ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л.СОБОЛЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

БАЗАЙКИН ЯРОСЛАВ ВЛАДИМИРОВИЧ

НЕКОМПАКТНЫЕ РИМАНОВЫ И ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ГРУППАМИ ГОЛОНОМИИ

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н. И. А. Тайманов

Новосибирск — 2009

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена исследованию геометрических и топологических свойств римановых и лоренцевых многообразий со специальными группами голономии.

Первое упоминание о *голономии* (а именно, использование термина «голономные» и «неголономные» связи в классической механике) датируется 1895 годом и принадлежит Герцу [59, 82]. В математических работах понятие голономии впервые возникло в 1923 году у Э. Картана [42, 43, 45] применительно к римановым многообразиям, и уже имело современный смысл. Кратко говоря, группа голономии $\mathrm{Hol}(M) \subset O(n)$ риманова многообразия M^n порождается операторами параллельных переносов относительно связности Леви — Чивита вдоль путей, начинающихся и заканчивающихся в фиксированной точке $p \in M$. Если рассмотреть только стягиваемые петли, то мы получим ограниченную группу голономии $\mathrm{Hol}^0(M)$, которая является связной компонентой единицы в группе $\mathrm{Hol}(M)$. Везде в диссертации многообразия предполагаются односвязными, и поэтому $\mathrm{Hol}(M) = \mathrm{Hol}^0(M)$. Интуитивно ясно, что если $\mathrm{Hol}(M)$ не будет совпадать с максимально возможной группой изометрий $SO(n)$ касательного пространства T_pM, то это должно свидетельствовать о наличии ограничений на геометрию риманова многообразия. И действительно, каждой специальной группе голономии отвечает та или иная специальная геометрия.

Глобальный характер группы голономии риманова многообразия подчеркивается теоремой де Рама о разложении. А именно, очевидно, что если риманово многообразие M является прямым произведением римановых многообразий M_1 и M_2, то $\mathrm{Hol}(M) = \mathrm{Hol}(M_1) \times \mathrm{Hol}(M_2)$ (вместе с соответствующим разложением представления группы голономии). Оказывается, что в случае, если риманово многообразие полно, то верно обратное (более точная формулировка теоремы разложения де Рама приведена в главе 1, теорема 1.2.):

Теорема [77] («теорема де Рама о разложении»). *Пусть M — полное риманово многообразие группа голономии которого G является произведением двух групп G_1 и G_2, а представление голономии группы G раскладывается в сумму представлений G_1 и G_2. Тогда M изометрично прямому произведению двух римановых пространств M_1 и M_2, где $Hol(M_1) = G_1$ и $Hol(M_2) = G_2$, а представления групп G_1 и G_2 совпадают с представлениями голономии M_1 и M_2.*

Естественным образом возникает задача классификации римановых групп голономии: *какие группы могут быть группами голономии риманова многообразия?*

При решении этой задачи можно сразу ограничиться полными неприводимыми римановыми многообразиями, т.е. такими, представление голономии которых не обладает инвариантными подпространствами в T_pM. В силу теоремы разложения де Рама такие многообразия не раскладываются в прямое произведение, и обратно, любое полное риманово многообразие раскладывается в произведение неприводимых.

Важный пример римановых многообразий со специальными группами голономии дают симметрические пространства:

Теорема [45]. *Пусть M^n — симметрическое пространство и G — группа Ли изометрий M, порожденная всеми отражениями, переворачивающими геодезические. Предположим, что $H \subset G$ — группа изотропии M, относительно выбранной точки. Тогда $M = G/H$, и группа голономии $Hol(M)$ совпадает с H, а представление голономии совпада-*

ет с представлением изотропии.

Картаном [44] задача описания односвязных римановых симметрических пространств была сведена к теории групп Ли, и им был получен список всех таких пространств. Доказательство Картана и полный список односвязных римановых симметрических пространств обсуждается в [23, 14].

Следующее важное продвижение в задаче классификации было сделано Берже:

Теорема [31]. *Пусть M — односвязное неприводимое риманово многообразие размерности n, не являющееся симметрическим. Тогда имеет место один из следующих случаев.*

1) $Hol(M) = SO(n)$ — *общий случай,*
2) $n = 2m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = U(m) \subset SO(2m)$ — *кэлеровы многообразия,*
3) $n = 2m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = SU(m) \subset SO(2m)$ — *специальные кэлеровы многообразия,*
4) $n = 4m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = Sp(m) \subset SO(4m)$ — *гиперкэлеровы многообразия,*
5) $n = 4m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = Sp(m)Sp(1) \subset SO(4m)$ — *кватернионно-кэлеровы многообразия,*
6) $n = 7$ *и* $Hol(M) = G_2 \subset SO(7)$,
7) $n = 8$ *и* $Hol(M) = Spin(7) \subset SO(8)$.

В оригинальном списке Берже присутствовал также случай $n = 16$ и $\mathrm{Hol}(M) = Spin(9) \subset SO(16)$. Однако в [1, 37] было доказано что в этом случае M является симметрическим и изометрично проективной плоскости Кэли $\mathbb{C}aP^2 = Spin(9)/Spin(7)$.

Таким образом, для решения задачи классификации нужно понять какие из групп списка Берже могут быть реализованы как группы голономии полных римановых многообразий. При этом возникают два аспекта задачи классификации: доказательство того, что группа Берже реализуется как группа голономии (неполной) локально определенной римановой метрики; нахождение полной римановой метрики с данной группой голономии. Вторая задача, особенно в случае построения римановой метрики на замкнутом многообразии является существенно более трудной. С другой стороны, построение полной метрики кажется разумным требованием, в силу глобального характера группы голономии (нельзя потенциально исключить случай, что петли, которые могут уходить «достаточно далеко» от фиксированной точки окажут решающее влияние на группу голономии). Далее мы пройдемся кратко по списку Берже и прокомментируем каждый случай (точные определения, относящиеся к каждой геометрии из списка Берже можно найти в Главе 1).

Кэлеровы пространства хорошо изучены, и примеров кэлеровых пространств с группой голономии $U(m)$ можно приводить очень много [18, 20].

Римановы многообразия, группа голономии которых содержится в $SU(m)$ называются многообразиями Калаби — Яу (название связано с теоремой Калаби — Яу, цитированной ниже), или специальными кэлеровыми многообразиями. Можно показать, что специальные кэлеровы многообразия являются Риччи-плоскими [20, 14]. Уже из этого факта ясно, что построение таких многообразий является трудной задачей. Первый пример полной римановой метрики с группой $SU(m)$ был построен Калаби [41]:

$$d\bar{s}^2 = \frac{d\rho^2}{1-\frac{1}{\rho^{2n}}} + \rho^2\left(1-\frac{1}{\rho^{2n}}\right)(d\tau - 2A)^2 + \rho^2 ds^2. \tag{1}$$

Здесь ds^2 — метрика Фубини — Штуди на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{n-1}$, A — 1-форма интегрирующая кэлерову форму на $\mathbb{C}P^{n-1}$, $\rho \geq 1$ и τ — угловая переменная на окружности. Можно показать, что метрика (1) является гладкой глобально определенной специальной кэлеровой метрикой на n-ой тензорной степени комплексного линейного расслоения Хопфа над $\mathbb{C}P^{n-1}$. Отметим, что форма (1) метрики Калаби была найдена в [75], схожий подход к построению этой метрики был использован в [32].

Существование специальных кэлеровых метрик на компактных многообразиях стало возможным показать после доказательства Яу гипотезы Калаби [91]: компактное кэлерово многообразие с нулевым первым классом Чженя допускает специальную кэлерову метрику, кэлерова форма которой когомологична исходной кэлеровой форме. Первым и наиболее известным примером такого многообразия является $K3$-поверхность, которую, пользуясь конструкцией Куммера можно представить следующим образом.

Рассмотрим инволюцию плоского тора T^4, возникающую из центральной симметрии евклидова пространства $\mathbb{R}^4$. После факторизации получаем орбифолд с 16 особыми точками, окрестности которых устроены как $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Выполнив раздутие полученного орбифолда в окрестности каждой особой точки, мы получаем двумерное комплексное многообразие — $K3$-поверхность. Поскольку ее первый класс Чженя равен нулю, то на $K3$ по теореме Калаби — Яу существует специальная кэлерова метрика. Более того, пространство модулей таких метрик имеет размерность 58. Геометрическое объяснение этой размерности, также как и «качественное» описание специальных кэлеровых метрик на $K3$ было дано Пэйджем [74]. Центральную роль в конструкции Пэйджа играет метрика Эгучи — Хансона [48], которая получается из (1) при $n = 2$:

$$ds^2 = \frac{4dr^2}{1-\frac{1}{r^4}} + r^2\left(1-\frac{1}{r^4}\right)(d\psi + \cos\theta d\phi)^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \qquad (2)$$

(здесь θ, ϕ — сферические координаты). Эта метрика является метрикой с группой голономии $SU(2)$ на T^*S^2 и асимптотически выглядит как плоская метрика на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Топологически конструкция раздутия особой точки вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ в $T^4/\mathbb{Z}_2$ устроена так: надо выколоть особенность и отождествить ее окрестность с пространством шарового расслоения в T^*S^2 без нулевого слоя S^2. Пэйдж предложил рассмотреть на T^*S^2 метрику, гомотетичную метрике Эгучи — Хансона с достаточно малым коэффициентом гомотетии, так что на границе приклеиваемого шарового расслоения метрика становится сколь угодно близка к плоской. После этого надо слегка деформировать метрику на торе так, чтобы получить гладкую метрику на $K3$-поверхности с голономией $SU(2)$. Простой подсчет степеней свободы при выполнении этой операции показывает, что таким образом получается 58-мерное семейство метрик, что совпадает с известными результатами о размерности пространства модулей таких метрик [91].

Гиперкэлеровы многообразия также являются многообразиями Калаби — Яу, но их группа голономии меньше, чем $SU(2m)$ и совпадает с $Sp(m)$. Теорема Калаби — Яу также может быть использована для их построения, и более того, построение гиперкэлеровых многообразий оказалось более легким, чем специальных кэлеровых. Детали можно найти в [65]. Отметим, что первая полная риманова гиперкэлерова метрика была найдена Калаби [41].

Кватернионно-кэлеровы многообразия интересны тем, что являются эйнштейновыми (не являясь вообще говоря кэлеровыми). Классическим примером являются кватернионные проективные пространства $\mathbb{H}P^n$, являющиеся симметрическими. Есть гипотеза (до сих пор не доказанная), что этими пространствами исчерпываются компактные кватернионно-кэлеровы многообразия. В некомпактном случае, существует много однородных кватернионно-кэлеровых пространств, классифицированных в [1, 46].

Наконец, оставшиеся последними в списке Берже случаи $\mathrm{Hol} = G_2$ и $\mathrm{Hol} = Spin(7)$ представляют особый интерес с позиций нашей диссертации. Эти две группы голономии принято называть *исключительными* группами голономии. Довольно долго не было известно ни одной римановой метрики с исключительными группами голономии. Только в 1987 году примеры неполных (локально определенных) метрик с группами голономии $Spin(7)$ и G_2 были построены Брайантом в [38]. Затем в

1989 году Брайантом и Сэламоном [40] были построены первые примеры полных римановых метрик с исключительными голономиями на некомпактных пространствах. И лишь в 1996 году Джойс [63, 64] при помощи конструкции, восходящей к Пэйджу и довольно тонкого анализа смог доказать существование компактных примеров. Систематическое изложение результатов Джойса можно найти в [65]. Ковалёв построил новые примеры компактных многообразий с группой голономии G_2, отличные от примеров Джойса, при помощи конструкции связной суммы используя трехмерные поверхности Фано [68].

На данный момент вопрос о существовании римановых метрик с группами голономии $Spin(7)$ и G_2 на тех или иных многообразиях (компактных или некомпактных) остается до конца неясным. например, работы Джойса и Ковалёва дают конечное (хотя и довольно большое) число компактных многообразий, допускающих метрики с исключительными группами голономии, и до сих пор неизвестно даже может ли число топологических типов таких многообразий быть бесконечным.

Новый интерес к некомпактным примерам возник относительно недавно со стороны математической физики. Было предложено использование некомпактных метрик с группами голономии $Spin(7)$ в так называемой M-теории. В работах [53, 54, 55, 57, 66, 67] был построен ряд новых полных примеров, часть которых является не многообразиями, а орбифолдами. Все эти метрики автоматически являются Риччи-плоскими и асимптотически ведут себя либо как конусы, либо как произведения конусов на окружности. Все построенные примеры представляют собой метрики коoднородности один, т.е. расслаиваются на однородные семимерные слои.

Некомпактные римановы многообразия со специальными группами голономии (а именно этому случаю посвящена диссертация) занимают свое собственное положение в теории групп голономии римановых пространств, и важность их изучения мотивируется следующими причинами. Теорема Калаби — Яу хотя и дает исчерпывающий ответ на вопрос о существовании специальных кэлеровых метрик, но вопрос о строении таких метрик остается неясным. Нет речи о сколь-нибудь явном построении метрик Калаби — Яу на замкнутых многообразиях; однако и «качественное» строение таких метрик теорема Калаби — Яу не проясняет. Пожалуй единственный подход связан с описанным выше методом Пэйджа для построения метрик Калаби — Яу на $K3$-поверхности: действительно, в этом случае мы можем достаточно точно понять как устроена метрика с группой голономии $SU(2)$ (по крайней мере вблизи особой плоской метрики на $T^4/\mathbb{Z}_2$). При этом в методе Пэйджа принципиальное значение играет явный вид метрики Эгучи — Хансона (2) на некомпактном многообразии T^*S^2. Этот пример является в определенном смысле модельным: Джойс, при построении своих метрик использовал именно эту идею. В цитированной выше работе Ковалёва также используется конструкция связной суммы двух некомпактных многообразий, имеющих специальные группы голономии.

Итак, резюмируя, мы можем сказать, что для качественного понимания метрик со специальными группами голономии, метрики на некомпактных многообразиях полезны, поскольку: во-первых, уравнения для них существенно проще и решаются либо явно, либо существует хорошее качественное описание решений; во-вторых, можно моделировать при помощи них метрики на компактных многообразиях (например в духе конструкции Пэйджа); в-третьих, с точки зрения математической физики представляют интерес именно метрики на некомпактных многообразиях (или орбифолдах).

Другая «логическая» часть диссертации посвящена группам голономии некомпактных лоренцевых многообразий. Отметим, что в этом случае рассмотрение компактных лоренцевых многообразий вообще вряд ли является осмысленным (по крайней мере с точки зрения физических приложений), поскольку можно доказать, что любое ориентированное во времени компактное лоренцево многообразие содержит замкнутую времениподобную кривую (образно говоря, «существует петля времени») [16].

Что касается групп голономии псевдоримановых многообразий, по отношению к классическому риманову случаю, то здесь ситуация осложняется наличием неразложимых групп голономии, не являющихся неприводимыми. Более подробно, пусть (N, g) — псевдориманово многообразие с группой голономии $G = \mathrm{Hol}_p(N)$, $p \in N$. Представление голономии называется *разложимым*, если существует G-инвариантное разложение

$$T_pN = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r,$$

такое что $r \geq 2$ и $W_i \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$. В противном случае представление называется *неразложимым*. Представление голономии называется *неприводимым*, если не существует нетривиального собственного G-инвариантного подпространства $W \subset T_pN$. Теорема де Рама обобщенная на псевдориманов случай утверждает следующее [77, 90]: псевдориманово многообразие с разложимым представлением голономии локально изометрично произведению $(\mathbb{R}^{k_1}, g_1) \times \ldots \times (\mathbb{R}^{k_r}, g_r)$, где $k_i = \dim W_i$ и $\mathrm{Hol}_p(N) = H_1 \times \ldots \times H_r$. Более того, если N односвязно и геодезически полно, то (N, g) изометрично $(N_1, g_1) \times \ldots \times (N_r, g_r)$, где H_i — группа голономии (N_i, g_i), $i = 1, \ldots, r$.

В работах [31, 39] был получен список кандидатов в неприводимые группы голономии псевдоримановых многообразий, и в [39] все эти группы были реализованы как группы голономии псевдоримановых пространств. При анализе списка из [31, 39] видно, что в лоренцевом случае не может быть неприводимых групп голономии, кроме $SO(n+1, 1)$. Таким образом, задача классификации специальных групп голономии лоренцевых пространств сводится к исследованию неразложимых представлений голономии, не являющихся неприводимыми.

В [33] были изучены алгебры голономии неразложимых лоренцевых многообразий, не являющихся неприводимыми. С каждой такой алгеброй $\mathbf{g} \subset \mathbf{so}(n+1,1)$ была ассоциирована ее *ортогональная часть* $\mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n)$, причем для данной ортогональной части существуют ровно четыре типа алгебры $\mathbf{g}$, которые потенциально могут быть алгебрами голономии лоренцева многообразия. Более подробно все четыре типа алгебр, а также соответствующие им группы описаны в Главе 1.

В [70] было доказано, что если $\mathbf{g} \subset \mathbf{so}(n+1,1)$ является алгеброй голономии неразложимого лоренцева многообразия, не являющегося неприводимым, то ее ортогональная часть $\mathbf{h}$ является алгеброй голономии риманова многообразия. В работе [33] часть этих типов алгебр были, также локально, реализованы как алгебры голономии локально определенных лоренцевых метрик, в работе [50] были реализованы (локально) алгебры всех четырех типов.

Однако вопрос о глобальном строении лоренцевых метрик со специальными голономиями до сих пор до конца не ясен. Более того, даже постановка задачи осложнена неоднозначностью понимания «полноты» в лоренцевой геометрии. В работе [27] была предложена задача построения глобально гиперболических лоренцевых многообразий для каждого специального типа группы голономии. Кратко говоря, глобально гиперболическое лоренцево пространство — это пространство обладающее пространственноподобной гиперповерхностью, с которой любая непродолжаемая непространственноподобная кривая пересекается ровно в одной точке [16]. Это одно из самых сильных условий причинности, наиболее полезное для математической физики. В [27] часть специальных групп голономии (а именно тип 2) был реализован глобально гиперболическими лоренцевыми многообразиями.

Описание результатов, полученных в диссертации. В диссертации разработаны методы построения римановых метрик с группами голономии $Spin(7)$, G_2 и $SU(2)$ на некомпактных многообразиях, и также исследованы приложения некоторых из этих метрик (с группой голономии $SU(2)$) к построению римановых метрик со специальными голономиями на компактных многообразиях; разработанные методы применяются для исследования четырехмерных многообразий положительной кривизны Риччи. Сделано существенное продвижение в задаче классификации лоренцевых метрик со специальными группами голономии: для каждой такой группы, кроме содержащих слагаемое принадлежащее одному из трех фиксированных симметрических типов, доказано существование глобально гиперболического многообразия с данной группой голономии. Далее следует подробное описание этих результатов.

В работах [4, 6] автор диссертации предложил общую конструкцию, которая позволяет строить метрики с группой голономии $Spin(7)$ по заданному 3-сасакиеву 7-мерному многообразию M. Идея состоит в следующем. Если выбрать 3-сасакиево многообразие M, то конус над M будет гиперкэлеровым, т.е. будет иметь группу голономии $Sp(2) \subset Spin(7)$. Мы деформируем конусную метрику так, чтобы разрешить особенность в вершине конуса и получить метрику, группа голономии которой останется в $Spin(7)$. При этом за деформацию отвечают функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$, зависящие от радиальной переменной t, меняющейся вдоль образующей конуса.

Более подробно, рассмотрим 3-сасакиево расслоение $M \to \mathcal{O}$ с общим слоем, диффеоморфным S^3 либо $SO(3)$, над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$. С этим расслоением можно ассоциировать два векторных расслоения со слоем $\mathbb{H}$ и $\mathbb{C}$, пространства которых мы обозначаем $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, соответственно. Пространства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ позволяют осуществить разрешение конусной особенности двумя топологически различными способами. При этом метрика на $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ выглядит следующим образом:

$$dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \eta_i^2 + B(t)^2 g|_{\mathcal{H}}, \qquad (2)$$

где g — метрика на 3-сасакиевом многообразии M, $\mathcal{H}$ — касательное к M распределение горизонтальных векторов, η_i — базис 1-форм, аннулирующих $\mathcal{H}$. Условие исключительности группы голономии метрики (3) сводится тогда к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{l} \dot{A}_1 = \frac{2A_1^2}{B^2} + \frac{(A_2-A_3)^2-A_1^2}{A_2A_3}, \\ \dot{A}_2 = \frac{2A_2^2}{B^2} + \frac{(A_3-A_1)^2-A_2^2}{A_1A_3}, \\ \dot{A}_3 = \frac{2A_3^2}{B^2} + \frac{(A_1-A_2)^2-A_3^2}{A_1A_2}, \\ \dot{B} = -\frac{A_1+A_2+A_3}{B}. \end{array} \tag{4}$$

Чтобы получить регулярные асимптотически локально конические (АЛК) метрики надо поставить некоторую краевую задачу для системы (4): условие на одном краю должно разрешать конусную особенность; условие на другом должно гарантировать нужное асимптотическое поведение.

Примеры метрик с голономиями $Spin(7)$ на $\mathcal{M}_1$ для некоторых частных случаев выбора M были построены в [53, 54, 57, 66, 67]. В статье [55] сообщается о численном анализе, который позволяет предполагать существование метрик на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_4$ для $M = S^7$. Аналогично, в [67] приводится численный анализ, свидетельствующий о возможном существовании метрик на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_2$ при $M = SU(3)/S^1$. В диссертации в числе прочего, строго доказывается существование этих метрик. Точнее, результаты полученные при исследовании системы (4) можно представить в следующем виде.

