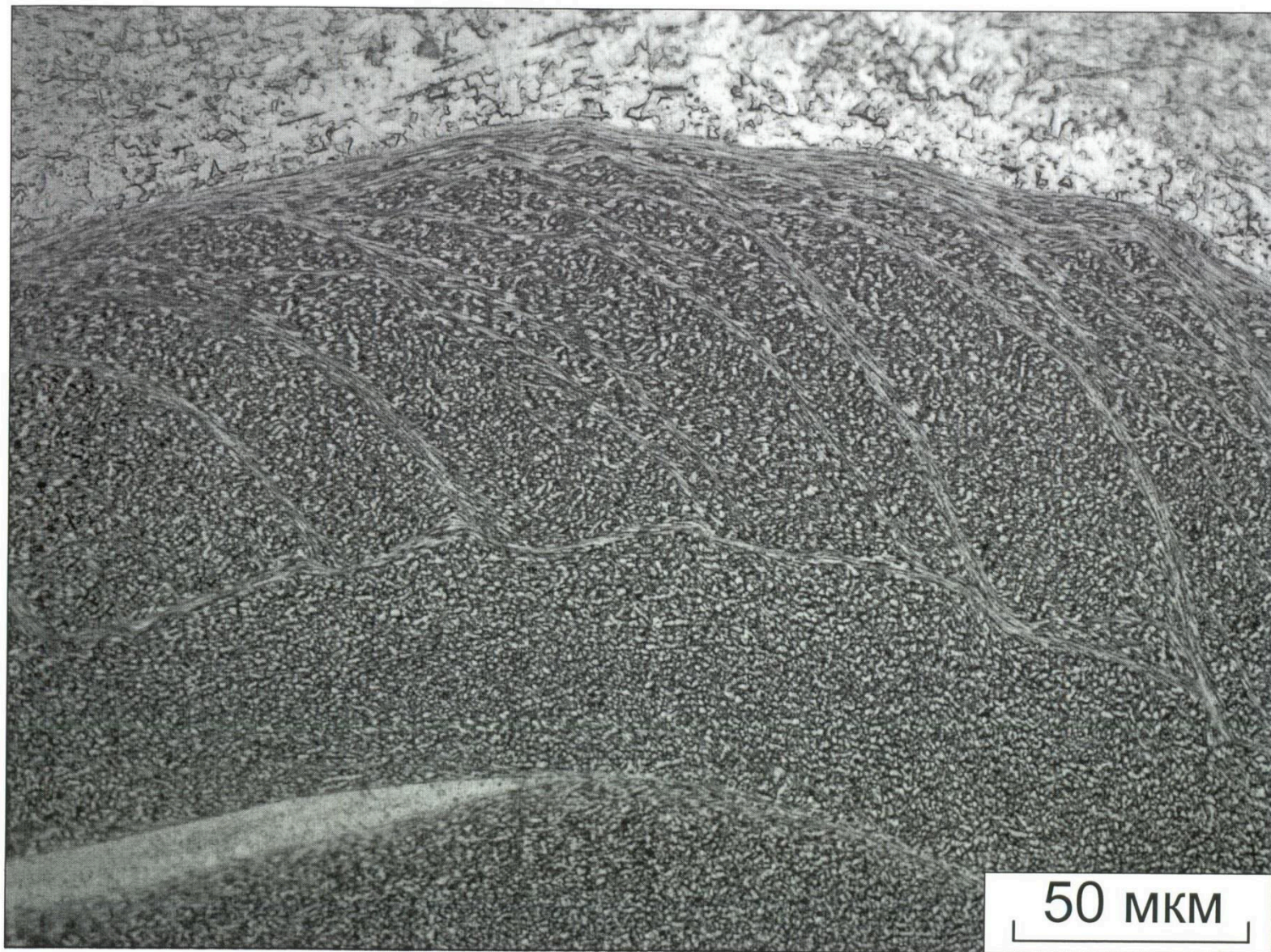
Далее приводятся фотографии отшлифованных срезов пластин после взрывной сварки (при большом увеличении).