Теорема (2.1 и 2.2 Гл. 2)[4, 6]. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$ в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $Sp(1)$.*

1) Существует двупараметрическое семейство попарно негомотетичных гладких римановых метрик на $\mathcal{M}_1$ вида (3) с группой голономии, содержащейся в $Spin(7)$, удовлетворяющих начальным условиям:

$$\begin{array}{l} A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0, \\ \dot{A}_1(0) = \dot{A}_2(0) = \dot{A}_3(0) = -1, \\ B(0) > 0, B'(0) = 0. \end{array}$$

Семейство метрик параметризуется тройкой чисел $\lambda_3 \le \lambda_2 \le \lambda_3 < 0$, *таких что* $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \varepsilon^2$ *для достаточно малого* $\varepsilon > 0$*: для каждой такой тройки существует значение переменной* $t = t_0$, *при котором траектория* (A_1, A_2, A_3) *проходит через эту тройку, т.е.*

$$A_1(t_0) = \lambda_1, A_2(t_0) = \lambda_2, A_3(t_0) = \lambda_3.$$

2) Существует однопараметрическое семейство попарно негомотетичных гладких римановых метрик на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ *вида (3) с группой голономии, содержащейся в* $Spin(7)$, *удовлетворяющих начальным условиям:*

$$\begin{array}{l} A_1(0) = 0, -A_2(0) = A_3(0) > 0, \\ \dot{A}_1(0) = -4, \dot{A}_2(0) = \dot{A}_3(0), \\ B(0) > 0, B'(0) = 0. \end{array}$$

Семейство метрик параметризуется отношением $\mu = A_3(0)/B(0)$.

Метрика семейства 1) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ *является полной римановой метрикой с группой голономии* $Spin(7)$ *и асимптотически ведет себя как конус над* M*; при* $\lambda_1 \ne \lambda_2 = \lambda_3$ *метрики также являются полными с группами голономии* $Spin(7)$ *и асимптотически ведут себя как произведения конуса над твисторным пространством* M *и окружности постоянного радиуса. Наконец, в остальных случаях метрики семейства 1) полными не являются.*

Метрики семейства 2) являются полными при $\mu \le 1$*; при* $\mu < 1$ *группа голономии метрик семейства 2) совпадает с* $Spin(7)$ *и асимптотически метрики ведут себя как произведения конуса над твисторным пространством* M *и окружности; при* $\mu = 1$ *группа голономии равна* $SU(4) \subset Spin(7)$ *и метрика асимптотически ведет себя как конус над* M. *Наконец, при* $\mu > 1$ *метрики семейства 2) полными не являются.*

Любая другая полная гладкая метрика вида (3) с группой голономии, содержащейся в $Spin(7)$ *и с такой же* $Spin(7)$*-структурой на* $\mathcal{M}_1$ *и* $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_q$ *гомотетична одной из метрик указанных семейств с точностью до перестановок индексов переменных.*

Существует много примеров 3-сасакиевых 7-мерных многообразий [34]. Пространства $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, в общем случае являющиеся орбифолдами, будут многообразиями, если M — регулярное 3-сасакиево многообразие. Это имеет место лишь при $M = S^7$, $M = \mathbb{R}P^7$, $M = SU(3)/S^1$.

В случае $M = S^7$ или $M = \mathbb{R}P^7$ мы получаем одинаковые метрики, поэтому из предыдущей теоремы непосредственно вытекает

Следствие. *Существует однопараметрическое семейство полных римановых метрик вида (3) с группой голономии $Spin(7)$ на следующих многообразиях:*

1) на пространстве комплексного линейного расслоения, являющегося четвертой степенью канонического комплексного линейного расслоения над $\mathbb{C}P^3$; при этом асимптотически метрика является произведением S^1 на конус над $\mathbb{C}P^3$;

2) на пространстве комплексного линейного расслоения, являющегося четвертой степенью канонического комплексного линейного расслоения над комплексным многообразием F^3 флагов в $\mathbb{C}^3$; при этом асимптотически метрика является произведением S^1 на конус над F^3.

Стоит отметить, что система уравнений (4) появлялась в работах [55], [67] как результат независимых вычислений в различных алгебрах Ли; совпадение уравнений, конечно, объясняется с позиций диссертации наличием в обоих случаях 3-сасакиевой структуры на однородных сечениях.

Автор диссертации совместно с Е. Г. Мальковичем применил описанную выше конструкцию для исследования римановых метрик с группой голономии G_2. Также как и в случае $Spin(7)$ рассматривается произвольное компактное семимерное 3-сасакиево многообразие M и исследуется вопрос о том, существует ли гладкое разрешение конусной метрики над твисторным пространством $\mathcal{Z}$, связанным с M.

А именно, с каждым 3-сасакиевым многообразием M тесно связано твисторное пространство $\mathcal{Z}$, определяемое как фактор-пространство M

по действию окружности, соответствующему полю ξ^1. Известно, что $\mathcal{Z}$ — орбифолд, обладающей метрикой Кэлера — Эйнштейна [34]. Мы рассматриваем метрики, являющиеся естественными разрешениями стандартной конусной метрики над $\mathcal{Z}$:

$$\bar{g} = dt^2 + A(t)^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + B(t)^2(\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2 + \eta_7^2), \tag{5}$$

где η_2, η_3 — как и ранее, характеристические 1-формы M, а $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$ — формы, аннулирующие 3-сасакиево слоение на M, и A, B, C — вещественные функции.

Одним из основных результатов статьи [5] является конструкция (в случае кэлеровости $M/SU(2)$) G_2-структуры, параллельность которой относительно метрики (5) равносильна следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{l} A' = \frac{2A^2 - B^2 - C^2}{BC}, \\ B' = \frac{B^2 - C^2 - 2A^2}{CA}, \\ C' = \frac{C^2 - 2A^2 - B^2}{AB}. \end{array} \tag{6}$$

Таким образом, метрика (5) при условии (6) имеет группу голономии G_2 и, в частности, является Риччи-плоской. Ранее система (6) была получена в [55] в частном случае $M = SU(3)/S^1$.

Для того, чтобы решение системы (6) было определено на некотором орбифолде либо многообразии, необходимо дополнительное выполнение краевых условий в точке t_0, которые мы формулируем. Эти условия не могут быть выполнены, кроме случая $B = C$, который приводит нас к функциям, дающим решения, найденные впервые в [40] в специальном случае $M = S^7$ и $M = SU(3)/S^1$. В случае $B = C$ метрика (5) определена на тотальном пространстве $\mathbb{R}^3$-расслоения $\mathcal{N}$ над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$. Отметим, что при $B = C$ условие кэлеровости $\mathcal{O}$ не является необходимым. Если суммировать все полученные (совместно с Е. Г. Мальковичем) результаты, то из них непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие (Теорема 2.3, Гл. 2) [5]. *Существует единственная с точностью до гомотетии гладкая метрика $\tilde{g}$ на $\mathcal{N}^7$ с группой голономии G_2, отвечающая рассмотренной G_2-структуре:*

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1-\frac{1}{r^4}} + r^2\left(1-\frac{1}{r^4}\right)\left(\eta_2^2+\eta_3^2\right) + 2r^2\left(\eta_4^2+\eta_5^2+\eta_6^2+\eta_7^2\right).$$

Отметим здесь, что 3-сасакиевы многообразия в общем случае являются неоднородными, поэтому построенные в диссертации метрики с группами голономии $Spin(7)$ и G_2 в общем случае имеют коонородность равную 5, в отличие от всех известных ранее некомпактных примеров, имеющих коонородность 1.

В диссертации также было предпринято изучение римановых метрик коонородности 2 на четырехмерных некомпактных многообразиях. Это означает, что искомые метрики должны быть инвариантны относительно действия двумерного тора T^2, т.е. являются инвариантными метриками на T^2-многообразиях. В результате исследования структуры кривизны Риччи таких метрик, была найдена следующая риманова метрика, обобщающая метрику Эгучи — Хансона [2, 3]:

$$\begin{gathered} ds^2 = (r^2 - a\cos\theta)\left(\tfrac{4r^2dr^2}{r^4-1} + d\theta^2\right) + \\ \tfrac{r^4-1}{r^2-a\cos\theta}\left(d\psi + \cos\theta d\phi\right)^2 + \tfrac{r^4\sin^2\theta}{r^2-a\cos\theta}\left(\tfrac{a}{r^2}d\psi + d\phi\right)^2. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь параметр a пробегает рациональные значения и при $a = 0$ мы получаем метрику (2).

Чтобы понять, на каком пространстве определена метрика (7) рассмотрим обобщение стандартной двумерной сферы — взвешенную комплексную прямую $\mathbb{C}P^1(k,l) = S^2(k,l)$, являющуюся комплексным орбифолдом с двумя особыми точками, имеющими тип $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_l$.

Теорема (3.1 и 3.2, Гл.3) [2, 3]. *Метрика (7) является гладкой T^2-инвариантной специальной кэлеровой метрикой на кокасательном расслоении к взвешенной комплексной прямой $M_{k,l} = T^*\mathbb{C}P^1(k,l)$, где*

$a = \frac{l-k}{l+k}$. *При* $k = l$ *метрика (7) является* $SU(2)$*-инвариантной и совпадает с метрикой Эгучи — Хансона (2) на* $M_{1,1} = T^*S^2$.

Асимптотически, метрика (7) ведет себя следующим образом. На бесконечности метрика стремится к евклидовой метрике на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}$, а в окрестности каждой из двух особых точек — к евклидовым метрикам на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_l$, соответственно. Поэтому, имея в виду идею Пейджа, мы предлагаем использовать метрики на $M_{k,l}$ для раздутия особенностей вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ на орбифолдах с группой голономии $SU(2)$ в несколько шагов: мы последовательно заменяем каждую особенность на две меньшего порядка, приклеивая пространство $M_{k,l}$ с построенной метрикой; в итоге можно «убрать» все особые точки.

В качестве приложения мы рассматриваем представление $K3$-поверхности как раздутие особенностей орбифолда $T^4/\mathbb{Z}_p$ при простом $p \neq 2$. Оказывается, что единственный возможный случай — это $p = 3$, где надо раздуть 9 особых точек вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$. Это делается в два шага: сначала при помощи $M_{1,2}$ мы получаем 9 особых точек вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ и затем убираем их при помощи $M_{1,1} = T^*S^2$. Каждый раз мы слегка деформируем метрику на «сшитом» пространстве, и получаем некоторую гладкую метрику на $K3$-поверхности. Простой подсчет степеней свободы нашей конструкции показывает, что размерность полученного семейства равна 58, и мы получаем следующий результат.

Теорема (3.3, гл. 3) [3]. *Описанная конструкция позволяет получить семейство метрик, задающих в пространстве модулей специальных кэлеровых метрик на* $K3$*-поверхности некоторую окрестность предельной плоской метрики на* $T^4/\mathbb{Z}_3$.

Здесь же стоит отметить, что методы, разработанные для построения метрики (7), а также для исследования топологического типа многообразий на котором метрика (7) является гладкой, удалось применить для исследования римановых метрик положительной кривизны Риччи.

В [84] доказано, что любая связная сумма конечного числа экземпляров $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2$ и $-\mathbb{C}P^2$ обладает римановой метрикой положительной кривизны Риччи. С другой стороны, любая такая связная сумма допускает эффективное действие тора T^2, т. е. является T^2-многообразием. В [73] доказано, что верно и обратное: любое односвязное T^2-многообразие гомеоморфно одной из указанных связных сумм. При этом в каждом классе гомеоморфизма T^2-многообразия существует вообще говоря бесконечное число эквивариантно различных T^2-многообразий. Поскольку конструкция в [84] не позволяет строить T^2-инвариантные метрики, то до сих пор оставался неисследованным вопрос о том, существует ли риманова метрика положительной секционной кривизны Риччи в каждом T^2-эквивариантном классе односвязных четырехмерных T^2-многообразий. В работе [8] (совместно с И. В. Матвиенко) дается положительный ответ на этот вопрос:

Теорема (4.1, Гл. 4) [8]. *На каждом односвязном четырехмерном T^2-многообразии существует риманова метрика положительной кривизны Риччи, относительно которой T^2 действует изометриями.*

При построении метрики мы используем конструкцию, представляющую M как фактор-пространство некоторого универсального T^m-многообразия N_m по свободному действию тора T^{m-2}. Мы строим метрику на N_m и пользуясь римановой субмерсией $N_m \to M$ получаем требуемую метрику на M. Отметим, что аналог универсального пространства N_m строится в любых размерностях, и было бы интересным обобщить доказанную теорему на случай любого квазиторического многообразия в смысле книги [17]. Отметим также, что в [17], как и в других работах по квазиторическим многообразиям вместо используемого в диссертации термина «универсальное T^m-многообразие» принято использовать термин «комплекс момент-угол».

В части исследования специальных групп голономии лоренцевых пространств, в диссертации продолжено изучение задачи построения глобально гиперболических лоренцевых многообразий со специальными группами голономии, предложенной в [27]. А именно, основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема (5.1 и 5.6, Гл. 5)[7]. *Пусть H — группа голономии риманова пространства, представление голономии которой не содержит в качестве прямого множителя представление изотропии кэлерова симметрического пространства ранга большего один. Тогда для любой специальной лоренцевой группы голономии G с ортогональной частью H существует глобально гиперболическое лоренцево многообразие с группой голономии G.*

Таким образом, в задаче классификации лоренцевых групп голономии, оставшиеся неисследованными случаи соответствуют $H = U(n) \times H'$, либо $H = S(U(p) \times U(q)) \times H'$, $\max\{p, q\} \geq 2$, отвечающие симметрическим пространствам $SO(2n)/U(n)$, $Sp(n)/U(n)$ и $SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$, $\max\{p, q\} \geq 2$. Отметим, что в этих случаях представление группы H не является стандартным, и может быть представлением голономии только указанных симметрических пространств.

Описание диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы.

Во введении дается обзор современного состояния области дифференциальной геометрии, занимающейся изучением групп голономии римановых и лоренцевых пространств, а также описываются результаты, составляющие основное содержание диссертации.

Глава 1 посвящена изложению используемых в диссертации сведений о группах голономии и связанных вопросов, и состоит из трех параграфов. В параграфе 1.1 приводятся основные результаты о группах голономии римановых пространств, подробно описываются геометрии из списка Берже. Параграф 1.2 посвящен изложению теории 3-сасакиевых многообразий, необходимых для конструкции метрик с исключительными группами голономии. Наконец, в параграфе 1.3 приведены сведения о специальных группах голономии лоренцевых пространств, указаны алгебры и группы из списка Бержери — Икемахена.

В Главе 2, состоящей из шести параграфов, описана конструкция, позволяющая строить метрики с группами голономии $Spin(7)$ и G_2 по произвольному семимерному 3-сасакиеву многообразию. В параграфе 2.1 описывается общая конструкция римановой метрики (2.1) со $Spin(7)$-структурой, связанной с 3-сасакиевым многообразием и выводится система нелинейных обыкновенных уравнений (2.3), являющихся условием параллельности этой структуры. Далее формулируются краевые условия для системы (2.3), при выполнении которых метрика (2.1) является гладкой метрикой либо на пространстве $\mathcal{M}_1$ (лемма 2.2), либо на пространстве $\mathcal{M}_2$ (лемма 2.3). В заключение параграфа приводятся известные ранее частные решения системы (2.3).

В параграфе 2.2 формулируется и доказывается теорема 2.1, описывающая все решения системы уравнений параллельности $Spin(7)$-структуры с краевыми условиями, определяющими метрику на пространстве $\mathcal{M}_2$. Для этого производится редукция системы (2.3) к автономной системе дифференциальных уравнений на трехмерной сфере, находятся все стационарные (лемма 2.6) и условно стационарные (лемма 2.7) точки редуцированной системы. Доказывается, что стационарные и условно стационарные точки редуцированной системы отвечают асимптотически (локально)-коническим метрикам на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ (лемма 2.8). Доказывается, что для каждой начальной точки, отвечающей краевым условиям леммы 2.3 редуцированной системы существует единственная траектория, выходящая из этой точки (лемма 2.9). В лемме 2.11 выясняется, как асимптотически ведут себя траектории редуцированной системы, и в лемме 2.12 завершается доказательство теоремы 2.1 доказательством того, что полученные полные метрики имеют группу голономии $Spin(7)$.

В параграфе 2.3 формулируется и доказывается теорема 2.2, описывающая все решения системы уравнений параллельности $Spin(7)$-структуры с краевыми условиями, определяющими метрику на пространстве $\mathcal{M}_1$. Для этого осуществляется раздутие трехмерной сферы в точке, отвечающей начальному краевому значению в лемме 2.3. Редуцированная автономная система поднимается на раздутую сферу и доказывается. что существует двупараметрическое семейство ее решений (лемма 2.14). В лемме 2.16 выясняется, как асимптотически ведут себя траектории редуцированной системы, что завершает доказательство теоремы 2.2.

В параграфе 2.4 приводятся строгие доказательства лемм 2.2 и 2.3, формулирующих условия регулярности построенных метрик на пространствах $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

В параграфе 2.5 определенная выше конструкция используется для построения метрик с группой голономии G_2 на семимерных пространствах $\mathcal{N}$. Описывается метрика (2.19), задающая G_2-структуру на $\mathcal{N}$ и выводятся уравнения (2.20) параллельности этой структуры. Вывод этих уравнений вместе с исследованием их регулярных решений составляет содержание теоремы 2.3.

Наконец, в последнем параграфе 2.6 Главы 2 исследуются примеры 3-сасакиевой структуры на семимерных многообразиях Эшенбурга и описываются соответствующие им пространства $\mathcal{N}$ (лемма 2.17 и следствие из нее).

Глава 3, состоящая из четырех параграфов, посвящена специальным кэлеровым метрикам на пространствах линейных комплексных расслоений и их приложению к исследованию геометрии $K3$-поверхности. В параграфе 3.1 описывается класс римановых метрик вида (3.3), инвариантных относительно тора T^2 и приводится их тензор кривизны (соотношения (3.4) и (3.5)). Явным образом приводится решение (3.6) уравнения Эйнштейна $R_{ij} = 0$ и выясняется топологическое строение пространства $M_{k,l}$, на котором решение (3.6) является гладко определенной метрикой (теорема 3.1).

В параграфе 3.2 доказывается, что определенное выше пространство

$M_{k,l}$ можно отождествить с кокасательным расслоением $T^*\mathbb{C}P^1(k,l)$ к взвешенной комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1(k,l)$. Доказывается, что $M_{k,l}$ с построенной метрикой (3.6) является специальным кэлеровым орбифолдом, обобщающим T^*S^2 с метрикой Эгучи — Хансона (теорема 3.2).

В параграфе 3.3 изучаются приложения метрики (3.6) к исследованию пространства модулей римановых метрик с группой голономии $SU(2)$ на $K3$-поверхности. Описываются конструкции Куммера и Пэйджа, доказывается, что из всех групп $\mathbb{Z}_p$ с простым p, только $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_3$ могут действовать изометриями на T^4 с изолированными неподвижными точками. Формулируется теорема 3.3, описывающая пространство модулей метрик на $K3$-поверхности в окрестности плоской метрики на $T^4/\mathbb{Z}_3$.

Наконец, в параграфе 3.4 доказывается теорема 3.3. При этом используется конструкция мульти-инстантонов, связанная с метрикой (3.6) и доказательство проводится схожим с [65] образом.

Глава 4, состоящая из двух параграфов, посвящена построению T^2-инвариантных римановых метрик положительной кривизны Риччи на односвязных T^2-многообразиях. В параграфе 4.1 приводится конструкция универсального T^m-многообразия, а в параграфе 4.2 формулируется и доказывается теорема 4.1 о существовании T^2-инвариантных метрик с положительной кривизной Риччи. Для этого рассматривается метрика на универсальном многообразии, инвариантная относительно T^m и доказывается, что эта метрика опущенная на четырехмерное T^2-многообразие при помощи римановой субмерсии дает требуемую метрику положительной кривизны Риччи (леммы 4.2 и 4.3).

Глава 5, состоящая из трех параграфов, посвящена доказательству существования глобально гиперболических лоренцевых многообразий со специальными группами голономии. В параграфе 5.1 приводится общая форма лоренцевой метрики (5.1), и формулируется и доказывается теорема 5.1, в которой утверждается, что метрика формы (5.1) может иметь любую специальную группу лоренцевой голономии, при надлежащем выборе параметров.

В параграфе 5.2 приводятся необходимые для дальнейшего сведения по теории причинности лоренцевых многообразий. В параграфе 5.3 формулируется и доказывается теорема 5.6, утверждающая, что метрика вида (5.1) со специальной группой голономии является глобально гиперболической лоренцевой метрикой при правильном выборе параметров, определяющих метрику.

Список литературы состоит из 91 наименования.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались на различных международных и всероссийских конференциях: на международной конференции «Нелинейные методы в топологических задачах», проходившей в Бедлево в 2006, на Международном математическом конгрессе, проходившем в Мадриде в 2006, на международной конференции, посвященной 95-летию А. Д. Александрова, проходившей в С.-Петербурге в 2007, на Всероссийской конференции, проходившей в Челябинске в 2006 и других; на семинарах «Геометрия, топология и их приложения» (рук. И. А. Тайманов) Института математики СО РАН и «Алгебраическая топология и ее приложения» (рук. В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов) Механико-математического факультета МГУ.

Публикации. Все результаты диссертации опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Две работы являются совместными: статья [5] выполнена совместно с Е. Г. Мальковичем и статья [8] — совместно с И. В. Матвиенко. Эти работы получены в процессе неразделимой творческой деятельности авторов.

Автор выражает признательность научному консультанту И. А. Тайманову за полезные обсуждения.

Глава 1

Основные сведения о группах голономии и связанных с ними геометрических структурах

1.1 Группы голономии римановых пространств

В этом параграфе кратко излагаются необходимые в дальнейшем сведения из теории групп голономии римановых пространств. Более систематическое изложение можно найти в [21, 86, 20].

Пусть $M = M^n$ — связное n-мерное риманово многообразие (без края) с римановой метрикой g. Метрика g однозначно определяет связность Леви — Чивита ∇ в TM. Везде в дальнейшем мы будем подразумевать на римановых (или лоренцевых) многообразиях именно эту аффинную связность.

Фиксируем точку $p \in M$. Пусть $\lambda(t)$, $t \in [0,1]$ — C^1-кусочно гладкая замкнутая петля с вершиной в точке p, т.е. $\lambda(0) = \lambda(1) = p$. Обозначим через $\tau(\lambda)$ параллельный перенос вдоль кривой λ относительно связности ∇. В силу свойств связности Леви — Чивита $\tau(\lambda)$ является ортогональным преобразованием касательного пространства T_pM.

Группой голономии риманова многообразия (M, g) в точке p называется подгруппа $\mathrm{Hol}_p(M)$ ортогональной группы $O(T_pM)$, состоящая из преобразований вида $\tau(\lambda)$, где λ — произвольная C^1-кусочно гладкая петля с вершиной в точке p. Если при этом рассмотреть только стягиваемые петли, то мы получим *ограниченную группу голономии* $\mathrm{Hol}^0_p(M)$ в точке p. Можно показать [14], что $\mathrm{Hol}^0_p(M)$ является связной компонентой единицы группы $\mathrm{Hol}_p(M)$.

Если выбрать другую точку q и соединить ее кривой σ с точкой p, то нетрудно понять, что $\mathrm{Hol}_q(M) = \tau(\sigma)\mathrm{Hol}_p(M)\tau(\sigma)^{-1}$ и, аналогично, $\mathrm{Hol}^0_q(M) = \tau(\sigma)\mathrm{Hol}^0_p(M)\tau(\sigma)^{-1}$. Поэтому мы отождествим $O(T_pM)$ с $O(n)$ и будем писать $\mathrm{Hol} = \mathrm{Hol}(M) \subset O(n)$ или $\mathrm{Hol}^0 = \mathrm{Hol}^0(M) \subset SO(n)$ не указывая точку p. Действие группы Hol (Hol^0) на $T_pM = \mathbb{R}^n$ задает представление (ограниченной) группы голономии, которое называется *(ограниченным) представлением голономии.*

Следующая теорема проясняет структуру ограниченной группы голономии риманова многообразия.

Теорема 1.1 [36]. *Ограниченная группа голономии Hol^0 произвольного риманова многообразия M является компактной подгруппой группы $O(n)$.*

Аналогичный результат для группы Hol неверен, даже если M компактно [89]. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы всегда будем предполагать, что риманово многообразие M односвязно и, в частности, $\mathrm{Hol}^0(M) = \mathrm{Hol}(M)$.

Представление голономии риманова многообразия M называется *неприводимым* (мы, не совсем строго, говорим, что сама группа Hol неприводима), если не существует собственного инвариантного относительно Hol подпространства в T_pM. В противном случае говорим, что представление голономии (или сама группа голономии) является *приводимым.* Если $M = M_1 \times M_2$ и $g = g_1 + g_2$, т.е. (M, g) является прямым произведением римановых многообразий (M_1, g_1) и (M_2, g_2), то очевидно, что $\mathrm{Hol}(M) = \mathrm{Hol}(M_1) \times \mathrm{Hol}(M_2)$, причем представление голономии M приводимо и разлагается в сумму соответствующих представлений M_1 и M_2.

Теорема разложения де Рама показывает, что при условии полноты верно и обратное:

Теорема 1.2 [77]. *Пусть* (M, g) *— риманово многообразие с приводимым представлением голономии. Пусть*

$$T_p M = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r,$$

где $r \geq 2$, $V_j \neq 0$ *для всех* j. *Тогда* (M, g) *локально изометрично прямому произведению* $(\mathbb{R}^{k_1}, g_1) \times \ldots \times (\mathbb{R}^{k_r}, g_r)$, *где* $k_j = \dim V_j$, *и* $Hol_p^0(M) = H_1 \times \ldots \times H_r$, *где* $H_j \subset O(V_j, g_j)$.

Более того, если (M, g) *односвязно и полно, то* (M, g) *(глобально) изометрично произведению* $(M_1, g_1) \times \ldots \times (M_r, g_r)$, *причем группа* H_j *является группой голономии* (M_j, g_j).

Пусть $\mathbf{hol}_p(M) = \mathbf{hol}_p = \mathbf{hol}$ — алгебра Ли группы голономии Hol_p, называемая алгеброй голономии риманова многообразия M. Следующая теорема Амброза-Зингера показывает связь алгебры голономии с тензором кривизны риманова многообразия.

Теорема 1.3 [26]. *Алгебра голономии* $\mathbf{hol}_p$ *представляет собой подалгебру алгебры Ли* $\mathbf{so}(T_p M)$, *порожденную операторами вида*

$$(\tau(\lambda))^{-1} \circ R_q(X, Y) \circ \tau(\lambda),$$

где $q \in M$, $X, Y \in T_q(M)$, λ *— произвольный* C^1*-кусочно гладкий путь, с началом* p *и концом* q, *а через* $R_q(X, Y)$ *мы обозначаем эндоморфизм* $V \mapsto R(X, Y)V$ *касательного пространства* $T_q M$.

Эта теорема играет важную роль в главе 5.

Важный пример римановых многообразий со специальными группами голономии доставляют симметрические пространства. А именно, если $M = G/H$ — симметрическое пространство, где $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ — симметрическая пара, то H — группа голономии M, а представление изотропии H совпадает с представлением голономии.

Следующая теорема была доказана Берже.

Теорема 1.4 [31]. *Пусть M — односвязное неприводимое риманово многообразие размерности n, не являющееся симметрическим. Тогда имеет место один из следующих случаев.*

1) $Hol(M) = SO(n)$,
2) $n = 2m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = U(m) \subset SO(2m)$,
3) $n = 2m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = SU(m) \subset SO(2m)$,
4) $n = 4m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = Sp(m) \subset SO(4m)$,
5) $n = 4m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = Sp(m)Sp(1) \subset SO(4m)$,
6) $n = 7$ *и* $Hol(M) = G_2 \subset SO(7)$,
7) $n = 8$ *и* $Hol(M) = Spin(7) \subset SO(8)$,

где все указанные группы действуют в $\mathbb{R}^n$ стандартным способом.

Список групп, перечисленных в теореме принято называть списком Берже. Каждая из групп списка Берже соответствует той или иной геометрии и играет свою роль в диссертации. Кратко опишем все геометрии, возникающие из групп голономии списка Берже.

Общий случай: $\mathrm{Hol} = SO(n)$. На любом многообразии M римановы метрики с группой голономии $SO(n)$ образуют открытое всюду плотное множество относительно любой естественной топологии.

Кэлеровы многообразия: $\mathrm{Hol} = U(m)$. Риманово многообразие M^n называется кэлеровым, если на нем существует параллельная невырожденная 2-форма ω, называемая кэлеровой формой. В этом случае представление голономии сохраняет форму ω и, следовательно группа голономии содержится в $U(m)$. Можно ввести параллельную почти комплексную структуру J, $J^2 = -1$ соотношением $\omega(X, Y) = g(X, J(Y))$, $X, Y \in TM$ и доказать ее интегрируемость. Таким образом, по теореме Ньюлендера — Ниренберга [71] на M возникает комплексная структура.

Обратно, если на комплексном многообразии задана риманова метрика, согласованная с комплексной структурой (т.е. оператор J сохраняет скалярное произведение), то можно соотношением $\omega(X, Y) = g(X, J(Y))$,

$X, Y \in TM$ ввести эрмитову форму ω. В этом случае, имеет место следующее утверждение:

Предложение 1.5 [20]. *В описанной ситуации, эрмитова форма ω (а вместе с ней и комплексная структура J) параллельна тогда и только тогда, когда она замкнута:*

$$d\omega = 0. \tag{1.1}$$

Таким образом, вместо переопределенного, как правило, условия параллельности формы, на комплексном многообразии для построения кэлеровой структуры достаточно исследовать условие (1.1).

Специальные кэлеровы многообразия, или многообразия Калаби — Яу: $\mathrm{Hol} = SU(m)$. Кэлерово многообразие M называется специальным, если допускает параллельную комплексную форму объема θ, т.е. ненулевую комплексную дифференциальную форму типа $(m, 0)$. Параллельность формы θ означает, что представление голономии сохраняет комплексный объем в $\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^m$, т.е. группа голономии $\mathrm{Hol}(M)$ содержится в $SU(m) \subset U(m)$.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.6 [61]. *Кэлерово многообразие M является специальным, тогда и только тогда, когда оно Риччи-плоско, т.е. его тензор Риччи обращается в нуль:*

$$R_{ij} = 0. \tag{1.2}$$

Гиперкэлеровы многообразия: $\mathrm{Hol} = Sp(m)$. Риманово многообразие M^n называется гиперкэлеровым, если оно допускает три параллельные комплексные структуры, согласованные с римановой метрикой и удовлетворяющие кватернионным соотношениям $IJ = -JI = K$. У гиперкэлерова многообразия представление голономии оставляет инвариантными тройку 2-форм, отвечающих симплектическим преобразованиям $\mathbb{R}^{4m}$, поэтому $\mathrm{Hol}(M) = Sp(m) \subset SU(2m)$. Из последнего вложения следует, что гиперкэлерова метрика также удовлетворяет уравнению Эйнштейна (1.2).

Кватернионно-кэлеровы многообразия: $\mathrm{Hol} = Sp(m)Sp(1)$. Риманово многообразие называется кватернионно-кэлеровым, если существуют три локально определенные инвариантные относительно римановой метрики почти комплексные структуры I, J, K, удовлетворяющие кватернионным соотношениям и порождающие трехмерное параллельное подрасслоение в расслоении эндоморфизмов касательного расслоения TM. Если обозначить через ω_I, ω_J, ω_K соответствующие эрмитовы формы, то форма $\Omega = \omega_I \wedge \omega_I + \omega_J \wedge \omega_J + \omega_K \wedge \omega_K$ параллельна. Следовательно, группа голономии $\mathrm{Hol}(M)$ оставляет инвариантной форму Ω, поэтому содержится в $Sp(m)Sp(1) \subset O(4m)$, и наоборот, если $\mathrm{Hol} \subset Sp(m)Sp(1)$, то на M существует кватернионно-кэлерова структура. Важность этого класса многообразий диктуется следующим утверждением:

Предложение 1.7 [79]. *Кватернионно-кэлерово многообразие удовлетворяет уравнению Эйнштейна с «космологической» постоянной λ:*

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}.$$

Стоит отметить, что кватернионно-кэлерово многообразие вообще говоря не является кэлеровым. Заметим также, что при $m = 1$ понятие кватернионно-кэлерова многообразия по прежнему имеет смысл (и совпадает с автодуальным эйнштейновым многообразием), однако форма Ω просто совпадает с формой объема и группа голономии совпадает с $SO(4)$. Дальнейшие ссылки по кватернионно-кэлеровым многообразиям можно найти в [79, 80].

Оставшиеся два типа групп голономии представляют для нас особый интерес: их изучению посвящена глава 2 диссертации, поэтому мы опишем их более подробно.

Исключительная группа голономии $\mathrm{Hol} = G_2$. Пусть $\{e^i\}, i = 0, 2, 3, \ldots, 7$ — ортонормированный базис из 1-форм на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^7$ (не очень естественный, на первый взгляд, способ нумерации базиса связан с необходимостью согласования в главе 2 формы Ψ_0, определяемой ниже, с формой Φ, определяющей $Spin(7)$-структуру). Положив $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$ рассмотрим следующую 3-форму Ψ_0 на $\mathbb{R}^7$:

$$\Psi_0 = -e^{023} - e^{045} + e^{067} + e^{346} - e^{375} - e^{247} + e^{256}. \tag{1.3}$$

Подгруппа в $GL(7)$, сохраняющая форму Ψ_0 совпадает с группой G_2. Это компактная односвязная 14-мерная простая группа Ли, обычно определяемая как группа автоморфизмов чисел Кэли. Заметим, что группа G_2 также сохраняет метрику

$$g_0 = (e^0)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 + (e^4)^2 + (e^5)^2 + (e^6)^2 + (e^7)^2,$$

сопряженную 4-форму

$$*\Psi_0 = -e^{4567} - e^{2367} - e^{2345} - e^{0257} - e^{0246} + e^{0356} - e^{0347},$$

и ориентацию пространства $\mathbb{R}^7$. Дифференциальная 3-форма Ψ на ориентированном римановом 7-мерном многообразии M задаёт G_2-структуру, если в окрестности каждой точки $p \in M$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^7$, такая, что $\phi_p^*\Psi_0 = \Psi|_p$. При этом форма Ψ определяет единственную метрику g_Ψ, такую что $g_\Psi(v, w) = g_0(\phi_p v, \phi_p w)$ для $v, w \in T_pN$ [40, 65]. Если форма Ψ параллельна ($\nabla\Psi = 0$), то группа голономии риманова многообразия N будет содержаться в G_2.

Предложение 1.8 [56]. *Форма* Ψ, *задающая* G_2*-структуру на* M *параллельна тогда, и только тогда, когда она замкнута и козамкнута:*

$$\begin{gathered} d\Psi = 0 \\ d*\Psi = 0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Заметим, что для компактного M условие (1.4) равносильно гармоничности Ψ. Однако в некомпактном случае (который рассматривается в диссертации) это вообще говоря не так. Также отметим здесь, что форма $\Phi_0 = e^1 \wedge \Psi_0 - *\Psi_0$, где $*$ — оператор Ходжа в $\mathbb{R}^7$, задает $Spin(7)$-структуру на $\mathbb{R}^8$ с ортонормированным базисом $\{e^i\}_{i=0,1,2,..,7}$.

Важность римановых многообразий с группой голономии G_2 в некоторых задачах математической физики связана со следующим утверждением.

Предложение 1.9 [1]. *Пусть* (M, g) — *риманово 7-мерное многообразие и* $Hol(M) \subset G_2$. *Тогда* g — *Риччи-плоская метрика, т.е. она удовлетворяет уравнению (1.2).*

Исключительная группа голономии $\mathrm{Hol} = Spin(7)$. Пусть $\{e^i\}, i = 0, 1 \ldots, 7$ — ортонормированный базис из 1-форм на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^8$. Как и ранее, обозначаем $e^{ijkl} = e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l$, и определим 4-форму Φ_0 на $\mathbb{R}^8$ следующим образом:

$$\begin{gathered} \Phi_0 = e^{0123} + e^{4567} + e^{0145} - e^{2345} - e^{0167} + e^{2367} + e^{0246} + \\ e^{1346} - e^{0275} + e^{1357} + e^{0347} - e^{1247} - e^{0356} + e^{1256}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Подгруппа в $GL(8)$, сохраняющая форму Φ_0 совпадает с группой $Spin(7)$. Это компактная односвязная простая 21-мерная группа Ли, двукратно накрывающая ортогональную группу $SO(7)$. Группа $Spin(7)$ сохраняет метрику

$$g_0 = (e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 + (e^4)^2 + (e^5)^2 + (e^6)^2 + (e^7)^2$$

и ориентацию пространства $\mathbb{R}^8$.

Пусть M — ориентированное риманово 8-мерное многообразие. Говорят, что дифференциальная форма $\Phi \in \Lambda^4 M$ задает $Spin(7)$-структуру на M, если в окрестности каждой точки $p \in M$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^8$, такая, что $\phi_p^*\Phi_0 = \Phi|_p$. При этом форма Φ определяет единственную метрику g_Φ, такую что $g_\Phi(v, w) = g_0(\phi_p v, \phi_p w)$ для $v, w \in T_pM$ [40, 65]. Если форма Φ параллельна, то группа голономии риманова многообразия M редуцируется к подгруппе $Spin(7) \subset SO(8)$. Как и в случае группы голономии G_2 имеет место следующее предложение.

Предложение 1.10 [56]. *Форма Φ, задающая $Spin(7)$-структуру на многообразии M параллельна тогда, и только тогда, когда она замкнута:*

$$d\Phi = 0. \tag{1.6}$$

Поскольку Φ самосопряжена относительно оператора Ходжа $*$, ее замкнутость равносильна козамкнутости и влечет гармоничность; однако обратное в некомпактном случае вообще говоря неверно.

Римановы многообразия с группой голономии $Spin(7)$ также являются эйнштейновыми:

Предложение 1.11 [1]. *Пусть (M, g) — риманово 8-мерное многообразие и $Hol(M) \subset Spin(7)$. Тогда g — Риччи-плоская метрика, т.е. она удовлетворяет уравнению (1.2).*

1.2 3-Сасакиевы многообразия

Данный параграф содержит обзор основных результатов о 3-сасакиевых многообразиях, необходимых нам в дальнейшем. Более полные доказательства и дальнейшие ссылки можно найти в [34].

Пусть M — гладкое замкнутое риманово многообразие размерности

m с метрикой g. Конусом $\bar{M}$ над M будем называть многообразие $\mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой $\bar{g} = dt^2 + t^2 g$.

Многообразие M называется *сасакиевым*, если группа голономии конуса $\bar{M}$ содержится в $U(\frac{m+1}{2})$ (в частности, m нечетно). Значит на $\bar{M}$ существует параллельная комплексная структура J. Отождествим M с изометричным ему вложенным подмногообразием $M \times \{1\} \subset \bar{M}$ и положим $\xi = J(\partial_t)$. Векторное поле ξ называется *характеристическим* полем сасакиева многообразия M. Характеристическая 1-форма η сасакиева многообразия определяется соотношением

$$\eta(X) = g(X, \xi),$$

для всех полей X на M.

Лемма 1.1 *Поле ξ является единичным векторным полем Киллинга на многообразии M.*

Доказательство. То, что поле ξ является единичным сразу следует из определения. Пусть ∇ и $\bar{\nabla}$ — римановы связности в M и $\bar{M}$. Непосредственно проверяется, что для любых векторных полей X, Y на M

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - tg(X,Y)\partial_t, \ \bar{\nabla}_{\partial_t} X = \bar{\nabla}_X \partial_t = \frac{1}{t} X, \ \bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0.$$

Тогда для любого векторного поля X на M

$$g(\nabla_X \xi, X) = \bar{g}(\nabla_X \xi, X) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi, X) =$$

$$= \bar{g}(J(\bar{\nabla}_X \partial_t), X) = \bar{g}(JX, X) = 0.$$

Следовательно, поле ξ — киллингово. Лемма доказана.

Отметим, что свойство риманова многообразия иметь киллинговы поля постоянной длины само по себе является сильным геометрическим ограничением. Такие пространства и связанные с ними вопросы изучаются в [12, 28, 29, 13, 30].

Если на многообразии M заданы три попарно ортогональные сасакиевы структуры, то M становится 3-сасакиевым. Более точно, многообразие M называется 3-*сасакиевым*, если метрика $\bar{g}$ на $\bar{M}$ гиперкэлерова, т. е. ее группа голономии содержится в $Sp(\frac{m+1}{4})$ (в частности, $m = 4n+1, n \geq 1$). Последнее означает, что на $\bar{M}$ существуют три параллельные комплексные структуры J^1, J^2, J^3, удовлетворяющие соотношениям $J^j J^i = -\delta^{ij} + \varepsilon_{ijk} J^k$. Как и в сасакиевом случае определяются характеристические поля ξ^i и 1-формы η_i:

$$\xi^i = J^i(\partial_t),\ \eta_i(X) = g(X, \xi^i),\ i = 1, 2, 3,$$

для всех векторных полей X на M.

Лемма 1.2. *Поля ξ^1, ξ^2, ξ^3 являются единичными попарно ортогональными векторными полями Киллинга на M, причем*

$$\nabla_{\xi^i}\xi^j = \varepsilon_{ijk}\xi^k,\ [\xi^i, \xi^j] = 2\varepsilon_{ijk}\xi^k.$$

Доказательство. То, что поля ξ^i являются единичными, попарно ортогональными и киллинговыми сразу следует из определения и из предыдущей леммы. Далее,

$$\nabla_{\xi^i}\xi^j = \bar{\nabla}_{\xi^i}\xi^j + \delta^{ij}\partial_t = J^j\bar{\nabla}_{\xi^i}\partial_t + \delta^{ij}\partial_t = (J^j J^i + \delta^{ij})\partial_t = \varepsilon_{ijk}\xi^k,$$

откуда немедленно следует

$$[\xi^i, \xi^j] = \nabla_{\xi^i}\xi^j - \nabla_{\xi^j}\xi^i = 2\varepsilon_{ijk}\xi^k.$$

Лемма доказана.

Поля ξ^1, ξ^2, ξ^3 образуют подалгебру Ли $\mathbf{sp}(1)$ в алгебре инфинитезимальных изометрий. Следовательно, в группе всех изометрий содержится подгруппа либо $Sp(1)$, либо $SO(3)$, орбиты действия которой определяют трехмерное слоение $\mathcal{F}$. Из леммы следует, что каждый слой $\mathcal{F}$

является вполне геодезическим трехмерным подмногообразием постоянной кривизны 1.

Кратко напомним определения орбифолда (V-многообразия в терминологии Сатаке [81]). Пусть $\mathcal{S}$ — хаусдорфово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности. Локальная униформизующая система для открытой окрестности $U \subset \mathcal{S}$ — это тройка $(\tilde{U}, \Gamma, \pi)$, где $\tilde{U}$ — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$; Γ является конечной группой диффеоморфизмов окрестности $\tilde{U}$; проекция $\pi : \tilde{U} \to U$ инвариантна относительно группы Γ и индуцирует гомеоморфизм $\tilde{\pi} : \tilde{U}/\Gamma \to U$.

Пусть теперь $\tilde{U}_1$ и $\tilde{U}_2$ — два открытых множества в $\mathbb{R}^n$, конечные группы Γ_1 и Γ_2 действуют диффеоморфизмами на $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$, соответственно. Назовем непрерывное отображение $f : \tilde{U}_1/\Gamma_1 \to \tilde{U}_2/\Gamma_2$ гладким, если для каждой точки $p \in \tilde{U}_1$ найдутся такие окрестности V_1, V_2 точек p и $f(p)$ и такие локальные униформизующие системы $(\tilde{V}_1, \Gamma_1, \pi_1)$ и $(\tilde{V}_2, \Gamma_2, \pi_2)$ для V_1, V_2, что отображение $f|_{V_1}$ поднимается до гладкого отображения $\tilde{f} : \tilde{V}_1 \to \tilde{V}_2$, инвариантного относительно действия групп Γ_1, Γ_2. Схожим образом определяются понятия субмерсии, иммерсии, диффеоморфизма и т. д.

Гладким V-атласом для $\mathcal{S}$ называется покрытие $\mathcal{S}$ открытыми множествами U_i вместе с локальными униформизующими системами $(\tilde{U}_i, \Gamma_i, \pi_i)$ такими, что отображение

$$Id : U_i \cap U_j \to U_i \cap U_j$$

является диффеоморфизмом (в смысле данного выше определения). Пространство $\mathcal{S}$ вместе с полным V-атласом называется V-многообразием, или орбифолдом. Очевидным образом определяются понятия главного V-расслоения, V-расслоения, ассоциированного с главным; понятия дифференциальной формы, римановой метрики, римановой субмерсии и т. д.

Риманов орбифолд $\mathcal{O}$ называется *кватернионно-кэлеровым*, если в V-расслоении эндоморфизмов касательного пространства существует параллельное V-подрасслоение $\mathcal{I}$ размерности 3, локально порожденное почти комплексными структурами I^1, I^2, I^3, удовлетворяющими соотношениям алгебры кватернионов, и расслоение $\mathcal{I}$ инвариантно относительно действия локальной униформизующей группы $\mathcal{O}$.