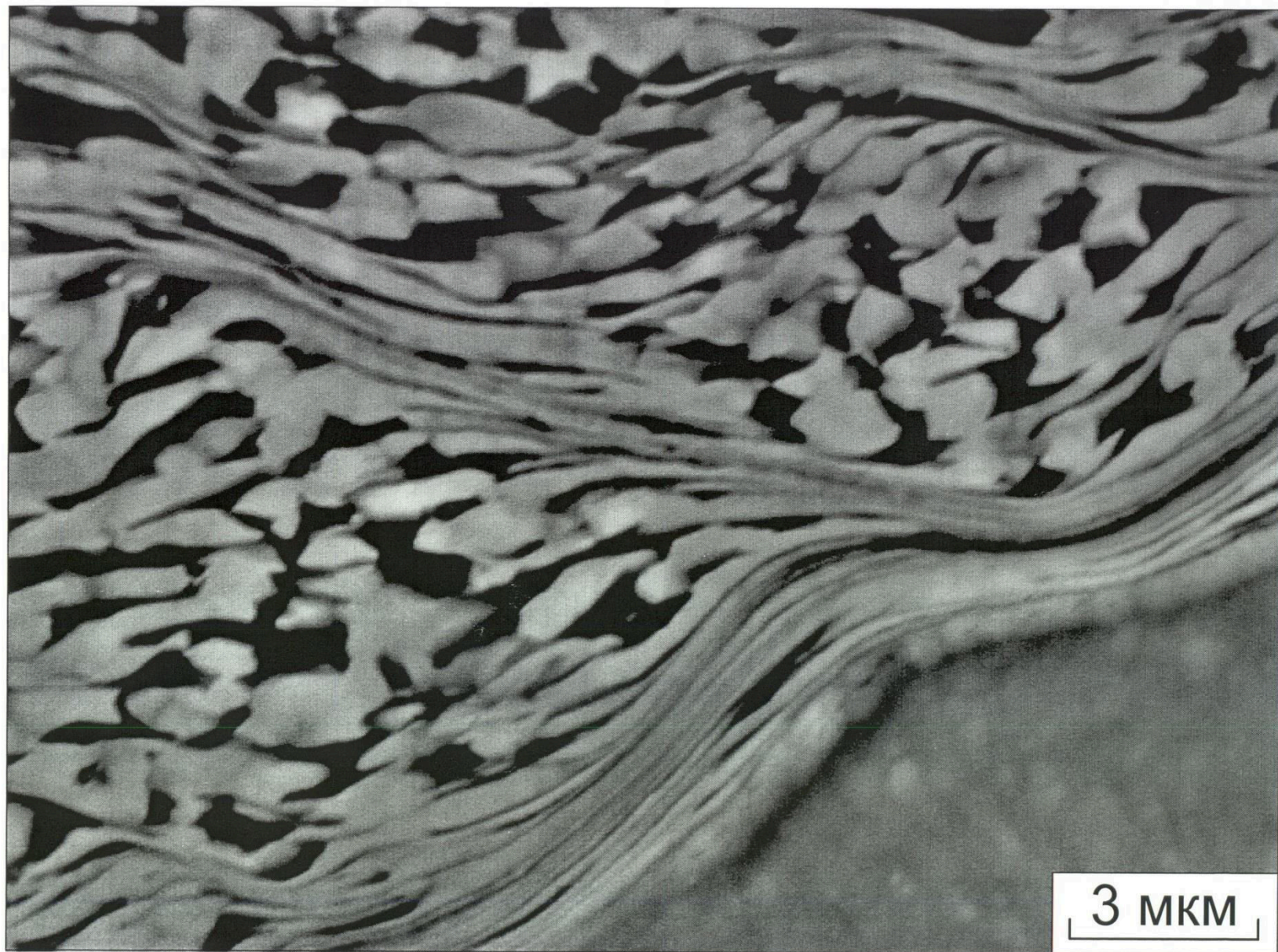
*Образцы Институт Гидродинамики СО РАН