Теорема 1.12 [34]. *Пусть M — замкнутое $(4n+3)$-мерное 3-сасакиево многообразие с определенным как выше трехмерным слоением $\mathcal{F}$. Тогда на пространстве листов слоения $\mathcal{F}$ существует структура $4n$-мерного кватернионно-кэлерова орбифолда $\mathcal{O}$, такая, что естественная проекция $\pi : M \to \mathcal{O}$ является римановой субмерсией и главным V-расслоением со структурной группой $Sp(1)$ либо $SO(3)$. Общий слой π изометричен либо $Sp(1)$, либо $SO(3)$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{V}$ трехмерное подрасслоение в TM, порожденное характеристическими полями ξ^1, ξ^2, ξ^3. Пусть $TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ — ортогональное разложение относительно метрики g. Подрасслоение $\mathcal{V}$ будем назвать расслоением вертикальных векторов, $\mathcal{H}$ — расслоением горизонтальных векторов.

Пусть $p \in M$. Предположим, что стабилизатором точки p относительно действия $Sp(1)$ является дискретная подгруппа Γ в $Sp(1)$, т. е. лист $\mathcal{F}_p$, проходящий через точку p изометричен $Sp(1)/\Gamma$. Положим

$$U = \{\exp_p(tX) | X \in \mathcal{H}_p, |X| = 1, 0 \le t \le \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ выбран настолько малым, что $\varepsilon < \mathrm{inj}\ (M)$, $\mathcal{F}_p$ пересекает U ровно один раз в точке p, и каждый лист слоения $\mathcal{F}$ пересекает U не более чем конечное число раз. Тогда U гомеоморфно $\mathbb{R}^{4n}$, и на U действует изометриями группа Γ по правилу

$$\gamma \in \Gamma : \exp_p(tX) \mapsto \exp_p(t d_p \gamma(X)).$$

Легко понять, что окрестность $\mathcal{O}$, состоящая из листов, пересекающих U гомеоморфна U/Γ, и система таких окрестностей, построенных по всем точкам p задает униформизующий атлас на $\mathcal{O}$.

Очевидно, что метрика g на M имеет вид:

$$g = \sum_{i=1}^{3} \eta_i^2 + g|_{\mathcal{H}},$$

где $g|_{\mathcal{H}}$ — ограничение метрики g на горизонтальное распределение. Рассмотрим проекцию $\pi : M \to \mathcal{O}$. Поскольку метрика g инвариантна относительно действия $Sp(1)$, то существует такая риманова метрика $g_{\mathcal{O}}$ на орбифолде $\mathcal{O}$, что для любой точки $p \in M$ ограничение $d\pi_p : \mathcal{H}_p M \to T_{\pi(p)}\mathcal{O}$ является изометрией; при этом $d\pi^*(g_{\mathcal{O}}) = g|_{\mathcal{H}}$. Таким образом проекция π становится римановой субмерсией, и каждому векторному полю Y на $\mathcal{O}$ однозначно соответствует горизонтальное $Sp(1)$-инвариантное векторное поле X на M, такое что $d\pi(X) = Y$. Связность Леви — Чивита метрики $g_{\mathcal{O}}$ получается проектированием на $\mathcal{H}$ связности Леви — Чивита метрики g [14]. Далее, если X — горизонтальное векторное поле, то

$$g(J^i(X), \xi^j) = g(X, \varepsilon_{ijk}\xi^k) = 0.$$

Таким образом, операторы J^1, J^2, J^3 на $\mathcal{H}$ отображают горизонтальные векторы в горизонтальные и задают кватернионную структуру на орбифолде $\mathcal{O}$.

Определим 2-формы на M следующим образом:

$$\omega_i = d\eta_i + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\eta_j \wedge \eta_k,\ \ i = 1, 2, 3.$$

Непосредственно проверяется, что для любых горизонтальных векторных полей X, Y

$$\omega_i(X,Y) = \frac{1}{2}(X\eta_i(Y) - Y\eta_i(X) - \eta_i([X,Y])) = \frac{1}{2}\eta_i(-\nabla_X Y + \nabla_Y X) =$$

$$= \frac{1}{2}(g(\nabla_X \xi^i, Y) - g(\nabla_Y \xi^i, X)) = g(J^i(X), Y),$$

$$\omega_i(X, \xi^j) = 0,\ \omega_i(\xi^j, \xi^k) = 0.$$

Таким образом, формы ω_i получаются опусканием индекса из ограничений операторов J^i на $\mathcal{H}$.

Далее,

$$L_{\xi^i}\eta_j(X) = \xi^i g(X,\xi^j) - g(\xi^j,[\xi^i,X]) = g(\nabla_{\xi^i}X,\xi^j) + g(X,\nabla_{\xi^i}\xi^j) -$$

$$-g(\xi^j,[\xi^i,X]) = g(\nabla_X\xi^i,\xi^j) + g(X,\nabla_{\xi^i}\xi^j) = g(\bar\nabla_X J^i\partial_t,\xi^j) +$$

$$+g(X,\bar\nabla_{\xi^i}J^j\partial_t) = -g(X,J^i\xi^j) + g(X,J^j\xi^i) =$$

$$= 2g(X,J^jJ^i\partial_t) = 2g(X,\varepsilon_{ijk}\xi^k) = 2\varepsilon_{ijk}\eta_k(X).$$

Таким образом,

$$L_{\xi^i}\eta_j = 2\varepsilon_{ijk}\eta_k. \tag{1.7}$$

Дифференцируя (1.7) получаем

$$L_{\xi^i}d\eta_j = 2\varepsilon_{ijk}d\eta_k. \tag{1.8}$$

Далее, пользуясь (1.8) и соотношением

$$L_{\xi^i}(\eta_j\wedge\eta_k) = L_{\xi^i}\eta_j\wedge\eta_k + \eta_j\wedge L_{\xi^i}\eta_k$$

мы получаем

$$L_{\xi^i}\omega_j = 2\varepsilon_{ijk}\omega_k.$$

Таким образом, пространство форм, порожденных формами ω_i инвариантно относительно действия $Sp(1)$, а это значит, что и пространство, порожденное операторами $J^i|_{\mathcal{H}}$ является $Sp(1)$-инвариантным и опускается на $\mathcal{O}$. Итак, в расслоении $End(T\mathcal{O})$ определено трехмерное подпространство, локально порожденное почти комплексными структурами J^1, J^2, J^3.

Далее, для горизонтальных X, Y имеем:

$$\mathcal{H}(\nabla_X J^i)(Y) = \mathcal{H}(\nabla_X(J^iY) - J^i(\nabla_XY)) = \mathcal{H}\bar\nabla_X(J^iY) - \mathcal{H}J^i(\nabla_XY) =$$

$$\mathcal{H}J^i(\bar\nabla_XY)) - \mathcal{H}J^i(\nabla_XY) = 0.$$

отсюда уже нетрудно вывести, что распределение этих подпространств параллельно вдоль $\mathcal{O}$.

Доказательство утверждения про общий слой расслоения π можно найти в [34]. Теорема доказана.

Поле ξ^1 соответствует подгруппе S^1 в $Sp(1)$ либо в $SO(3)$. Таким образом, можно рассмотреть одномерное слоение $\mathcal{F}'$ на M, порожденное полем ξ^1. Совершенно аналогично предыдущей теореме, можно доказать, что на пространстве слоев слоения $\mathcal{F}'$ можно ввести структуру 6-мерного риманова орбифолда $\mathcal{Z}$, согласованную с римановой субмерсией $\pi' : M \to \mathcal{Z}$. Известно, что метрика на $\mathcal{Z}$ является метрикой Кэлера — Эйнштейна [34]. Орбифолд $\mathcal{Z}$ называется *твисторным пространством* многообразия M.

3-Сасакиево многообразие M называется *регулярным*, если регулярным является 3-сасакиево слоение $\mathcal{F}$. В этом случае каждый слой $\mathcal{F}$ диффеоморфен либо S^3, либо $SO(3)$ и орбифолды $\mathcal{O}$ и $\mathcal{Z}$ являются многообразиями.

Теорема 1.13 [34]. *Если M — компактное регулярное 3-сасакиево многообразие размерности 7, то M изометрично одному из следующих однородных пространств:*

$$S^7,\ \mathbb{R}P^7,\ SU(3)/T_{1,1},$$

где через $T_{1,1}$ обозначена окружность $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, вложенная в максимальный тор $T^2 \subset SU(3)$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}^2 \end{pmatrix}.$$

1.3 Группы голономии лоренцевых пространств

Пусть (N, g) — псевдориманово многообразие сигнатуры (p, q). В этом случае определения связности Леви — Чивита и группы голономии дословно совпадают с римановым случаем, с той разницей, что $\mathrm{Hol}(N) \subset O(p, q)$. Также без изменения остается теорема Амброза-Зингера: при ее доказательстве положительная определенность метрики g не требуется.

Однако дальше начинается важное различие: наряду с неприводимыми представлениями голономиями возникают неразложимые представления голономии, являющиеся приводимыми. Более подробно, $G = \mathrm{Hol}_p(N)$ — группа голономии псевдориманова многообразия (N, g), $p \in N$. Представление голономии называется *разложимым*, если существует G-инвариантное разложение

$$T_pN = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r,$$

такое что $r \geq 2$ и $W_i \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$. В противном случае представление называется *неразложимым*. Представление голономии называется *неприводимым*, если не существует нетривиального собственного G-инвариантного подпространства $W \subset T_pN$. В случае, если метрика g — риманова, приводимость позволяет выделить инвариантное относительно G подпространство V_1 в T_pN и рассмотреть его инвариантное ортогональное дополнение $V_2 = V_1^{\perp}$. При этом в силу положительной определенности метрики g будет иметь место инвариантное относительно G разложение $T_pN = V_1 \oplus V_2$ и мы получаем разложимость представления голономии. В неримановом случае подпространство V_1 может содержать вектор нулевой длины (изотропный вектор) и описанного разложения не будет.

Теорема де Рама обобщается на общий псевдориманов случай следующим образом:

Теорема 1.2′ [77, 90]. *Пусть (M, g) — риманово многообразие с раз-*

ложимым представлением голономии. Пусть

$$T_pM = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r,$$

где $r \geq 2$, $W_j \neq 0$ *для всех* j. *Тогда* (M, g) *локально изометрично прямому произведению* $(\mathbb{R}^{k_1}, g_1) \times \ldots \times (\mathbb{R}^{k_r}, g_r)$, *где* $k_j = \dim W_j$, *и* $Hol_p^0(M) = H_1 \times \ldots \times H_r$, *где* $H_j \subset O(W_j, g_j)$.

Более того, если (M, g) *односвязно и геодезически полно, то* (M, g) *(глобально) изометрично произведению* $(M_1, g_1) \times \ldots \times (M_r, g_r)$, *причем группа* H_j *является группой голономии* (M_j, g_j).

В работах [31, 39] был получен список кандидатов в неприводимые группы голономии псевдоримановых многообразий, и в [39] все эти группы были реализованы как группы голономии псевдоримановых пространств. При анализе списка из [31, 39] видно, что в лоренцевом случае, который нас здесь и интересует, не может быть неприводимых групп голономии, кроме $SO(n+1, 1)$. Таким образом, задача классификации специальных групп голономии лоренцевых пространств сводится к исследованию неразложимых представлений голономии, не являющихся неприводимыми.

Рассмотрим односвязное, ориентированное во времени лоренцево многообразие N размерности $n+2$, т.е. псевдориманово пространство с метрикой g сигнатуры $(n+1, 1)$. Пусть $p \in N$, $G = \mathrm{Hol}_p(N) \subset SO(n+1, 1) = \mathrm{Iso}(T_pN)$ — его группа голономии. Имея в виду цитированную выше теорему де Рама для псевдоримановых пространств, везде в дальнейшем многообразие N будет предполагаться неразложимым. Ввиду отсутствия неприводимых лоренцевых многообразий, будем также считать, что N приводимо.

Следовательно, существует собственное подпространство V в T_pN, инвариантное относительно G, на котором метрика g вырождена. Значит возникает одномерное распределение $L = V \cap V^{\perp}$ и $(n+1)$-мерное распределение $U = L^{\perp} \supset L$, являющиеся инвариантными относительно

G. Нетрудно увидеть, что на n-мерном пространстве $\tilde{U}=U/L$ метрика g корректно определяет положительно определенное скалярное произведение, и группа G индуцирует действие некоторой группы $H\subset SO(n)$ на $\tilde{U}$. Группа H называется ортогональной частью группы голономии G. Из [70] следует, что если G является группой голономии лоренцева многообразия, то H является группой голономии риманова многообразия, т.е. либо принадлежит списку Берже, либо является группой изотропии симметрического пространства, либо является произведением таких групп.

Рассмотрим изотропный базис в пространстве T_pN, т.е. базис, в котором метрика g задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & E_n & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Мы получаем следующее представление алгебры $\mathbf{so}(n+1,1)$:

$$\mathbf{so}(n+1,1)=\left\{\begin{pmatrix} a & X & 0\\ -Y^T & A & -X^T\\ 0 & Y & -a\end{pmatrix}|A\in\mathbf{so}(n),X,Y\in\mathbb{R}^n,a\in\mathbb{R}\right\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что L порождено первым координатным вектором. Тогда алгебра Ли группы $SO(n+1,1)_L$, сохраняющей L задается следующим образом:

$$\mathbf{so}(n+1,1)_L=\left\{\begin{pmatrix} a & X & 0\\ 0 & A & -X^T\\ 0 & 0 & -a\end{pmatrix}|a\in\mathbb{R},X\in\mathbb{R}^n,A\in\mathbf{so}(n)\right\}.$$

В [33] было предпринято изучение алгебр Ли $\mathbf{g}$, отвечающих возможным группам голономии $G\subset SO(n+1,1)$. Пусть $\mathbf{h}$ — алгебра Ли ортогональной части H группы $G\subset SO(n+1,1)_L$. В [33] доказано, что алгебра $\mathbf{g}$ может принадлежать лишь одному из следующих четырех типов:

$$\mathbf{g}^{1,\mathbf{h}}=\left\{\begin{pmatrix} a & X & 0\\ 0 & A & -X^T\\ 0 & 0 & -a\end{pmatrix}|a\in\mathbb{R},X\in\mathbb{R}^n,A\in\mathbf{h}\subset\mathbf{so}(n)\right\};$$

$$\mathbf{g}^{2,\mathbf{h}}=\left\{\begin{pmatrix}0&X&0\\0&A&-X^T\\0&0&0\end{pmatrix}|X\in\mathbb{R}^n,A\in\mathbf{h}\subset\mathbf{so}(n)\right\};$$

$$\mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi}=\left\{\begin{pmatrix}\phi(A)&X&0\\0&A&-X^T\\0&0&-\phi(A)\end{pmatrix}|X\in\mathbb{R}^n,A\in\mathbf{h}\subset\mathbf{so}(n)\right\},$$

где центр $Z(\mathbf{h})$ алгебры $\mathbf{h}$ нетривиален и $\phi:\mathbf{h}\to\mathbb{R}$ — ненулевое линейное отображение, такое что $\phi|_{\mathbf{h}'}=0$ (через $\mathbf{h}'$ мы обозначаем коммутант алгебры Ли $\mathbf{h}$);

$$\mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi}=\left\{\begin{pmatrix}0&X&\psi(A)&0\\0&A&0&-X^T\\0&0&0&-\psi(A)^T\\0&0&0&0\end{pmatrix}|X\in\mathbb{R}^m,A\in\mathbf{h}\subset\mathbf{so}(m)\right\},$$

где $0<m<n$, $\dim Z(\mathbf{h})\geq n-m$ и $\psi:\mathbf{h}\to\mathbb{R}^{n-m}$ — сюръективное линейное отображение, такое что $\psi|_{\mathbf{h}'}=0$.

Пусть $T^r\subset H$ — центр группы H. Обозначим через $\mathrm{Det}:H\to T^r$ однозначно определенный гомоморфизм, такой, что $\mathrm{Det}^{-1}(1)\subset H$ — полупростая часть H. Указанные выше алгебры являются касательными алгебрами Ли следующих подгрупп $SO(n+1,1)$:

$$G^{1,H}=\left\{\begin{pmatrix}e^a&X&-\frac{1}{2}e^{-a}XX^T\\0&A&-e^{-a}AX^T\\0&0&e^{-a}\end{pmatrix}|a\in\mathbb{R},X\in\mathbb{R}^n,A\in H\subset SO(n)\right\};$$

$$G^{2,H}=\left\{\begin{pmatrix}1&X&-\frac{1}{2}XX^T\\0&A&-AX^T\\0&0&1\end{pmatrix}|X\in\mathbb{R}^n,A\in H\right\};$$

$$G^{3,H,\phi}=\left\{\begin{pmatrix}e^{\phi(a_1,\dots,a_r)}&X&-\frac{1}{2}e^{-a}XX^T\\0&A&-e^{-a}AX^T\\0&0&e^{-\phi(a_1,\dots,a_r)}\end{pmatrix}|X\in\mathbb{R}^n,A\in H,\right.$$
$$\left.\mathrm{Det}(A)=(e^{ia_1},\dots,e^{ia_r})\in T^r\right\};$$

$$G^{4,H,m,\psi}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & X & \psi(a_1,\dots,a_r) & -\frac{1}{2}(XX^T+YY^T)\\ 0 & A & 0 & -AX^T\\ 0 & 0 & E_m & -\psi(a_1,\dots,a_r)^T\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid \right.$$

$$\left. X\in\mathbb{R}^{n-m}, A\in H\subset SO(n-m), \mathrm{Det}(A)=(e^{ia_1},\dots,e^{ia_r})\right\}.$$

Заметим, что подгруппы $G^{3,H,\phi}$, $G^{4,H,m,\psi}$ могут не быть замкнутыми подгруппами в $SO(n+1,1)$ [33]. В [50] каждая группа одного из указанных выше типов $G^{1,H}$, $G^{1,H}$, $G^{3,H,\phi}$ и $G^{4,H,m,\psi}$ реализована как группа голономии локально определенной лоренцевой метрики (не удовлетворяющей никаким дополнительным условиям полноты либо причинности).

Таким образом, все вышесказанное можно суммировать следующим образом.

Теорема 1.8 [33, 50]. *Если (N,g) — лоренцево многообразие размерности $n+2$, то его группа голономии принадлежит одному из четырех типов $G^{1,H}$, $G^{1,H}$, $G^{3,H,\phi}$ и $G^{4,H,m,\psi}$, где H — группа голономии некоторого риманова многообразия размерности n. Более того, существуют (локально определенные) лоренцевы метрики, реализующие каждый из указанных типов групп голономии.*

Глава 2

Римановы пространства с группой голономии $Spin(7)$ и G_2

2.1 Римановы пространства со $Spin(7)$-структурой, связанные с 3-сасакиевым многообразием

В этой главе мы предлагаем общую конструкцию, которая позволяет строить метрики с группой голономии $Spin(7)$ по заданному 3-сасакиеву 7-мерному многообразию M. Идея состоит в следующем. Если выбрать 3-сасакиево многообразие M, то конус над M будет иметь группу голономии $Sp(2) \subset Spin(7)$. Мы деформируем конусную метрику так, чтобы разрешить особенность в вершине конуса и получить метрику, группа голономии которой не станет больше, чем $Spin(7)$. При этом за деформацию отвечают функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$, зависящие от радиальной переменной t, меняющейся вдоль образующей конуса.

Более подробно, рассмотрим семимерное 3-сасакиево многообразие M с римановой метрикой g и соответствующее 3-сасакиево расслоение $\pi : M \to \mathcal{O}$ с общим слоем, диффеоморфным S^3 либо $SO(3)$, над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$. Как и ранее, через $\mathcal{Z}$ будем обозначать твисторное пространство 3-сасакиева многообразия M. С многообразием M

свяжем два орбифолда $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, разрешающих конусную особенность $\bar{M}$ следующими двумя способами.

1. Рассмотрим стандартное действие на $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ группы $Sp(1)$, представленной единичными кватернионами, и соответствующее действие $SO(3) = Sp(1)/\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$:

$$q \in Sp(1) : x \in \mathbb{H} \mapsto qx \in \mathbb{H}.$$

Пусть $\mathcal{M}_1$ — расслоенное пространство со слоем $\mathbb{R}^4$ либо $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$, ассоциированное с главным расслоением $\pi : M \to \mathcal{O}$ относительно рассмотренного действия. Таким образом, орбифолд $\mathcal{O}$ вложен в $\mathcal{M}_1$ в качестве нулевого слоя, а $\mathcal{M}_1 \backslash \mathcal{O}$ расслаивается на сферические сечения, диффеоморфные M. Пусть $t = |x|$, для $x \in \mathbb{H}$. Очевидно, что при $t \to 0$ каждый слой расслоения π коллапсирует в точку, а сферическое сечение π коллапсирует к нулевому слою $\mathcal{O}$.

С другой стороны, очевидно, что существует диффеоморфизм

$$\mathcal{M}_1 \backslash \mathcal{O} \to \bar{M} \backslash \{*\},$$

позволяющий разрешить конусную особенность $\{*\}$ в $\bar{M}$.

2. Пусть $S \simeq S^1$ — подгруппа в $Sp(1)$ либо $SO(3)$, интегрирующая поле Киллинга ξ^1. Рассмотрим действие S на $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$:

$$e^{i\phi} \in S : z \in \mathbb{C} \to z e^{i\phi} \in \mathbb{C}.$$

Расслоение $M \to \mathcal{Z}$ является главным со структурной группой S. Пусть $\mathcal{M}_2$ — расслоенное пространство со слоем $\mathbb{R}^2$, ассоциированное с $\pi' : M \to \mathcal{Z}$. Таким образом, орбифолд $\mathcal{Z}$ вложен в $\mathcal{M}_2$ в качестве нулевого слоя, а $\mathcal{M}_2 \backslash \mathcal{Z}$ расслаивается на сферические сечения, диффеоморфные M. Аналогично предыдущему случаю положим $t = |z|$, где $z \in \mathbb{C}$. Тогда при $t \to 0$ каждый слой расслоения π' коллапсирует в точку, а сферическое сечение коллапсирует к нулевому слою $\mathcal{Z}$.

Как и ранее, очевиден диффеоморфизм, осуществляющий разрешение конусной особенности:

$$\mathcal{M}_2 \backslash \mathcal{Z} \to \bar{M} \backslash \{*\},$$

Нам потребуется следующая модификация этой конструкции. Для любого натурального числа p существует очевидное вложение $\mathbb{Z}_p \subset S$, причем $\mathbb{Z}_p$ действует на $\mathcal{M}_2$ изометриями. Следовательно, корректно определен орбифолд $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, являющийся многообразием в точности тогда, когда многообразием является $\mathcal{M}_2$. Легко понять, что $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ является расслоением со слоем $\mathbb{C}$, ассоциированным с главным расслоением $\pi' : M \to \mathcal{Z}$ при помощи действия

$$e^{i\phi} \in S : z \in \mathbb{C} \to z e^{ip\phi} \in \mathbb{C}.$$

Нетрудно понять, что $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ разрешает конусную особенность схожим образом с $\mathcal{M}_2$: каждая окружность (укороченная «в p раз») коллапсирует в точку.

В случае, если 3-сасакиево многообразие регулярно, то каждый слой π диффеоморфен либо $S^3 = Sp(1)$, либо $SO(3)$ и орбифолды $\mathcal{O}$ и $\mathcal{Z}$ являются гладкими многообразиями. И обратно, наличие «особого» слоя означает существование точек с нетривиальной униформизующей группой у пространств $\mathcal{O}$ и $\mathcal{Z}$, а значит и у пространств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Таким образом, учитывая теорему ? находим, что пространства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ могут являться гладкими многообразиями только при $M = S^7$, $M = \mathbb{R}P^7$ и $M = SU(3)/T_{1,1}$. В случае $M = S^7$ оба пространства являются гладкими 8-мерными многообразиями. Если $M = \mathbb{R}P^7$ либо $M = SU(3)/T_{1,1}$, то общий слой равен $SO(3)$ и многообразием является лишь соответствующее пространство $\mathcal{M}_2$.

Пользуясь обозначениями из параграфа 1.2, рассмотрим на $(0,\infty)\times M$ следующую метрику:

$$\bar{g} = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \eta_i^2 + B(t)^2 g|_{\mathcal{H}}, \tag{2.1}$$

где функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ и $B(t)$ определены на промежутке $(0,\infty)$. Локально можно выбрать ортонормированную систему 1-форм $\eta_4,\eta_5,\eta_6,\eta_7$, порождающую аннулятор вертикального подрасслоения $\mathcal{V}$ так, что

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2(\eta_4\wedge\eta_5-\eta_6\wedge\eta_7),\\ \omega_2 &= 2(\eta_4\wedge\eta_6-\eta_7\wedge\eta_5),\\ \omega_3 &= 2(\eta_4\wedge\eta_7-\eta_5\wedge\eta_6).\end{aligned}$$

Пусть $\Omega=\eta_4\wedge\eta_5\wedge\eta_6\wedge\eta_7=-\frac{1}{8}\omega_1\wedge\omega_1=-\frac{1}{8}\omega_2\wedge\omega_2=-\frac{1}{8}\omega_3\wedge\omega_3$ — подъем формы объема кватернионно-кэлерова орбифолда $\mathcal{O}$.

Рассмотрим следующую 4-форму:

$$\Phi=e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3+B^4\Omega+\frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^1-e^2\wedge e^3)\wedge\omega_1+$$

$$\frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^2-e^3\wedge e^1)\wedge\omega_2+\frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^3-e^1\wedge e^2)\wedge\omega_3,$$

где

$$\begin{aligned}&e^0=dt,\\ &e^i=A_i\eta_i, i=1,2,3,\\ &e^j=B\eta_j, j=4,\dots,7\end{aligned}$$

Очевидно, что форма Φ определена глобально на $\bar{M}$ и локально совпадает с формой Φ_0, определенной в (1.5), задающей $Spin(7)$-структуру на $\bar{M}$.

Пользуясь очевидными тождествами

$$\begin{aligned}&d\eta_i=\omega_i-2\eta_{i+1}\wedge\eta_{i+2},\\ &d\omega_i=2d(\eta_{i+1}\wedge\eta_{i+2})=2(\omega_{i+1}\wedge\eta_{i+2}-\eta_{i+1}\wedge\omega_{i+2}),\ i=1,2,3 \mod 3,\end{aligned}$$

мы получаем следующие соотношения, замыкающие внешнюю алгебру рассмотренных форм:

$$\begin{aligned}&de^0=0,\\ &de^i=\tfrac{A_i'}{A_i}e^0\wedge e^i+A_i\omega_i-\tfrac{2A_i}{A_{i+1}A_{i+2}}e^{i+1}\wedge e^{i+2},\ i=1,2,3 \mod 3,\\ &d\omega_i=\tfrac{2}{A_{i+2}}\omega_{i+1}\wedge e^{i+2}-\tfrac{2}{A_{i+1}}e^{i+1}\wedge\omega_{i+2},\ i=1,2,3 \mod 3.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Из предложения 1.10, определенная нами $Spin(7)$-структура не имеет кручения в точности тогда, когда она удовлетворяет условию замкнутости (1.6).

Следующее утверждение получается непосредственными вычислениями при помощи соотношений (2.2).

Лемма 2.1. *Условие (1.6) эквивалентно следующей нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{array}{l} A_1' = \frac{2A_1^2}{B^2} + \frac{(A_2-A_3)^2-A_1^2}{A_2A_3}, \\ A_2' = \frac{2A_2^2}{B^2} + \frac{(A_3-A_1)^2-A_2^2}{A_1A_3}, \\ A_3' = \frac{2A_3^2}{B^2} + \frac{(A_1-A_2)^2-A_3^2}{A_1A_2}, \\ B' = -\frac{A_1+A_2+A_3}{B}. \end{array} \tag{2.3}$$

Доказательство. Имеем,

$$d\Omega = -\frac{1}{4}d\omega_1 \wedge \omega_1 = -\frac{1}{2}(\omega_2 \wedge \eta_3 - \eta_2 \wedge \omega_3) \wedge \omega_1 = 0$$

(чего и следовало ожидать, поскольку Ω — поднятая форма объема). Далее

$$d\Phi = -e^0 \wedge de^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + e^0 \wedge e^1 \wedge de^2 \wedge e^3 - e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge de^3 +$$

$$4B^3B'e^0 \wedge \Omega - BB'e^0 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge \omega_1 +$$

$$\frac{1}{2}B^2(-e^0 \wedge de^1 - de^2 \wedge e^3 + e^2 \wedge de^3) \wedge \omega_1 +$$

$$B^2(e^0 \wedge e^1 - e^2 \wedge e^3) \wedge \left(\frac{1}{A_3}\omega_2 \wedge e^3 - \frac{1}{A_2}e^2 \wedge \omega_3\right) - BB'e^0 \wedge e^3 \wedge e^1 \wedge \omega_2 +$$

$$\frac{1}{2}B^2(-e^0 \wedge de^2 - de^3 \wedge e^1 + e^3 \wedge de^1) \wedge \omega_2 +$$

$$B^2(e^0 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^1) \wedge \left(\frac{1}{A_1}\omega_3 \wedge e^1 - \frac{1}{A_3}e^3 \wedge \omega_1\right) - BB'e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge \omega_3 +$$

$$\frac{1}{2}B^2(-e^0 \wedge de^3 - de^1 \wedge e^2 + e^1 \wedge de^2) \wedge \omega_3 +$$

$$B^2(e^0 \wedge e^3 - e^1 \wedge e^2) \wedge \left(\frac{1}{A_2}\omega_1 \wedge e^2 - \frac{1}{A_1}e^1 \wedge \omega_2\right) =$$

$$-A_1e^0 \wedge \omega_1 \wedge e^2 \wedge e^3 + A_2e^0 \wedge e^1 \wedge \omega_2 \wedge e^3 - A_3e^0 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge \omega_3 +$$

$$4B^3B'e^0\wedge\Omega - BB'e^0\wedge e^2\wedge e^3\wedge\omega_1 - \frac{1}{2}B^2e^0\wedge\left(A_1\omega_1 - \frac{A_1}{A_2A_3}e^2\wedge e^3\right)\wedge\omega_1 -$$

$$\frac{1}{2}B^2\left(\frac{A_2'}{A_2}e^0\wedge e^2 + A_2\omega_2\right)\wedge e^3\wedge\omega_1 + \frac{1}{2}B^2e^2\wedge\left(\frac{A_3'}{A_3}e^0\wedge e^3 + A_3\omega_3\right)\wedge\omega_1 +$$

$$B^2(e^0\wedge e^1 - e^2\wedge e^3)\wedge\left(\frac{1}{A_3}\omega_2\wedge e^3 - \frac{1}{A_2}e^2\wedge\omega_3\right) -$$

$$BB'e^0\wedge e^3\wedge e^1\wedge\omega_2 - \frac{1}{2}B^2e^0\wedge\left(A_2\omega_2 - \frac{A_2}{A_3A_1}e^3\wedge e^1\right)\wedge\omega_2 -$$

$$\frac{1}{2}B^2\left(\frac{A_3'}{A_3}e^0\wedge e^3 + A_3\omega_3\right)\wedge e^1\wedge\omega_2 + \frac{1}{2}B^2e^3\wedge\left(\frac{A_1'}{A_1}e^0\wedge e^1 + A_1\omega_1\right)\wedge\omega_2 +$$

$$B^2(e^0\wedge e^2 - e^3\wedge e^1)\wedge\left(\frac{1}{A_1}\omega_3\wedge e^1 - \frac{1}{A_3}e^3\wedge\omega_1\right) -$$

$$BB'e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge\omega_3 - \frac{1}{2}B^2e^0\wedge\left(A_3\omega_3 - \frac{A_3}{A_1A_2}e^1\wedge e^2\right)\wedge\omega_3 -$$

$$\frac{1}{2}B^2\left(\frac{A_1'}{A_1}e^0\wedge e^1 + A_1\omega_1\right)\wedge e^2\wedge\omega_3 + \frac{1}{2}B^2e^1\wedge\left(\frac{A_2'}{A_2}e^0\wedge e^2 + A_2\omega_2\right)\wedge\omega_3 +$$

$$B^2(e^0\wedge e^3 - e^1\wedge e^2)\wedge\left(\frac{1}{A_2}\omega_1\wedge e^2 - \frac{1}{A_1}e^1\wedge\omega_2\right) =$$

$$4B^2\left(BB' + A_1 + A_2 + A_3\right)e^0\wedge\Omega +$$

$$\left(-A_1 - BB' + \frac{A_1B^2}{A_2A_3} - \frac{A_2'B^2}{2A_2} - \frac{A_3'B^2}{2A_3} - \frac{B^2}{A_3} - \frac{B^2}{A_2}\right)e^0\wedge\omega_1\wedge e^2\wedge e^3 +$$

$$\left(-A_2 - BB' + \frac{A_2B^2}{A_3A_1} - \frac{A_3'B^2}{2A_3} - \frac{A_1'B^2}{2A_1} - \frac{B^2}{A_1} - \frac{B^2}{A_3}\right)e^0\wedge\omega_2\wedge e^3\wedge e^1 +$$

$$\left(-A_3 - BB' + \frac{A_3B^2}{A_1A_2} - \frac{A_1'B^2}{2A_1} - \frac{A_2'B^2}{2A_2} - \frac{B^2}{A_2} - \frac{B^2}{A_1}\right)e^0\wedge\omega_2\wedge e^3\wedge e^1.$$

Значит условие (1.6) равносильно следующим соотношениям:

$$BB' + A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$

$$A_2 + A_3 - \frac{B^2}{A_3} - \frac{B^2}{A_2} + \frac{A_1B^2}{A_2A_3} - \frac{A_2'B^2}{2A_2} - \frac{A_3'B^2}{2A_3} = 0,$$

$$A_3 + A_1 - \frac{B^2}{A_1} - \frac{B^2}{A_3} + \frac{A_2 B^2}{A_3 A_1} - \frac{A_3' B^2}{2A_3} - \frac{A_1' B^2}{2A_1} = 0,$$
$$A_1 + A_2 - \frac{B^2}{A_2} - \frac{B^2}{A_1} + \frac{A_3 B^2}{A_1 A_2} - \frac{A_1' B^2}{2A_1} - \frac{A_2' B^2}{2A_2} = 0.$$

Разрешая эти соотношения относительно производных, получаем систему (2.3). Лемма доказана.

Метрика (2.1) при выполнении определенных граничных условий даст гладкую риманову метрику на $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$. Следующие леммы проясняют эти условия.

Лемма 2.2. *Пусть $A_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $B(t)$ — C^∞-гладкое на промежутке $[0, \infty)$ решение системы (2.3). Тогда метрика (2.1) продолжается до гладкой метрики на $\mathcal{M}_1$ в том, и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*

(1) $A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0, |A_1'(0)| = |A_2'(0)| = |A_3'(0)| = 1$;

(2) $B(0) \neq 0, B'(0) = 0$;

(3) функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$ знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Лемма 2.3. *В условиях предыдущей леммы, пусть $p = 4$ либо $p = 2$, в зависимости от того, изометричен общий слой M или $Sp(1)$, или $SO(3)$. Для того, чтобы метрика (2.1) продолжалась до гладкой метрики на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

(1) $A_1(0) = 0, |A_1'(0)| = 4$;

(2) $A_2(0) = -A_3(0) \neq 0, A_2'(0) = A_3'(0)$,

(3) $B(0) \neq 0, B'(0) = 0$;

(4) функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$ знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Леммы 2.2 и 2.3 будут доказаны в параграфе 2.4.

Прежде чем перейти к исследованию системы (2.3), выведем известные нам на данный момент точные решения этой системы. Если положить $A_1 = A_2 = A_3$, то система (2.3) сводится к паре уравнений на функции $A = A_1 = A_2 = A_3$, B:

$$\begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = 2\frac{A^2}{B^2} - 1, \\ \frac{dB}{dt} = -3\frac{A}{B}. \end{array}$$

Введем новую переменную ρ:

$$\frac{d\rho}{dt} = 3\frac{A}{B}.$$

Тогда из второго уравнения $\frac{dB}{d\rho} = -1$ и мы можем считать, что $B(\rho) = -\rho$. Следовательно, первое уравнение переписывается в виде:

$$\frac{d(A^2)}{d\rho} + \frac{4}{3}\frac{A^2}{\rho} = \frac{2}{3}\rho.$$

Последнее уравнение без труда решается, и мы получаем

$$A^2(\rho) = \frac{1}{5}\rho^2\left(1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{10}{3}}\right).$$

Наконец, нормируя полученное решение заменой $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$ мы получаем следующую метрику на $\mathcal{M}_1$ с группой голономии $Spin(7)$ [40]:

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{10}{3}}} + \frac{9}{25}r^2\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{10}{3}}\right)\sum_{i=1}^{3}\eta_i^2 + \frac{9}{5}r^2 g|_{\mathcal{H}}. \tag{2.4}$$

Отметим, что метрика (2.4) была первым примером полной метрики с группой голономии $Spin(7)$.

Далее, если положить $A_2 = A_3$, то система (2.3) также поддается явному интегрированию в терминах гипергеометрических функций, и мы приходим к следующей метрике на $\mathcal{M}_1$:

$$\bar{g} = \frac{vf dz^2}{4z(1-z^2)(1-z)(v-2)} + \frac{16(v-2)zf}{(1+z)v^3}\eta_1^2 + \frac{4(v-2)zf}{(1+z)v}(\eta_2^2 + \eta_3^2) + fg|_{\mathcal{H}}, \tag{2.5}$$

где

$$v(z) = \frac{2k\sqrt{z}}{(1-z^2)^{\frac{1}{4}}} - 2z\ {}_2F_1[1, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 1-z^2],$$

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\int^z \frac{dz'}{v(z')(1-z'^2)}\right],$$

k — константа интегрирования.

При $k = 0$ мы получаем следующую метрику на $\mathcal{M}_1$, выражаемую в элементарных функциях:

$$\bar{g} = \frac{(r-r_0)^2}{(r+r_0)(r-3r_0)}dr^2 + 4r_0^2\frac{(r+r_0)(r-3r_0)}{(r-r_0)^2}\eta_1^2$$
$$+(r+r_0)(r-3r_0)(\eta_2^2+\eta_3^2) + 2(r^2-r_0^2)g|_{\mathcal{H}}. \qquad (2.6)$$

Метрики (2.5) и (2.6) были найдены в [53] для $M = S^4$.

Наконец, если положить $A_2 = -A_3$, то система (2.3) становится вообще говоря переопределенной. Если сложить второе и третье уравнения, то мы получим, что с необходимостью $A_2^2 = A_3^2 = B^2$. Положив для определенности $A_2 = -B$, $A_3 = B$, мы приходим к системе из двух уравнений:

$$\begin{aligned} \tfrac{dA_1}{dt} &= \tfrac{3A_1^2-4B^2}{B^2}, \\ \tfrac{dB}{dt} &= -\tfrac{A_1}{B}. \end{aligned}$$

Как и ранее, делаем замену

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A_1}{B},$$

откуда находим $B(r) = -r$, и получаем следующее уравнение для A_1:

$$\frac{d(A_1)^2}{dr} + 6\frac{A_1^2}{r} = 8r.$$

Последнее уравнение интегрируется, и мы приходим к следующей метрике на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ (где $p = 4$ или $p = 2$, в зависимости от общего слоя M как в лемме 5) имеющую группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$:

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^8} + r^2\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^8\right)\eta_1^2 + r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) + r^2 g|_{\mathcal{H}}. \qquad (2.7)$$

Насколько нам известно, эта метрика была впервые описана в [32, 75].

2.2 Метрики на пространстве $\mathcal{M}_2$

Следующие определения характеризуют поведение рассматриваемых метрик на бесконечности. Метрика (2.1) называется *конической*, если функции $A_i(t), B(t)$ являются линейными по t и среди них нет постоянных функций. Например, метрика на конусе $\bar{M}$ получается при $A_i = B = t$. Метрика (2.1) называется *локально конической*, если функции $A_i(t), B(t)$ являются линейными по t. Такие метрики локально выглядят как прямое произведение конической метрики на метрику не зависящую от t. Наконец, метрика (2.1), определяемая функциями $A_i(t), B(t)$ называется *асимптотически (локально) конической* (сокращенно АЛК, либо АК), если найдутся функции $\tilde{A}_i(t), \tilde{B}(t)$, определяющие (локально) коническую метрику такие, что

$$\begin{array}{ll} |1 - \frac{A_i(t)}{\tilde{A}_i(t)}| \to 0, & \text{при} \ \ t \to \infty, \ i = 1, 2, 3, \\ |1 - \frac{B(t)}{\tilde{B}(t)}| \to 0, & \text{при} \ \ t \to \infty. \end{array}$$

Легко видеть, что все перечисленные выше метрики (2.4)-(2.7) являются АЛК.

Целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$ в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $Sp(1)$. Тогда на орбифолде $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида (2.1) с группой голономии $H \subset Spin(7)$:*

1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) = B(0) > 0$, то метрика $\bar{g}$ имеет группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$ и совпадает с АК-метрикой (2.7);

2) для каждого набора начальных значений $A_1(0) = 0$, $0 < -A_2(0) = A_3(0) < B(0)$ существует регулярная АЛК-метрика $\bar{g}$ с группой голономии $Spin(7)$. На бесконечности эти метрики стремятся к произведению конуса над твисторным пространством $\mathcal{Z}$ и окружности S^1.

Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_q$ вида (2.1) с параллельной $Spin(7)$-структурой, задаваемой формой Φ изометрична одной из указанных выше.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы. Дадим краткую схему доказательства. Мы предлагаем перейти от системы (2.3) на метрику $\bar{g}$ к системе на конформный класс метрики $\bar{g}$. Для этого мы нормируем вектор-функцию $(A_i(t), B(t))$ и получаем динамическую систему (2.8) на S^3. При этом сама метрика $\bar{g}$ восстанавливается по своему конформному классу. Оказывается, что для того, чтобы метрика $\bar{g}$ была АЛК, нужно, чтобы траектория нормированной системы стремилась к стационарной точке (либо к условно стационарной, понятие которой мы вводим ниже). Далее, мы доказываем, что при заданных начальных данных, диктуемых условиями регулярности, существует исходящая траектория нормированной системы. Наконец, при помощи специально подобранных направляющих функций нормированной системы мы выясняем асимптотическое поведение траекторий, доказываем сходимость к (условно) стационарным точкам.

Рассмотрим стандартное пространство $\mathbb{R}^4$ и обозначим через $R(t) \in \mathbb{R}^4$ вектор, состоящий из функций $A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t)$. Определим функцию $V : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ следующим образом:

$$V(a_1, a_2, a_3, a_4) = (\tfrac{2a_1^2}{a_4^2} + \tfrac{(a_2-a_3)^2-a_1^2}{a_2a_3}, \tfrac{2a_2^2}{a_4^2} + \tfrac{(a_3-a_1)^2-a_2^2}{a_1a_3},$$
$$\tfrac{2a_3^2}{a_4^2} + \tfrac{(a_1-a_2)^2-a_3^2}{a_1a_2}, -\tfrac{a_1+a_2+a_3}{a_4})$$

(функция V, конечно, определена лишь в области, где $A_i, B \neq 0$). Таким образом, система (2.3) имеет вид:

$$\frac{dR}{dt} = V(R).$$

Пользуясь инвариантностью V относительно гомотетий $\mathbb{R}^4$, сделаем замену: $R(t) = f(t)S(t)$, где

$$|S(t)| = 1, f(t) = |R(t)|,$$
$$S(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)).$$

Таким образом, мы «нормируем» вектор-функцию R и наша система распадается на «радиальную» и «тангенциальную» части:

$$\frac{dS}{du} = V(S) - \langle V(S), S\rangle S = W(S), \tag{2.8}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{f}\frac{df}{du} = \langle V(S), S\rangle, \\ dt = f du. \end{array} \tag{2.9}$$

Следовательно, нужно сначала решить автономную систему (2.8) на трехмерной сфере $S^3 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) | \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 = 1\}$, и далее решения (2.3) находятся обычным интегрированием из уравнений (2.9).

Лемма 2.4. *Система (2.8) допускает дискретную группу симметрий $S_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, порожденную следующими преобразованиями:*

$$\begin{array}{l} \sigma \in S_3 : (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mapsto (\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \alpha_{\sigma(3)}, \alpha_4), \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_4), \\ (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u)) \mapsto (-\alpha_1(-u), -\alpha_2(-u), -\alpha_3(-u), \alpha_4(-u)) \end{array}$$

(через S_3 мы обозначаем симметрическую группу).