Фотографии НГТУ*



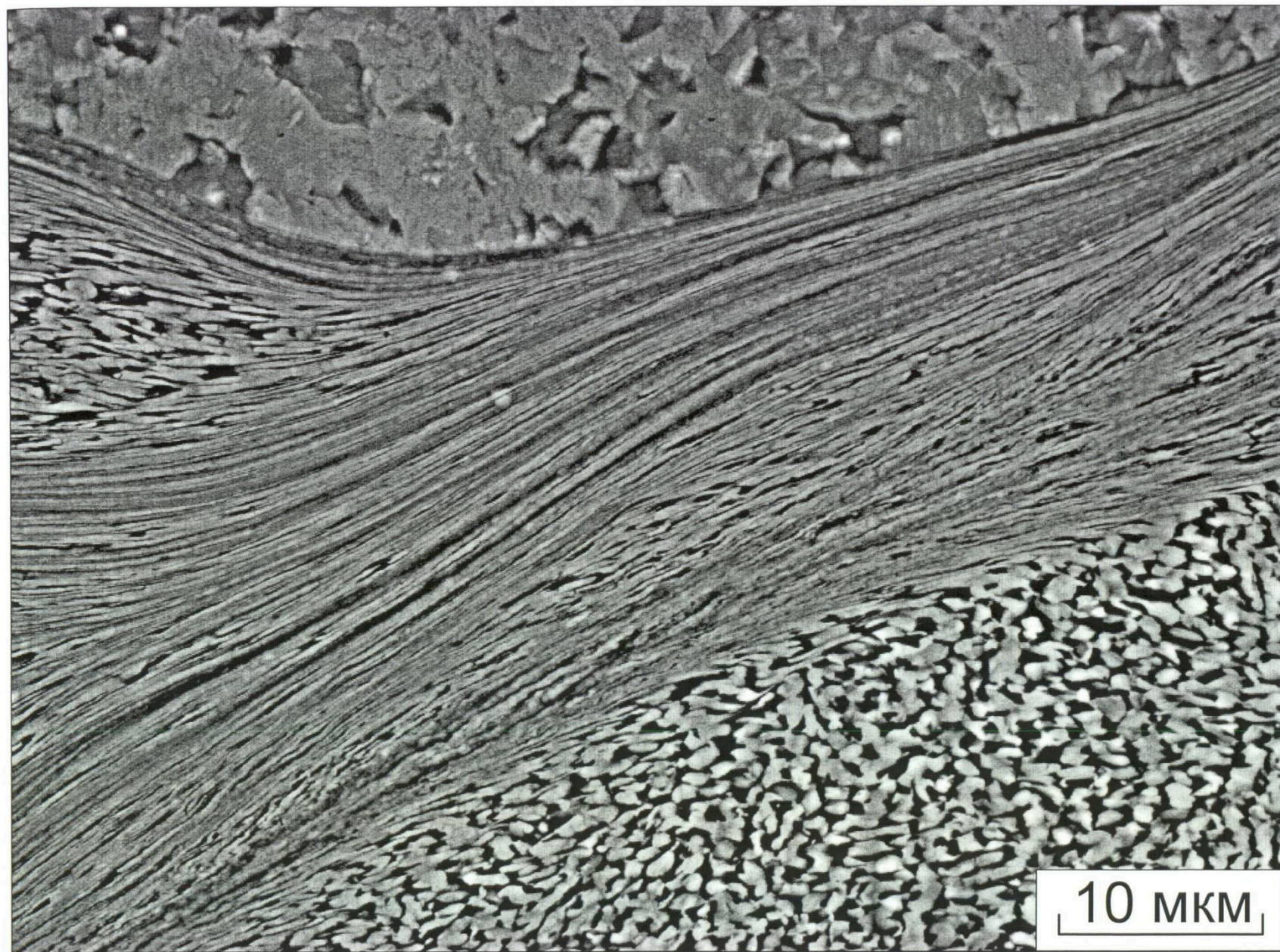


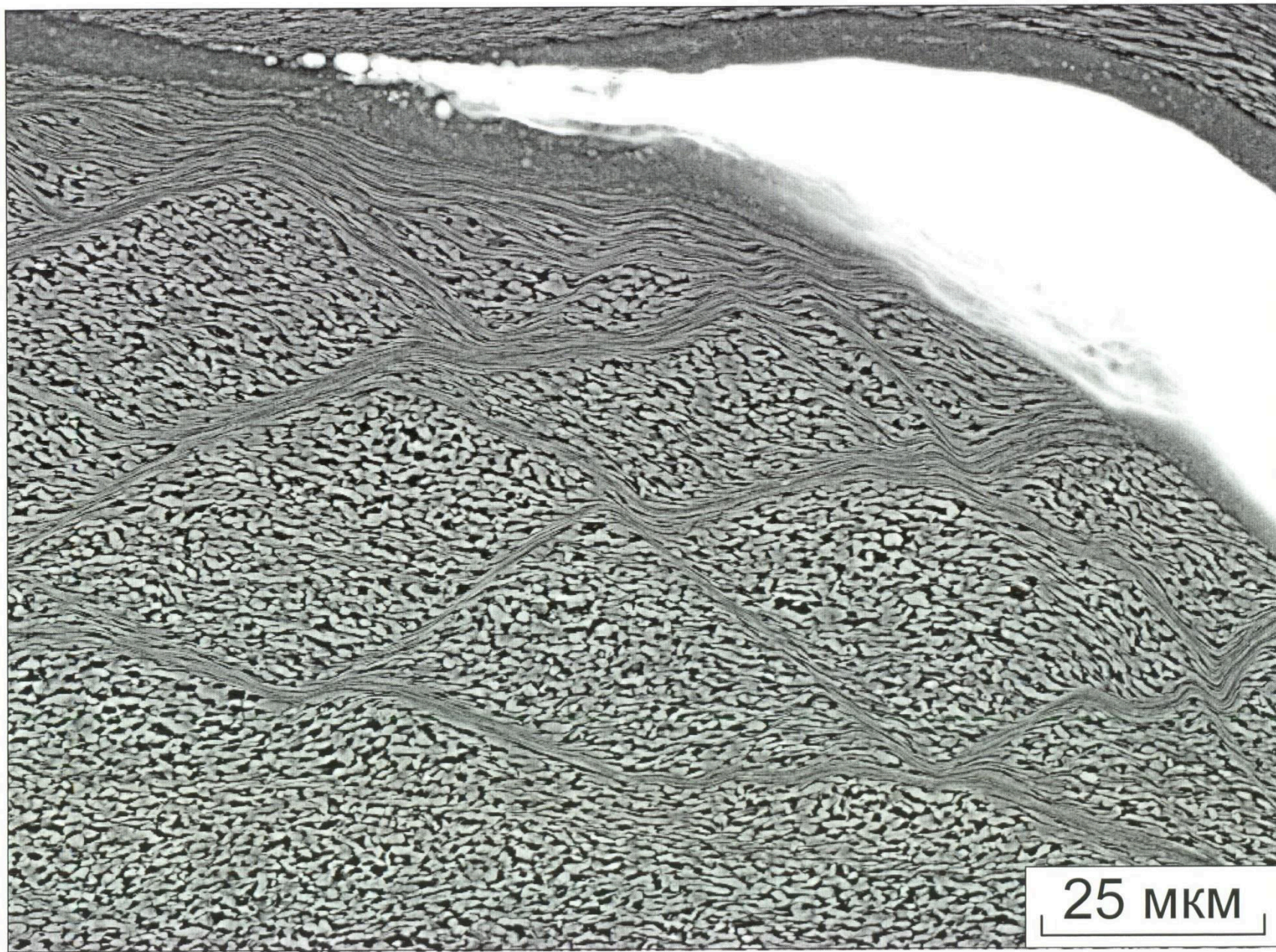