Рассмотрим двумерные «экваторы» на S^3:

$$\begin{array}{l} E_i = \{S \in S^3 | \alpha_i = 0\},\ i = 1, \ldots, 4, \\ E_{ij}^+ = \{S \in S^3 | \alpha_i + \alpha_j = 0\},\ i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j, \\ E_{ij}^- = \{S \in S^3 | \alpha_i - \alpha_j = 0\},\ i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j. \end{array}$$

Каждый из экваторов представляет собой стандартно вложенную двумерную сферу $S^2 \subset S^3$. Следующая лемма немедленно вытекает из симметрии системы (2.8) относительно перестановок функций A_i.

Лемма 2.5.*Сфера E_{ij}^- является инвариантной поверхностью динамической системы, определенной уравнениями (2.8).*

Лемма 2.6. *Стационарные решения системы (2.8) на S^3 исчерпываются следующим списком нулей векторного поля W:*

$$\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \pm\frac{\sqrt{10}}{4}\right),\ \pm\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right),$$

$$\pm\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right),\ \pm\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right).$$

Точку $S \in S^3$, в которой поле W не определено, назовем *условно стационарной* , если существует гладкая кривая $\gamma(u)$ на S^3, $u \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $\gamma(0) = S$ такая, что поле W определено во всех точках $\gamma(u)$, $u \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $u \neq 0$, и $\lim_{u\to 0} W(\gamma(u)) = 0$.

Лемма 2.7. *Система (2.8) обладает следующими условно стационарными точками на S^3:*

$$\pm\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \pm\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \pm\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Доказательство. Пусть точка $S = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 = 1$ является условно стационарной, т.е. существует кривая $\gamma(u)$, $u \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ с указанными выше свойствами. Очевидно, что конечный предел $\lim_{u\to 0} W(\gamma(u))$ существует лишь в следующих трех случаях, с точностью до симметрий, описанных в лемме 2.4: 1) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3$; 2) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\alpha_3$; 3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

1). Положим $\lim_{u\to 0} \frac{\alpha_2(u)-\alpha_3(u)}{\alpha_1(u)} = h$. Тогда непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to 0} W_1(\gamma(u)) = 0,\\
&\lim_{u\to 0} W_2(\gamma(u)) = \tfrac{2\alpha_2^2}{\alpha_4^2} - 2 - 2h - \alpha_2\left(\tfrac{4\alpha_2^3}{\alpha_4^2} - 6\alpha_2\right),\\
&\lim_{u\to 0} W_3(\gamma(u)) = \tfrac{2\alpha_2^2}{\alpha_4^2} - 2 + 2h - \alpha_2\left(\tfrac{4\alpha_2^3}{\alpha_4^2} - 6\alpha_2\right),\\
&\lim_{u\to 0} W_4(\gamma(u)) = -\tfrac{2\alpha_2}{\alpha_4} - \alpha_4\left(\tfrac{4\alpha_2^3}{\alpha_4^2} - 6\alpha_2\right).
\end{aligned}$$

Приравнивая указанные пределы к нулю, получаем условно стационарные точки $\pm(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Остальные точки получаются из найденных при помощи симметрий системы (2.8), описанных в лемме 2.4.

2). Положим $\lim_{u\to 0}\frac{\alpha_2(u)+\alpha_3(u)}{\alpha_1(u)}=h$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to 0}W_1(\gamma(u))=-4,\\
&\lim_{u\to 0}W_2(\gamma(u))=\tfrac{2\alpha_2^2}{\alpha_4^2}-2+2h,\\
&\lim_{u\to 0}W_3(\gamma(u))=\tfrac{2\alpha_2^2}{\alpha_4^2}-2+2h,\\
&\lim_{u\to 0}W_4(\gamma(u))=0.
\end{aligned}$$

Очевидно, что в этом случае условно стационарных точек нет.

3). Положим $\lim_{u\to 0}\frac{\alpha_1(u)}{\alpha_2(u)}=h$, $\lim_{u\to 0}\frac{\alpha_1(u)}{\alpha_3(u)}=f$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to 0}W_1(\gamma(u))=-2+\tfrac{f}{h}+\tfrac{h}{f}-hf,\\
&\lim_{u\to 0}W_2(\gamma(u))=-2+\tfrac{1}{f}+f-\tfrac{f}{h^2},\\
&\lim_{u\to 0}W_3(\gamma(u))=-2+\tfrac{1}{h}+h-\tfrac{h}{f^2},\\
&\lim_{u\to 0}W_4(\gamma(u))=0.
\end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что и в этом случае условно стационарных точек нет. Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Стационарным решениям системы (2.8) отвечают локально конические метрики на $\bar{M}$, а траекториям системы (2.8), асимптотически стремящимся к (условно) стационарным решениям отвечают асимптотически локально конические метрики на $\bar{M}$.*

Доказательство. Пусть S_0 — стационарное решение системы (2.8), т.е. $W(S_0)=0$. Интегрируя (2.9) получаем $f=e^{c_1u+c_2}$, где c_1,c_2 — константы, $c_1=\langle V(S_0),S_0\rangle$. Тогда $R(t)=f(t)S_0=(c_0+c_1t)S_0$, для некоторой константы c_0. Таким образом, $R(t)$ задает локально коническую метрику.

Пусть теперь S_0 — (условно) стационарное решение системы (2.8), и траектория $S(u)$ стремится к S_0 при $u\to\infty$. Ясно, что $W(S(u))\to 0$ при $u\to\infty$. Как и ранее, рассмотрим константу $c_1=\langle V(S_0),S_0\rangle$. В силу гладкости поля $V(S)$ вдоль кривой $S(u)$, можно сделать вывод, что функция $\langle V(S(u)),S(u)\rangle\to c_1$ при $u\to\infty$. Значит, $\frac{d}{du}(\ln f(u))\to c_1$ при $u\to\infty$, и мы мы заключаем, что функция f не может стремиться к нулю при $u\to\infty$. Следовательно,

$$t=t_0+\int_{u_0}^{u}f(\xi)d\xi\to\infty \text{ при } \ u\to\infty,$$

для некоторых констант u_0, t_0. Рассмотрим величину

$$\Delta = \left|1 - \frac{f(t)}{c_1 t}\right| = \frac{|c_1 t - f(t)|}{|c_1 t|}. \tag{2.10}$$

Если числитель правой части выражения (2.10) не стремится к ∞, то $\Delta \to 0$ при $u \to \infty$. В противном случае получаем:

$$\lim_{u\to\infty} \Delta = \left| \lim_{u\to\infty} \frac{c_1 \frac{dt}{du} - \frac{df}{du}}{c_1 \frac{dt}{du}} \right| = \left| \lim_{u\to\infty} \frac{c_1 - \frac{d}{du}(\ln f)}{c_1} \right| = 0.$$

Итак, $\Delta \to 0$ при $u \to \infty$, т.е. и при $t \to \infty$. Осталось заметить, что $R(t) = f(t)S(t)$, где $S(t) \to S_0$ при $t \to \infty$. Лемма доказана.

Замечание. Нетрудно увидеть, что траектория системы (2.8), отвечающая решению (2.4) сходится к стационарной точке $(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{10}}{4})$; траектория отвечающая решению (2.7) сходится к стационарной точке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; и траектории, отвечающие решениям (2.5) и (2.6) сходятся к условно стационарной точке $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Рассмотрим окружности $C_i^{\pm}$, $i = 1, 2, 3$, стандартно вложенные в S^3: $C_1^{\pm} = E_1 \cap E_{23}^{\pm}$, $C_2^{\pm} = E_2 \cap E_{31}^{\pm}$, $C_3^{\pm} = E_3 \cap E_{12}^{\pm}$. Пусть $Q_{\pm} = (0, 0, 0, \pm 1)$ — полюса сферы S^3, в которых пересекаются все рассмотренные окружности.

В силу леммы 2.3 для построения регулярной метрики на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ необходима траектория системы (2.8), выходящая из любой точки на окружностях C_i^+, отличной от полюсов $Q_{\pm}$. В виду леммы 2.4, мы можем без ограничения общности рассматривать в качестве начальной точки точку $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu)$, где $\lambda, \mu > 0$ и $2\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Остальные решения получатся из рассмотренного нами случая при помощи симметрий системы (2.8).

Лемма 2.9. *Для любой рассмотренной выше точки* $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu) \in C_1^+$ *существует единственная гладкая траектория системы (2.8), выходящая из точки* S_0 *в область* $\alpha_1 < 0$.

Доказательство. Пусть $J = C_1^+ \cap \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) | \alpha_3 > 0,\ \alpha_4 > 0\}$ — дуга окружности, содержащая точку S_0. Обозначим через U открытый шар в $\mathbb{R}^2$ с координатами $x=\alpha_1$, $y=\alpha_2+\alpha_3$ радиуса ε с центром в нуле. Тогда в окрестности дуги J можно рассмотреть локальные координаты $x, y, z=\alpha_4$. В этих координатах поле W имеет следующие компоненты:

$$W_x = W_1,\ W_y = W_2 + W_3,\ W_z = W_4,$$

где

$$\tilde{W}_j(S) = V_j(S) - \langle V(S), S\rangle \alpha_j,\ j = 1,2,3,4,$$

$$S = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) =$$

$$\begin{aligned}
&(x, \frac{1}{2}(y-\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2}), \frac{1}{2}(y+\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2}), z),\\
&V_1(S) = \quad -2+2\tfrac{x^2}{z^2}+2\tfrac{1-z^2-2x^2}{z^2+x^2+y^2-1},\\
&V_2(S) = \quad \tfrac{(y-\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2})^2}{2z^2}-2+\tfrac{2x}{y+\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2}}+\\
&\qquad \tfrac{y}{x}\tfrac{2\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2}}{y+\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2}},\\
&V_3(S) = \quad \tfrac{(y+\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2})^2}{2z^2}-2+\tfrac{2x}{y-\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2}}-\\
&\qquad \tfrac{y}{x}\tfrac{2\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2}}{y-\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2}},\\
&V_4(S) = \quad -\tfrac{x+y}{z},\\
&\langle V(S), S\rangle = \quad V_1(S)x+\tfrac{1}{2}V_2(S)(y-\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2})+\\
&\qquad \tfrac{1}{2}V_3(S)(y+\sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2})+V_4(S)z.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

В окрестности $J\times U$ рассмотрим систему

$$\frac{d}{dv}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xW_x \\ xW_y \\ xW_z \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Очевидно, что траектории системы (2.12) совпадают с траекториями системы (2.8) с точностью до замены параметра $du = xdv$. Векторное поле xW является гладким в окрестности $J\times U$, и непосредственные вычисления показывают, что при достаточно малых $\varepsilon>0$ стационарными точками системы (2.12) в $J \times U$ будут в точности точки интервала J. Рассмотрим линеаризацию системы (2.12) в окрестности точки S_0:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dv} &= -4x, \\ \tfrac{dy}{dv} &= -\tfrac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}x + 4y, \\ \tfrac{dz}{dv} &= 0. \end{aligned}$$

Линеаризованная система имеет три собственных вектора $e_1 = (8, \frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ с собственными числами -4, 4 и 0, соответственно.

Из (2.11) следует, что если $(x, y, z) \to S_0 = (0, 0, \mu)$, то $\langle (0, 0, 1), \frac{xW}{|xW|} \rangle \to 0$, т. е. угол между вектором xW и вектором, касательным к дуге J, стремится к $\pi/2$ при подходе к точкам J. Это позволяет восстановить «фазовый портрет» системы (2.12) в окрестности $J \times U$ аналогично тому, как это делается в классическом случае. А именно, рассмотрим область Γ в $J \times U$, ограниченную параболическими цилиндрами $-\frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}x + 8y - \alpha x^2 = 0$, $-\frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}x + 8y + \alpha x^2 = 0$ и плоскостью $x = \delta$, где $\alpha, \delta > 0$. Легко посчитать, что в точках первого параболического цилиндра

$$\frac{d}{dv}\left(-\frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}x + 8y - \alpha x^2\right) = 12\alpha x^2 + O(x^2 + y^2) \geq 0,$$

если выбрать константу α достаточно большой (причем равенство достигается только на J). Значит, траектории пересекают первый параболический цилиндр, проходя изнутри области Γ наружу. Аналогично показывается, что траектории системы (2.12) пересекают второй параболический цилиндр, ограничивающий область Γ также проходя изнутри области наружу. Тогда для каждого значения $z = z_0$ найдется траектория, начинающаяся на плоской стенке области в точке (δ, y, z_0), которая входит в точку на оси J, если выбрать δ достаточно малым, а α достаточно большим (это следует из того, что такая траектория не может сильно отклониться вдоль J, поскольку угол, который она составляет с J стремится к $\pi/2$). Следовательно, если фиксировать точку $S_0 = (0, 0, \mu)$

на дуге J, то при уменьшении δ и увеличении α можно найти траекторию, входящую экспоненциально с порядком e^{-4v} в точку S_0 со стороны области $x > 0$. Аналогично, будет существовать единственная траектория, входящая в S_0 с противоположной стороны, т.е. со стороны области $x < 0$. Поскольку порядок сходимости x к нулю равен e^{-4v}, то относительно параметра u произойдет «вход» в точку S_0 за конечное время.

Заметим теперь, что при переходе от параметра u к параметру v происходит обращение ориентации траекторий в области $x < 0$.Это означает, что для каждой точки S_0 существует единственная траектория, за конечное время выходящая из точки S_0 и входящая в область $x < 0$. При этом выходящая из S_0 траектория будет касаться вектора $e_1 = (-8, -\frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}, 0)$. Лемма доказана.

Таким образом, как следует из леммы 2.9, существует траектория $S(u)$ системы (2.8), выходящая при $u = u_0$ из точки S_0, а вместе с ней метрика на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, регулярная в некоторой окрестности нулевого сечения $\mathcal{O}$. Дальнейшая задача — выяснить поведение метрики при больших u.

Следующая лемма следует из непосредственного анализа систем (2.3) и (2.8).

Лемма 2.10. *Если $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ — решение системы (2.8), то имеют место следующие соотношения:*

$$
\begin{array}{ll}
1) & \frac{d}{du}\left(\ln\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|\right) = (\alpha_1 - \alpha_2)\left[\frac{2}{\alpha_4^2} - 2\frac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right], \\
2) & \frac{d}{du}(\alpha_2 + \alpha_3) = \frac{4}{\alpha_4^2}(\alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_4), \ \textit{если} \ \ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\
3) & \frac{d}{du}(\alpha_2 + \alpha_4) = \frac{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \ \textit{если} \ \ \alpha_2 + \alpha_4 = 0, \\
4) & \frac{d}{du}\left(\ln\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right|\right) = 2\frac{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_4)}{\alpha_2^2\alpha_4^2}, \ \textit{если} \ \ \alpha_1 = \alpha_2, \\
5) & \frac{d}{du}(\alpha_1 + \alpha_2) \to 16(\alpha_2 - \frac{1}{2})(\alpha_2 + \frac{1}{2}) \ \textit{если} \ \ \alpha_1 - \alpha_2 \to 0, \ \alpha_3 \to 0.
\end{array}
$$

Лемма 2.11. *Траектория системы (2.8), определенная начальной точкой $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu)$, $\lambda, \mu > 0$, $2\lambda^2 + \mu^2 = 1$ обладает одной из следующих асимптотик, в зависимости от параметра μ:*

1) если $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $S(u)$ стремится к при $u \to \infty$ к стационарной точке $S_\infty = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

2) если $\mu > \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $S(u)$ стремится к при $u \to \infty$ к условно стационарной точке $S_\infty = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$;

3) если $\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $S(u)$ стремится к при $u \to u_1 < \infty$ к точке $S_1 = (0, 0, 1, 0)$.

Доказательство. Введем обозначения для следующих точек в S^3:

$$
\begin{aligned}
&O = Q_+ = (0,0,0,1),\ A = (0, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}),\ B = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}),\\
&C = (0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ D = (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}),\ E = (0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0),\\
&F = (-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0), G = (0,0,1,0).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим две области $\Pi, \Gamma \subset S^3$, определенные неравенствами:

$$\Pi : \alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \le 0, \alpha_2 + \alpha_4 \ge 0, \alpha_3 \ge 0,$$

$$\Gamma : \alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \ge 0, \alpha_2 + \alpha_4 \le 0, \alpha_4 \ge 0.$$

Нетрудно убедиться, что области Π и Γ являются сферическими пирамидами $(OABCD)$ и $(GABEF)$, соответственно. Границами пирамид служат следующие множества:

$$
\begin{aligned}
&\Pi_1 = (OAC) = \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 + \alpha_3 \le 0, \alpha_2 + \alpha_4 \ge 0, \alpha_3 \ge 0\} \subset E_1,\\
&\Pi_2 = (OBD) = \{\alpha_2 = \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \le 0, \alpha_2 + \alpha_4 \ge 0, \alpha_3 \ge 0\} \subset E_{12}^-,\\
&\Pi_3 = (OCD) = \{\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_3 = 0, \alpha_2 + \alpha_4 \ge 0\} \subset E_3,\\
&\Pi_4 = (OAB) = \{\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \alpha_2 + \alpha_4 \ge 0\} \subset E_{23}^+,\\
&\Pi_5 = (ABCD) = \{\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \le 0, \alpha_2 + \alpha_4 = 0, \alpha_3 \ge 0\};\\
&\Gamma_1 = (GAE) = \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 + \alpha_3 \ge 0, \alpha_2 + \alpha_4 \le 0, \alpha_4 \ge 0\} \subset E_1,\\
&\Gamma_2 = (GBF) = \{\alpha_2 = \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \ge 0, \alpha_2 + \alpha_4 \le 0, \alpha_4 \ge 0\} \subset E_{12}^-,\\
&\Gamma_3 = (GEF) = \{\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \ge 0, \alpha_4 = 0\} \subset E_4,\\
&\Gamma_4 = (ABFE) = \{\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \alpha_2 + \alpha_4 \le 0, \alpha_4 \ge 0\} \subset E_{23}^+,\\
&\Gamma_5 = (GAB) = \{\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \ge 0, \alpha_2 + \alpha_4 = 0\}.
\end{aligned}
$$

Пирамиды пересекаются по общему участку границы (AB). Ясно, что по дуге (AB) от точки A до точки B идет траектория системы (2.8), отвечающая метрике (2.7) с группой голономии $SU(4)$. Начальная точка $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu) \in (OE)$.

1). Предположим, что $S_0 \in (OA)$. Если при этом $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. $S_0 = A$, то траектория совпадает с (AB). Пусть $S_0 \neq A$, т.е. $\mu > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда вектор e_1 (см. доказательство леммы 2.9) направлен строго внутрь области Π, т.е. при малых u траектория системы (2.8) попадает в Π. Предположим, что траектория за конечное время $u = u_1$ впервые достигает границы в некоторой точке S_1.

Определим функцию F_1 на S^3: $F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \ln \frac{-\alpha_1}{-\alpha_2}$. Из соотношения 1) леммы 2.10 следует, что функция F_1 строго возрастает вдоль траекторий системы (2.8), идущих внутри областей Π и Γ. Заметим, что $F(S(u)) \to -\infty$ при $u \to u_0 + 0$, и функция $F(S(u))$ строго возрастает при $u > u_0$. Значит траектория уже не может вернуться в Π_1 (кроме разве точки O) по крайней мере до тех пор, пока не покинула область Π. Таким образом, $S_1 \notin \Pi_1 \backslash \{O\}$. Далее, правая часть соотношения 2) из леммы 2.10 отрицательна при $S \in \Pi_4$, а правая часть соотношения 3) из леммы 2.10 положительна при $S \in \Pi_5$. Следовательно, векторное поле W направлено внутрь области Π в точках из Π_4, Π_5, т.е. $S_1 \notin \Pi_4, \Pi_5$.

Далее, предположим, что $S_1 \in \Pi_3 \backslash \Pi_2$. Тогда можно заметить, что компонента W_3 поля W является гладкой функции в точках Π_3. Следовательно, можно на траектории $S(u)$ перейти к новому параметру α_3 в некоторой окрестности точки S_1, причем точка S_1 достигается при $\alpha_3 = 0$. Кроме того, тангенциальная составляющая поля W имеет в окрестности S_1 порядок $1/\alpha_3$, что означает, что кривая $S(u)$ не может дойти за конечное время до Π_3. Остается только случай $S_1 \in \Pi_2$, но $(\Pi_2 \backslash \Pi_3) \subset E_{12}^-$ — инвариантная поверхность системы (2.8), на которой система удовлетворяет теоремам единственности. Поэтому достижение за конечное время точки из $\Pi_2 \backslash \Pi_3$ противоречило бы единственности траекторий. Итак, остается случай $S_1 \in \Pi_2 \cap \Pi_3 = (OD)$.

Предположим, что $S_1 = (\alpha, \alpha, 0, \sqrt{1 - 2\alpha^2})$, $0 \leq -\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — касательный вектор к траектории $S(u)$ в точке S_1. Тогда имеет место очевидное соотношение:

$$\lim_{\varepsilon\to -0} W(S_1+\varepsilon X) = \lim_{u\to u_1} W(S(u)) = X.$$

Если $\alpha \neq 0$, то пределы $W(S(u))$ при $u \to u_1$ посчитаны в пункте 1) доказательства леммы 2.9 (с заменой индексов $1,2,3$ на $3,1,2$). Значит, мы получаем $x_3 = 0$, что возможно только при $X = 0$. Таким образом, точка $S_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ — условно стационарная точка, которая достигается за бесконечное время. Если теперь $\alpha = 0$, т.е. $S_1 = Q_+$, то $X = (x_1, x_2, x_3, 0)$, $x_i \neq 0$, $i = 1,2,3$, и соответствующий предел $W(S(u))$ посчитан в пункте 3) доказательства леммы 2.9. После несложных вычислений получаем $X = (-1,-1,-1,0)$ — этот вектор входит в точку Q_+ не из области Π, поэтому не подходит.

Итак, траектория $S(u)$ не может за конечное время достигнуть границы области Π, т.е. она целиком лежит в Π, $u \in (u_0, \infty)$. Выясним предельные точки $S(u)$ при $u \to \infty$.

Во-первых, как отмечалось выше, функция F_1 возрастает вдоль траектории $S(u)$. Поскольку внутри области Π нет стационарных точек W (лемма 2.6), то $S(u)$ стремится при $u \to \infty$ к максимальному (в Π) уровню функции F_1, т.е. к Π_2. Далее, рассмотрим функцию $F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \ln\frac{-\alpha_2}{\alpha_3}$.