500 MKM





3 MKM





25 MKM

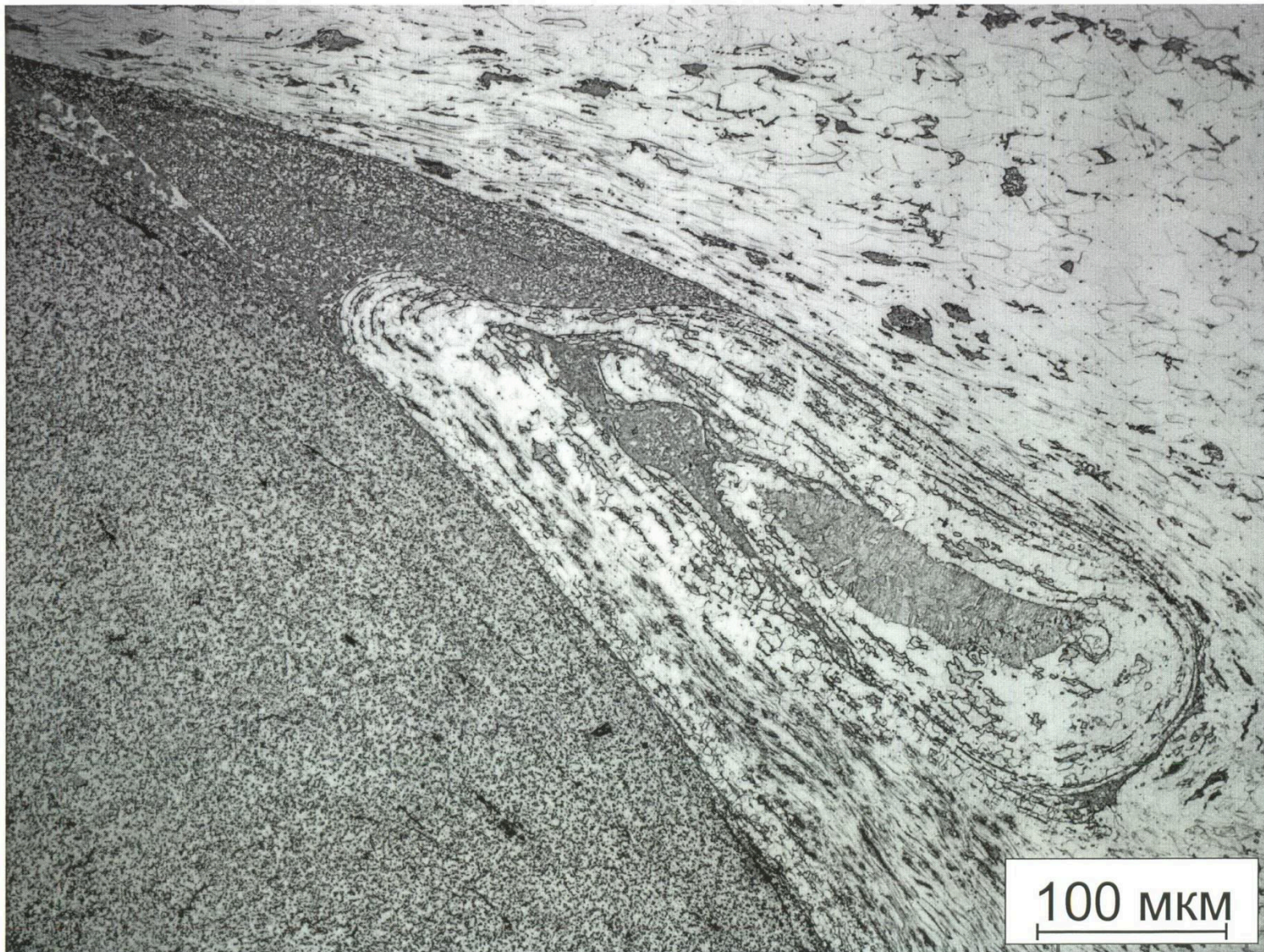


Рис. 4.13. Вихри, образующиеся в процессе сварки взрывом стали 20 и стали 60Г.

Спасибо за внимание!