Из соотношения 4) леммы 2.10 следует, что F_2 возрастает внутри области Π в окрестности Π_2. Значит при $u \to \infty$ траектория $S(u)$ стремится к максимальному уровню F_2 на стенке Π_2, т.е. к $\Pi_2 \cap \Pi_3 = (OD)$, либо к стационарной точке, лежащей на Π_2 — к точке B. Введем в окрестности точки B координаты $x = \alpha_1 + \frac{1}{2}$, $y = \alpha_2 + \frac{1}{2}$, $z = \alpha_3 - \frac{1}{2}$ и рассмотрим линеаризацию системы (2.8):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -19x - 3y + 6z \\ \frac{dy}{du} &= -3x - 19y + 6z \\ \frac{dz}{du} &= -13x - 13y + 10z \end{aligned} \tag{2.13}$$

Непосредственно проверяется, что (2.13) имеет одно положительное собственное число 4 и два кратных, равных -16. Кратным собственным числам соответствует плоскость $x+y-2z=0$, состоящая из собственных векторов. Следовательно, в некоторой окрестности точки B будет существовать инвариантная двумерная поверхность, касательная к плоскости $x+y-2z=0$ и состоящая из траекторий системы (2.8), входящих асимптотически экспоненциально в точку B; при этом никакие другие траектории в точку B не входят. Легко проверить, что эта поверхность пересекается с областями Π и Γ лишь по дуге (AB) и трансверсальна стенкам Π_4, Π_5, Γ_4, Γ_5, примыкающим к (AB). Следовательно, кроме (AB) ни одна другая траектория из рассматриваемых нами не может войти в B. Таким образом, траектория $S(u)$ стремится к (OD) при $u \to \infty$.

Наконец, рассмотрим функцию $F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \alpha_1 + \alpha_2$. Из соотношения 5) леммы 2.10 следует, что в окрестности дуги (OD) траектория $S(u)$ стремится к точке, в которой $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, т.е. $S(u) \to S_\infty = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

2). Предположим теперь, что $S_0 \in (AE)$, причем $\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Здесь рассуждение проводится аналогично пункту 1). Сначала, последовательно выясняется, в каких точках траектория может за конечное время достичь границы области Γ.

Предположим, что $S_1 = S(u_1) \in \partial\Gamma$. В стенках Γ_4, Γ_5 поле W смотрит внутрь области, что следует из соотношений 2), 3) леммы 2.10, таким образом $S_1 \notin \Gamma_4, \Gamma_5$; к стенке Γ_1 мешает подойти возрастание функции F_1. Далее, если траектория $S(u)$ может достичь стенки Γ_3 за конечное время в некоторой точке $S_1 = S(u_1)$, то такое может быть только в случае $S_1 = G$. Действительно, если $S_1 \neq G$, то можно вдоль кривой $S(u)$ рассмотреть параметр α_4^2. Легко устанавливается, что нормальная по отношению к Γ_3 компонента W при этом ограничена, а тангенциальная стремится к бесконечности — противоречие. То же касается стенки Γ_2 — она инвариантна относительно динамической системы, и во всех ее точках, кроме $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = (FG)$ имеет место теорема единственности траекторий, поэтому никакая траектория, приходящая изнутри не пересекается с $\Gamma_2\backslash\{G\}$. Итак, возможен только один случай $S_1 = G$.

Далее, если траектория не доходит до границы Γ за конечное время, то из возрастания функции F_1 следует, что траектория стремится к Γ_2 (мы используем здесь также отсутствие стационарных точек внутри Γ). Далее, свойство 4) леммы 2.10 показывает, что функция F_2 убывает вдоль траектории. Значит или траектория стремится к стационарной точке на Γ_2 (такая точка одна $-B$), либо стремится к минимальному уровню функции F_2, каковым является точка G. Но к точке B траектория стремится при $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$, и все остальные траектории к этой точке сходится не могут (рассуждение в точности такое, как в пункте 1) доказательства; используя линеаризацию (2.13) в точке B).

Итак, мы показали, что при $\mu < \frac{1}{\sqrt{3}}$ возможен только один вариант: траектория $S(u)$ сходится к G за конечное либо бесконечное время. Однако можно заметить, что если взять в качестве параметра на кривой $S(u)$ величину α_4^2, то замена параметра будет гладкой в окрестности точки G. Следовательно, траектория доходит до точки G за конечное либо бесконечное время одновременно для обоих параметров u и α_4^2. С другой стороны, очевидно, что $S(\alpha_4^2) \to G$ при $\alpha_4^2 \to 0$, т.е. $S(u)$ достигает G за конечное время. Лемма доказана.

Следующая лемма завершает доказательство нашей основной теоремы.

Лемма 2.12. *Группа голономии метрики $\bar{g}$ на $\mathcal{M}_2$, определенной начальной точкой S_0 при $\mu > \frac{1}{\sqrt{3}}$ совпадает со всей группой $Spin(7)$.*

Доказательство. Допустим, что $G \subset Spin(7)$ — группа голономии пространства $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ с метрикой (2.1). Асимптотически метрика (2.1) стремится к метрике, локально изометричной произведению $\mathbb{R} \times C(\mathcal{Z})$. Следовательно, существует подгруппа $H \subset G$, которая является группой голономии предельной метрики на $\mathbb{R} \times C(\mathcal{Z})$. По теореме де Рама, группа H равна произведению единичной группы (тривиально действующей на $\mathbb{R}$) и группы голономии H_1 конуса над $\mathcal{Z}$. Поскольку конус семимерен, то априори возможны лишь три случая: $H_1 = SO(7)$, $H_1 = G_2$, либо конус над $\mathcal{Z}$ является плоским пространством. В последнем случае $\mathcal{Z}$ обязано быть шестимерной сферой, что противоречит тому факту, что $\mathcal{Z}$ — многообразие (или в общем случае орбифолд) Кэлера — Эйнштейна. Первый случай вообще невозможен, поскольку $H \subset G \subset Spin(7)$. Остается $G_2 \simeq H \subset G \subset Spin(7)$. Из классификации простых групп Ли и из классификации групп голономии следует, что это возможно лишь при $G = Spin(7)$. Лемма доказана.

2.3 Метрики на пространстве $\mathcal{M}_1$

Цель данного параграфа — исследовать метрики вида (2.1) на $\mathcal{M}_1$. А именно, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие. Тогда существует двупараметрическое семейство попарно негомотетичных римановых метрик на $\mathcal{M}_1$ вида (2.1) с группой голономии, содержащейся в $Spin(7)$, удовлетворяющих начальным условиям:*

$$\begin{aligned}
&A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0,\\
&\dot{A}_1(0) = \dot{A}_2(0) = \dot{A}_3(0) = -1,\\
&B(0) > 0, B'(0) = 0.
\end{aligned}$$

Семейство метрик параметризуется тройкой чисел $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < 0$, таких что $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \varepsilon^2$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$: для каждой такой тройки существует значение переменной $t = t_0$, при котором траектория (A_1, A_2, A_3) проходит через эту тройку, т.е.

$$A_1(t_0) = \lambda_1, A_2(t_0) = \lambda_2, A_3(t_0) = \lambda_3.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ метрика (2.1) является полной римановой метрикой с группой голономии $Spin(7)$ и асимптотически ведет себя как конус над M; при $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ мы также получаем семейство полных метрик *с группой голономии $Spin(7)$, асимптотически ведущих себя как произведения конуса над твисторным пространством M и окружности постоянного радиуса. Наконец, в остальных случаях метрики полными не являются.*

Любая другая полная регулярная метрика вида (2.8) с параллельной $Spin(7)$-структурой, заданной формой Φ на $\mathcal{M}_1$ совпадает с одной из метрик описанного семейства, с точностью до перестановок индексов переменных.

Замечание. Полные метрики, о которых говорится в теореме описываются явным образом в (2.6).

Исследование системы (2.3) для $\mathcal{M}_1$ проводится схожим со случаем пространства $\mathcal{M}_2$ образом. Также от системы (2.3) при помощи нормировки переходим к системе (2.8), (2.9), где основной является автономная система (2.8) на S^3.

Серьезное отличие возникает при доказательстве существования решения с заданными начальными данными. Для пространства $\mathcal{M}_2$ область возможных начальных данных представляла собой кривую, и из каждой точки кривой выходила ровно одна траектория. В случае пространства $\mathcal{M}_1$ начальные данные задаются одной точкой — точкой $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = \pm 1$. Однако из этой точки выходит трехпараметрическое семейство траекторий (напомним, что в этой точке векторное поле, стоящее в правой части системы (2.8) не определено, поэтому единственности в задаче Коши не будет).

Для того, чтобы исследовать существование в некорректно поставленной задаче Коши с начальными данными в особой точке, мы выполняем раздутие сферы S^3 в точках $Q_{\pm} = (0, 0, 0, \pm 1)$. Напомним как выглядит операция раздутия. В окрестности точки Q_+ рассмотрим локальные координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и шар $U = \{((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) | \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 \leq \varepsilon^2\}$ радиуса ε.

В окрестности U введем геодезическую систему координат, т.е. рассмотрим две координаты: радиальную $-\varepsilon < r < \varepsilon$ и тангенциальную $s \in S^2$, где $S^2 = \{((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = 1\}$. Таким образом $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = rs$. Теперь рассмотрим произведение $(-\varepsilon, \varepsilon) \times S^2$ и действие группы $\mathbb{Z}_2$ на нем:

$$(r, s) \mapsto (-r, -s).$$

Ясно, что действие свободно и мы получаем фактор пространство $\tilde{U} = (-\varepsilon, \varepsilon) \times S^2/\mathbb{Z}_2$. Сопоставление

$$\pm(r, s) \mapsto rs$$

определяет гладкое отображение $\tilde{U} \to U$, которое, очевидно, является диффеоморфизмом $\tilde{U} \backslash P \to U \backslash Q_+$, где $P = \{(r, s)|r = 0\}$ — вложенная в $\tilde{U}$ проективная плоскость.

Удалим точку Q_+ из окрестности U и приклеим $\tilde{U}$ по построенному выше диффеоморфизму. Говорят, что полученное многообразие получено из S^3 раздутием в точке Q_+.

Обозначим через $\tilde{S}$ сферу S^3, раздутую в точках $Q_\pm$. В силу симметрии достаточно ограничиться окрестностью точки Q_+. Нам потребуются локальные координаты в окрестности P. Рассмотрим $U_i = \{\pm(r, s)|\alpha_i \neq 0\}$, $i = 1, 2, 3$. Положим в окрестности U_i

$$\alpha_i^i = \alpha_i, \alpha_j^i = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \ \text{ для } \ i \neq j.$$

Мы, тем самым определили локальные координаты $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i$ на $\tilde{U}$ в окрестности U_i, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 2.13. *Гладкая метрика вида (2.1) на $\mathcal{M}_1$ удовлетворяет следующим краевым условиям при $t = 0$, в дополнение к условиям леммы 2.2:*

$$A_1'(0) = A_2'(0) = A_3'(0) = -1.$$

Доказательство. Предположим, что $A_i(t) = c_i t + o(t)$, где в силу леммы 2.2 $|c_i| = 1$. Из (2.3) немедленно следует, что

$$c_1 = \frac{(c_2-c_3)^2-c_1^2}{c_2c_3}, c_2 = \frac{(c_1-c_3)^2-c_2^2}{c_1c_3}, c_3 = \frac{(c_1-c_2)^2-c_3^2}{c_1c_2}.$$

Вычитая из первого уравнения, умноженного на c_2c_3 второе, умноженное на c_1c_3 мы получим либо $c_1 = c_2$, либо $c_1 + c_2 = 2c_3$. В силу симметрии уравнений относительно перестановок отсюда выводится соотношение $c_1 = c_2 = c_3 = -1$. Лемма доказана.

Лемма 2.14. *Существует двупараметрическое семейство решений системы (2.3) в окрестности $t = 0$, удовлетворяющих краевому условию леммы 2.13, доставляющих тем самым, гладкие в окрестности $t = 0$ метрики на $\mathcal{M}_1$, с группой голономии $Spin(7)$.*

Указанное семейство решений параметризуется тройкой чисел λ_1, λ_2, $\lambda_3 < 0$, таких что $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \varepsilon^2$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$: для каждой такой тройки существует значение переменной $t = t_0$, при котором траектория (A_1, A_2, A_3) проходит через эту тройку, т.е.

$$A_1(t_0) = \lambda_1, A_2(t_0) = \lambda_2, A_3(t_0) = \lambda_3.$$

Доказательство. Мы перенесем систему (2.8) на $\tilde{S}$, после чего проекции траекторий на S^3 будут доставлять необходимые решения. В силу предыдущих рассуждений мы должны исследовать траектории системы (2.8) на $\tilde{S}$, выходящие из точки $\alpha_1^1 = 0, \alpha_2^1 = \alpha_3^1 = 1$. Пересчитаем поле W в окрестности U_1 в новых координатах. Для простоты положим $x = \alpha_1^1, y = \alpha_2^1, z = \alpha_3^1$. Тогда система (2.8) равносильна следующей:

$$\begin{array}{l} \frac{dx}{dv} = xW_1(x, xy, xz) = \tilde{W}_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dv} = W_2(x, xy, xz) - yW_1(x, xy, xz) = \tilde{W}_2(x, y, z) \\ \frac{dz}{dv} = W_3(x, xy, xz) - zW_3(x, xy, xz) = \tilde{W}_3(x, y, z), \end{array} \qquad (2.14)$$

где $du = xdv$.

Непосредственно проверяется, что векторное поле $\tilde{W}$ обращается в нуль в точке $p = (0, 1, 1)$, рассмотрим линеаризацию системы (2.14) в окрестности этой точки:

$$\frac{dx}{dv} = -x$$
$$\frac{dy}{dv} = -2y$$
$$\frac{dz}{dv} = -2z.$$

Таким образом, существует двупараметрическое семейство траекторий системы (2.8), входящее экспоненциально по переменной v в точку p. При замене параметра v на u мы получаем двупараметрическое семейство траекторий входящих в p со стороны положительных x за конечное время и двупараметрическое семейство траекторий, выходящих из p в направлении отрицательных x за конечное время u, а значит и за конечное t. Указанная в условии леммы параметризация семейства траекторий совершенна очевидна. Лемма доказана.

Следующая лемма следует из непосредственного анализа систем (2.3) и (2.8), (2.9).

Лемма 2.15. *Если $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ — решение системы (2.8), то имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{array}{ll} 1) & \frac{d}{du}\left(\ln\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|\right) = 2\frac{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_4)}{\alpha_2^2\alpha_4^2}, \ \textit{если} \ \ \alpha_2 = \alpha_3, \\ 2) & \frac{d}{du}(\alpha_2+\alpha_4) = \frac{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \ \textit{если} \ \ \alpha_2+\alpha_4 = 0, \\ 3) & \frac{d}{du}(\alpha_2+\alpha_3) \to 16(\alpha_2-\frac{1}{2})(\alpha_2+\frac{1}{2}) \ \textit{если} \ \ \alpha_2-\alpha_3 \to 0, \ \alpha_1 \to 0, \\ 4) & \frac{d}{du}\left(\ln\left|\frac{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)}\right|\right) = \frac{4}{\alpha_2} - \frac{4}{\alpha_1}. \end{array}$$

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 2.2.

Лемма 2.16. *Рассмотрим траекторию системы (2.8), параметризованную в соответствии с леммой 2.14 тройкой чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \varepsilon^2$. В силу симметрии и не ограничивая общности, считаем, что $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$. Тогда*

1) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ траектория сходится к стационарной точке $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right)$ при $u \to \infty$;

2) при $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ траектория сходится к условно стационарной точке $\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при $u \to \infty$;

3) в остальных случаях траектория сходится к точке $(0,0,1,0)$ за конечное время, т.е. $u \to u_0 < \infty$.

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&O = Q_+ = (0,0,0,1), A = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right),\\
&B = (0,0,-1,0), C = \left(0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\\
&D = \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{4}, -\tfrac{\sqrt{2}}{4}, -\tfrac{\sqrt{2}}{4}, \tfrac{\sqrt{10}}{4}\right), E = \left(0, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

В силу симметрии системы (2.8) относительно перестановок переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно без ограничения общности считать, что траектория $S(u)$ выходит при $u = u_0$ из точки O и входит в сферический тетраэдр $\Pi = OABC$ касательно к отрезку OA. Отметим, что тетраэдр Π определен соотношениями $\alpha_3 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq 0$, $\alpha_4 \geq 0$.

Рассмотрим различные ситуации.

1) Траектория $S(u)$ идет вдоль отрезка OA. В этом случае $A_1 = A_2 = A_3$ и мы получаем решение (2.4), сходящееся к D.

2). Траектория $S(u)$ идет по инвариантной стенке OAC, но не по отрезку OA, т.е. $\alpha_2 = \alpha_3$. На стенке OAC рассмотрим функцию

$$F_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Из соотношения 1) леммы 2.15 следует, что функция F_1 строго возрастает вдоль траекторий системы (2.8) до тех пор, пока $\alpha_2 + \alpha_4 > 0$. Это условие заведомо выполнено в окрестности $u = u_0$, т.е. в начале траектории. Рассмотрим функцию

$$F_2 = \alpha_2 + \alpha_4.$$

Из соотношения 2) леммы 2.15 следует, что функция F_2 строго возрастает вдоль траекторий системы (2.8) в окрестности тех точек, где $F_2 = 0$. Значит траектория может подойти к множеству $F_2 = 0$ только со стороны отрицательных значений функции F_2, откуда следует, что $F_2 > 0$

вдоль всей траектории. Значит положительность функции F_2 сохраняется при всех u, откуда следует строгое возрастание F_1 вдоль траектории $S(u)$.

Наконец, соотношение 3) леммы 2.15 показывает, что траектория $S(u)$ сходится к условно стационарной точке E.

3). Траектория $S(u)$ идет по инвариантной стенке OAB, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2$. Рассмотрим функцию

$$F_3 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3},$$

определенную на OBA. Соотношение 1) леммы 2.15 (после подходящей перестановки индексов) показывает, что эта функция строго убывает всюду, где $\alpha_1 + \alpha_4 > 0$. Аналогично предыдущим рассуждениям, рассмотрим функцию

$$F_4 = \alpha_1 + \alpha_4.$$

Тогда из 2) леммы 2.15 следует, что F_4 возрастает в точках, где $F_4 = 0$. Поскольку в начальной точке $t = t_0$ функция $F_4 > 0$, то ее положительность сохраняется вдоль всей траектории, то есть траектория $S(u)$ стремится к отрезку OB. Непосредственная проверка показывает, что внутри отрезка OB составляющая вдоль координаты α_3 векторного поля W строго отрицательна, т.е. траектория $S(u)$ сходится к точке B.

4). Траектория $S(u)$ выходит при $t = t_0$ строго внутрь области П. Рассмотрим функцию

$$F_5 = \frac{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3)},$$

определенную на внутренности области П. Соотношение 4) леммы 2.15 показывает, что F_5 строго возрастает вдоль траекторий системы (2.8) в области П. Внутри П нет точек экстремума функции F_5, поэтому траектория $S(u)$ уходит к одной из стенок границы П. При этом $F_5 \geq 0$ и $F_5 = 0$ на стенке $\alpha_1 = 0$. Таким образом стенка OAC недостижима для траектории $S(u)$. Стенка OAB является инвариантным подмножеством для системы (2.8), поэтому траектория не может ее пересечь. В случае, если $S(u)$ стремится к OAB, то поскольку траектории в OAB сходятся к B, то они сходятся к B и в нашем случае.

Далее, возрастание функции F_5 препятствует подходу траектории к стенке OBC (по крайней мере вне отрезка OB). Остается случай, когда траектория достигает стенки ABC. Если траектория $S(u)$ может достичь стенки ABC за конечное время в некоторой точке $S_1 = S(u_1)$, то такое может быть только в случае $S_1 = B$. Действительно, если $S_1 \neq B$, то можно вдоль кривой $S(u)$ рассмотреть параметр α_4^2. Легко устанавливается, что нормальная по отношению к ABC компонента W при этом ограничена, а тангенциальная стремится к бесконечности — противоречие.

Итак, возможен только один случай, когда траектория достигает точки B, причем за конечное время. Лемма доказана.

2.4 Обоснование условий регулярности

В этом параграфе мы приводим доказательства лемм 2.2 и 2.3.

Доказательство леммы 2.2. Ясно, что для того, чтобы получить риманову метрику на $\mathcal{M}_1$ необходимо, чтобы функции $A_i(t)$, $B(t)$ были знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$ и $A_i(0) = 0$, $B(0) \neq 0$. При этом вне $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}_1$ гладкость метрики $\bar{g}$ равносильна гладкости функций $A_i(t)$, $B(t)$ при $t > 0$. Выясним, что происходит в окрестности $\mathcal{O}$.

Пусть G — общий слой 3-сасакиева слоения на M, изометричный либо $Sp(1)$, либо $SO(3)$. Как и ранее, через $\pi : M \to \mathcal{O}$ обозначим главное G-расслоение M над $\mathcal{O}$. Пусть $F = \mathbb{H}$ при $G = Sp(1)$ и $F = \mathbb{H}/\mathbb{Z}_2$ при $G = SO(3)$ — слой ассоциированного с π расслоения $\mathcal{M}_1$ над $\mathcal{O}$. Рассмотрим произвольную точку $q \in \mathcal{O}$. Тогда существует открытое множество $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^4$ и дискретная группа $\Gamma \subset G$, действующая на $\tilde{U}$ таким образом, что некоторая окрестность $\pi^{-1}(q)$ диффеоморфна $(\tilde{U} \times G)/\Gamma$ (см. доказательство теоремы 1). Действие группы Γ на G сдвигами очевидным образом продолжается до действия Γ на F. Следовательно, некоторая окрестность точки q в $\mathcal{M}_1$ гомеоморфна $(\tilde{U} \times F)/\Gamma$.

Очевидно, что в случае $G = Sp(1)$ набор, состоящий из $\tilde{U} \times \mathbb{H}$, группы Γ и соответствующего гомеоморфизма дает карту на орбифолде $\mathcal{M}_1$ в окрестности точки q, и все такие карты попарно согласованы. Если $G = SO(3)$, то в качестве карты нужно рассмотреть $\tilde{U} \times \mathbb{H}$ (двулистно накрывающее $\tilde{U} \times \mathbb{H}/\mathbb{Z}_2$), а в качестве группы — группу $\tilde{\Gamma}$, накрывающую группу Γ при стандартном $\mathbb{Z}_2$-накрытии $Sp(1) \to SO(3)$. Таким образом, для гладкости метрики (4) в окрестности $\mathcal{O}$ нужно показать гладкость метрики, поднятой на каждую построенную выше окрестность $\tilde{U} \times \mathbb{H}$.

Для каждого $p \in \tilde{U}$ рассмотрим ограничение метрики $\bar{g}$ на $\{p\} \times \mathbb{H}$:

$$\bar{g}_v = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \eta_i^2. \tag{2.15}$$

Здесь t — радиальный параметр на $\mathbb{H}$ и метрика $\bar{g}_v$ не зависит от выбора p. Нам понадобится следующий результат:

Лемма 2.17 [14, 19]. *Метрика*

$$g = dr^2 + h^2(r) d\phi^2,$$

заданная в полярной системе координат (r, ϕ) *на стандартном двумерном диске* $r \leq r_0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ *является гладкой римановой метрикой тогда и только тогда, когда* $|h(r)| > 0$ *при* $r \in (0, r_0]$ *и функция* $h(r)$ *продолжается до гладкой нечетной функции* $h(r)$, *определенной на* $(-r_0, r_0)$ *такой, что* $|h'(0)| = 1$.

Пусть метрика (2.1) — гладкая, следовательно метрика (2.15) — гладкая. Будем считать, что векторные поля ξ^i, ограниченные на $S^3 \subset \mathbb{H}$ представлены как qi, qj, qk, где $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$. Рассмотрим ограничение метрики (2.15) на плоскость, порожденную векторами 1 и i в $\mathbb{H}$:

$$\bar{g}_v|_{1,i} = dt^2 + A_1(t)^2 \eta_1^2.$$

Эта метрика гладкая, если $\bar{g}_v$ гладкая, и, следовательно по лемме 2.17 функция A_1 удовлетворяет условию (1) леммы 2.2. Аналогично, из гладкости $\bar{g}_v$ следует выполнение условия (1) леммы 2.2 для всех A_1, A_2, A_3. Далее, метрика (4) является скрещенным произведением метрики (2.15) и метрики $g|_{\mathcal{H}}$ со скрещивающей функцией $B(t)$, рассматриваемой как функции на $\mathbb{H}$. Отсюда без труда следует, что $B'(0) = 0$.

Обратно, пусть условия (1)-(3) леммы 2.2 выполнены. Выражение для dA_i/dt позволяет произвести k-кратное формальное дифференцирование по t. Пусть $V_i^{(k)} = d^k A_i/dt^k$ — рациональная функция от переменных A_1, A_2, A_3, B, $i = 1, 2, 3$. Аналогично, пусть $V_4^{(k)} = d^k B/dt^k$. Из условий на функции A_i следует, что существуют функции $a_i(t)$, определенные и C^∞-гладкие при $t \geq 0$ такие, что $A_i(t) = ta_i(t)$, $|a_i(0)| = 1$.

Положим $\tilde{A}_i(t) = -A_i(-t)$ и $\tilde{B}(t) = B(-t)$ при $t \leq 0$. Ясно, что полученные функции $\tilde{A}_i(t)$, $\tilde{B}(t)$ принадлежат классу C^∞ на промежутке $t \leq 0$ и $\tilde{A}_i(t) = ta_i(-t)$ при $t \leq 0$. Более того, из инвариантности системы (2.3) относительно преобразования $(t, A_i, B) \mapsto (-t, -A_i, B)$ следует, что $\tilde{A}_i(t)$, $\tilde{B}(t)$ — решение системы (2.3). Далее,

$$\frac{d^k}{dt^k}|_{t>0}(A_i(t)) = V_i^{(k)}(A_i(t), B(t)) = t^m \frac{P(a_i(t), B(t))}{Q(a_i(t), B(t))}, \tag{2.16}$$

где полиномы P и Q имеют ненулевые значения при $t = 0$. Поскольку по условию решения $A_i(t), B(t)$ — бесконечно гладкие при $t \geq 0$, то должен существовать предел выражения (2.16) при $t \to \infty$, и, следовательно, $m \geq 0$. Подставив в (2.16) кривую $\tilde{A}_i(t)$, $\tilde{B}(t)$ мы видим, что производные всех порядков функций $A_i(t)$ в точке $t = 0$ справа совпадают с соответствующими производными функций $\tilde{A}_i(t)$ в точке $t = 0$ слева (заметим, что отсюда, в частности, следует тривиальность производных четного порядка). Итак, функции $A_i(t)$ и $\tilde{A}_i(t)$ вместе образуют C^∞-гладкие нечетные функции в окрестности точки $t = 0$. Совершенно аналогично, функции $B(t)$ и $\tilde{B}(t)$ образуют C^∞-гладкую четную функцию в окрестности точки $t = 0$.

В каждой точке $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ можно разложить стандартный координатный базис $\partial/\partial q_i$ по базису $\frac{q}{|q|}, qi, qj, qk$, двойственному формам $dt, \eta_1, \eta_2, \eta_3$. Это немедленно позволяет посчитать компоненты метрического тензора (2.15) относительно стандартных координат q_0, q_1, q_2, q_3 в $\mathbb{H}$:

$$g_{00}(q) = \frac{q_0^2|q|^2 + A_1^2(|q|)q_1^2 + A_2^2(|q|)q_2^2 + A_3^2(|q|)q_3^2}{|q|^4},$$

$$g_{11}(q) = \frac{q_1^2|q|^2 + A_1^2(|q|)q_0^2 + A_2^2(|q|)q_3^2 + A_3^2(|q|)q_2^2}{|q|^4},$$

$$g_{01} = \frac{q_0 q_1(|q|^2 - A_1^2(|q|)) + q_2 q_3(A_2^2(|q|) - A_3^2(|q|))}{|q|^4},$$

$$g_{12} = \frac{q_1 q_2(|q|^2 - A_3^2(|q|)) + q_0 q_3(A_1^2(|q|) - A_2^2(|q|))}{|q|^4},$$

(мы приводим лишь некоторые компоненты; остальные получаются из данных соответствующей перестановкой индексов $1, 2, 3$). Далее, мы используем следующий несложный факт: если гладкая функция $f(t)$, определенная в окрестности точки $t = 0$ является нечетной, то $f^2(t)$ является гладкой функцией аргумента $u = t^2$ в окрестности точки $t = 0$. Для доказательства надо лишь заметить, что в разложении Тейлора функции f до любого порядка будут присутствовать лишь четные степени переменной t, и $\frac{d}{du} = \frac{1}{t}\frac{d}{dt}$. Отсюда без труда выводится существование и непрерывность в точке $t = 0$ производной любого порядка функции $f(u)$. Поскольку мы доказали, что функции $A_i(t)$ продолжаются до нечетных функций, то тем самым показано, что компоненты метрического тензора, а с ними и метрика (2.15) являются гладкими.

Вспомним теперь, что метрика (2.1) является скрещенным произведением $\tilde{U}$ и $\mathbb{H}$ со скрещивающей функцией $B(t)$, рассматриваемой как функции на $\mathbb{H}$. Следовательно, гладкость метрики равносильна гладкости функции $B(t)$. Схожими рассуждениями (см. также [19]), которые мы опускаем, доказывается, что гладкость B на $\mathbb{H}$ равносильна продолжаемости $B(t)$ до четной функции в окрестности $t = 0$, что гарантируется условием (2) леммы. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2.3. Доказательство проводится в целом аналогично доказательству леммы 2.2 и мы сохраняем прежние обозначения для G, π и т.д. Во-первых, чтобы получить риманову метрику на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ необходимо, чтобы функции $A_i(t)$, $B(t)$ были знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$ и $A_1(0) = 0$, $A_2(0) \neq 0$, $A_3(0) \neq 0$ и $B(0) \neq 0$. Вне $\mathcal{Z} \subset \mathcal{M}_2$ гладкость метрики $\bar{g}$ равносильна гладкости функций $A_i(t)$, $B(t)$ при $t > 0$. Выясним, что происходит в окрестности $\mathcal{Z}$.

Пусть $S \subset G$ — окружность, интегрирующая поле ξ^1. Обозначим через $\pi' : \mathcal{Z} \to \mathcal{O}$ расслоение со слоем $S^2 = G/S$. Пусть $q \in \mathcal{O}$. Рассмотрим небольшую окрестность U точки q и соответствующую окрестность $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^4$ такую, что $\tilde{U}/\Gamma = U$ для некоторой дискретной подгруппы $\Gamma \subset G$, действующей на $\tilde{U}$ диффеоморфизмами. Если окрестность $\tilde{U}$ выбрана достаточно малой, то $\pi'^{-1}(U) = (\tilde{U} \times (G/S))/\Gamma$. Тогда $(\pi' \circ \pi)^{-1}(U)$ диффеоморфно $(\tilde{U} \times (G \times \mathbb{C})/S)/\Gamma$ и гладкость метрики (2.1) равносильна гладкости метрики, поднятой на каждую окрестность $\tilde{U} \times (G \times \mathbb{C})/S$.

Метрика (2.1) представляет собой скрещенное произведение метрики (2.15) на $(G \times \mathbb{C})/S$ и метрики $g|_{\mathcal{O}}$ на $\tilde{U}$, со скрещивающей функцией $B(t)$. Если (2.1) — гладкая метрика, то очевидно, что функция B должна быть гладкой и должна продолжаться до четной функции от радиального параметра t на $\mathbb{C}$, т.е. удовлетворяет условию (3) леммы 2.3. Далее, из гладкости ограничения метрики (2.15) на $\mathbb{C}$ и из леммы 2.17 следует, что A_1 удовлетворяет (1) леммы 2.3. Наконец, для того, чтобы A_2, A_3 имели производные в точке $t = 0$ необходимо чтобы либо $A_2(0) = A_3(0)$ (что противоречит (1) леммы), либо $A_2(0) = -A_3(0)$, откуда без труда выводятся условия (2) леммы 2.3.

Обратно, пусть гладкие на $[0, \infty)$ функции A_i, B удовлетворяют всем условиям леммы 5. Как и в предыдущей лемме показывается, что функция B продолжается до четной гладкой функции аргумента t, поэтому для доказательства гладкости метрики скрещенного произведения (2.1) достаточно доказать гладкость метрики (2.15).

Рассмотрим проекцию $p : (G\times\mathbb{C})/S \to G/S$. Ясно, что $(G\times\mathbb{C})/S$ послойно диффеоморфно либо комплексному одномерному каноническому расслоению при $G = Sp(1)$, либо его дублю при $G = SO(3)$. При этом расслоение p — это каноническое расслоение над двумерной сферой G/S. Метрика (15) превращает p в риманову субмерсию со слоем, диффеоморфным $\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}$ — взаимно ортогональные распределения вертикальных и горизонтальных векторов субмерсии p, соответственно. Ограничение метрики (2.15) на $\mathcal{V}$ выглядит следующим образом:

$$dt^2 + A_1^2(t)\eta_1^2. \tag{2.17}$$

Как в доказательстве леммы 2.2 показывается, что $A_1(t)$ продолжается до гладкой нечетной функции, откуда в виду леммы 15 следует гладкость метрики (2.17) на $\mathcal{V}$. Рассмотрим небольшую окрестность $V \subset G/S$ и точку $gS \in V$. Прообраз точки gS при отображении p выглядит как $(g,z)S \in p^{-1}(gS)$, где $z\in\mathbb{C}$. Горизонтальный касательный вектор в точке $(g,z)S$ можно отождествить с вектором gX, где $X \in \mathbf{sp}(1) = Im(\mathbb{H})$, $X = x_2j+x_3k$, $x_i\in\mathbb{R}$. При этом для $s\in S$ векторы gX и gsY проектируются в один и тот же вектор, касательные к G/S в точке gS тогда и только тогда, когда $Y = s^{-1}Xs$. Рассмотрим поля X_1 и X_2 на $(G\times\mathbb{C})/S$, определив их в каждой точке $(g,z)s$ как $g(s^{-1}js)$ и $g(s^{-1}ks)$, соответственно. Тогда поля X_1, X_2 проектируются в некоторые гладкие поля $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ в окрестности V. Ясно, что поля $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ образуют базис модуля гладких векторных полей в окрестности V и нам нужно проверить гладкость компонент $g_{ij} = g(\tilde{X}_i,\tilde{X}_j) = g(X_i,X_j)$:

$$\begin{array}{l} g_{11} = \frac{A_2^2(|w|)+A_3^2(|w|)}{2} + \frac{x}{2|w|}(A_2^2(|w|) - A_3^2(|w|)),\\ g_{22} = \frac{A_2^2(|w|)+A_3^2(|w|)}{2} + \frac{x}{2|w|}(A_3^2(|w|) - A_2^2(|w|)),\\ g_{12} = \frac{y}{2|w|}(A_2^2(|w|) - A_3^2(|w|)). \end{array} \tag{2.18}$$

где $s = e^{i\phi}\in S$, $t = |z|$ и мы положили $w = x+yi = te^{4i\phi}$.

Доопределим функцию $A_2(t)$ при $t \le 0$, положив $A_2(t) = -A_3(-t)$ при $t \le 0$, и аналогично положим $A_3(t) = -A_2(-t)$ при $t \le 0$. Точно также как в доказательстве леммы 2.2, показывается, что продолженные таким образом функции $A_2(t)$ и $A_3(t)$ являются C^∞-гладкими в окрестности точки $t = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что четные коэффициенты в разложении функций A_2 и A_3 в полином Тейлора противоположны по знаку, а нечетные — совпадают. Далее уже нетрудно показать, что функция $A_2^2 + A_3^2$ является гладкой функцией аргумента $|w|^2$. Совершенно аналогично, функция $\frac{A_2^2 - A_3^2}{|w|}$ является гладкой функцией аргумента $|w|^2$. Следовательно, функции, входящие в правые части (2.18) — гладкие, откуда следует гладкость ограничения метрики (2.15) на $\mathcal{H}$, и гладкость (2.1). Лемма доказана.

2.5 Конструкция римановой метрики с группой голономии G_2

Пусть M — компактное семимерное 3-сасакиево многообразие с характеристическими полями ξ^1, ξ^2, ξ^3 и характеристическими 1-формами η_1, η_2, η_3. Рассмотрим, как описано в параграфе 1.2, главное расслоение $\pi : M \to \mathcal{O}$ со структурной группой $Sp(1)$ либо $SO(3)$ над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$, ассоциированным с M. В этом параграфе нас будет интересовать специальный случай, когда $\mathcal{O}$ дополнительно обладает кэлеровой структурой.

Поле ξ^1 порождает локально свободное действие окружности S^1 на M, и метрика на твисторном пространстве $\mathcal{Z} = M/S^1$ является метрикой Кэлера — Эйнштейна. Очевидно, что $\mathcal{Z}$ топологически представляет собой расслоенное пространство над $\mathcal{O}$ со слоем $S^2 = Sp(1)/S^1$ (либо $S^2 = SO(3)/S^1$), ассоциированное с π. Рассмотрим очевидное действие $SO(3)$ на $\mathbb{R}^3$. Двулистное накрытие $Sp(1) \to SO(3)$ задает также действие $Sp(1)$ на $\mathbb{R}^3$. Пусть теперь $\mathcal{N}$ — расслоенное пространство над $\mathcal{O}$, со слоем $\mathbb{R}^3$, ассоциированное с π. Легко видеть, что $\mathcal{O}$ вложено в $\mathcal{N}$ в качестве нулевого, а $\mathcal{Z}$ вложено в $\mathcal{N}$ в качестве сферического сечения. Пространство $\mathcal{N}\backslash\mathcal{O}$ диффеоморфно произведению $\mathcal{Z}\times(0,\infty)$. В общей ситуации $\mathcal{N}$ является семимерным орбифолдом, однако если M — регулярное 3-сасакиево пространство, то $\mathcal{N}$ — семимерное многообразие.

Локально выберем ортонормированную систему $\eta_4,\eta_5,\eta_6,\eta_7$, порождающую аннулятор вертикального подрасслоения $\mathcal{V}$, так что

$$\begin{aligned}\omega_1&=2(\eta_4\wedge\eta_5-\eta_6\wedge\eta_7),\\ \omega_2&=2(\eta_4\wedge\eta_6-\eta_7\wedge\eta_5),\\ \omega_3&=2(\eta_4\wedge\eta_7-\eta_5\wedge\eta_6),\end{aligned}$$

где формы ω_i отвечают кватернионно-кэлеровой структуре на $\mathcal{O}$. Ясно, что $\eta_2,\eta_3,\ldots,\eta_7$ является ортонормированным базисом в M, аннулирующим одномерное слоение, порожденное полем ξ^1, поэтому можно рассмотреть метрику на $(0,\infty)\times\mathcal{Z}$ следующего вида:

$$\bar{g}=dt^2+A(t)^2(\eta_2^2+\eta_3^2)+B(t)^2(\eta_4^2+\eta_5^2)+C(t)^2(\eta_6^2+\eta_7^2),\qquad(2.19)$$

где функции $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ определены на промежутке $(0,\infty)$.

Мы предполагаем, что $\mathcal{O}$ является кэлеровым орбифолдом, поэтому на нем существует замкнутая кэлерова форма, которую можно поднять на $\mathcal{H}$ и получить замкнутую форму ω. Локально, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$\omega=2(\eta_4\wedge\eta_5+\eta_6\wedge\eta_7).$$

Теперь положим:

$$\begin{aligned}&e^0=dt,\\ &e^i=A\eta_i, i=2,3,\\ &e^j=B\eta_j, j=4,5,\\ &e^k=C\eta_k, k=6,7,\end{aligned}$$

и рассмотрим следующие формы Ψ_1 и Ψ_2:

$$\Psi_1=-e^{023}-\frac{B^2+C^2}{4}e^0\wedge\omega_1-\frac{B^2-C^2}{4}e^0\wedge\omega+\frac{BC}{2}e^3\wedge\omega_2-\frac{BC}{2}e^2\wedge\omega_3$$

$$\Psi_2 = C^2B^2\Omega - \frac{B^2+C^2}{4}e^{23}\wedge\omega_1 - \frac{B^2-C^2}{4}e^{23}\wedge\omega + \frac{BC}{2}e^{02}\wedge\omega_2 + \frac{BC}{2}e^{03}\wedge\omega_3$$

Очевидно, что формы Ψ_1, Ψ_2 являются глобально определенными и не зависят от локального выбора η_i, при этом локально совпадают с формами Ψ_0 и $*\Psi_0$ из (1.3). Таким образом, форма Ψ_1 задает G_2-структуру на $\mathcal{N}$ и однозначно определяет некоторую метрику, которая локально совпадает с (2.19). В соответствии с предложением 1.8 параллельность таким образом построенной G_2-структуры равносильна уравнениям замкнутости и козамкнутости (1.4).

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.3. *Если $\mathcal{O}$ обладает кэлеровой структурой, то метрика (2.19) на $\mathcal{N}$ является гладкой метрикой с группой голономии G_2, заданной формой Ψ_1 тогда, и только тогда, когда функции A, B, C, определенные на промежутке $[t_0, \infty)$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned} A' &= \tfrac{2A^2-B^2-C^2}{BC}, \\ B' &= \tfrac{B^2-C^2-2A^2}{CA}, \\ C' &= \tfrac{C^2-2A^2-B^2}{AB} \end{aligned} \tag{2.20}$$

с начальными условиями

(1) $A(t_0) = 0, |A_1'(t_0)| = 2$*;*

(2) $B(t_0), C(t_0) \neq 0, B'(t_0) = C'(t_0) = 0$*;*

(3) функции A, B, C *знакоопределены на промежутке* (t_0, ∞).

Система (2.20) имеет единственное решение, удовлетворяющее вышеприведенным условиям регулярности, и это решение отвечает следующей метрике с группой голономии G_2:

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1-\frac{r_0^4}{r^4}} + r^2\left(1-\frac{r_0^4}{r^4}\right)\left(\eta_2^2+\eta_3^2\right) + 2r^2\left(\eta_4^2+\eta_5^2+\eta_6^2+\eta_7^2\right). \tag{2.21}$$

Доказательство. В соответствии параграфом 1.1, для параллельности рассмотренной G_2 структуры необходимо и достаточно проверить замкнутость форм Ψ_1 и Ψ_2. В параграфе 2.1 получены соотношения, замыкающие алгебру форм, к ним добавляется соотношение $d\omega = 0$. Пользуясь всеми указанными соотношениями, мы можем вычислить дифференциалы форм Ψ_1 и Ψ_2. При этом в вычислениях мы намеренно будем рассматривать вообще говоря различные функции A_2 и A_3:

$$d\Psi_1 = e^0 \wedge de^2 \wedge e^3 - e^0 \wedge e^2 \wedge de^3 - \frac{1}{4}(B^2 + C^2)e^0 \wedge d\omega_1 +$$

$$\frac{1}{2}(BC' + B'C)e^0 \wedge e^3 \wedge \omega_2 + \frac{1}{2}BC de^3 \wedge \omega_2 - \frac{1}{2}BC e^3 \wedge d\omega_2 -$$

$$\frac{1}{2}(BC' + B'C)e^0 \wedge e^2 \wedge \omega_3 - \frac{1}{2}BC de^2 \wedge \omega_3 + \frac{1}{2}BC e^2 \wedge d\omega_3 =$$

$$A_2 e^0 \wedge \omega_2 \wedge e^3 - A_3 e^0 \wedge e^2 \wedge \omega_3 -$$

$$\frac{1}{2}(B^2 + C^2)e^0 \wedge \left(\frac{1}{A_3}\omega_2 \wedge e^3 - \frac{1}{A_2}e^2 \wedge \omega_3\right) + \frac{1}{2}(BC' + B'C)e^0 \wedge e^3 \wedge \omega_2 +$$

$$\frac{1}{2}BC\left(\frac{A_3'}{A_3}e^0 \wedge e^3 - 2\frac{A_3}{A_1 A_2}e^1 \wedge e^2\right) \wedge \omega_2 - \frac{BC}{A_1}e^3 \wedge \omega_3 \wedge e^1 -$$

$$\frac{1}{2}BC\left(\frac{A_2'}{A_2}e^0 \wedge e^2 - 2\frac{A_2}{A_1 A_3}e^3 \wedge e^1\right) \wedge \omega_3 -$$

$$\frac{1}{2}(BC' + B'C)e^0 \wedge e^2 \wedge \omega_3 - \frac{BC}{A_1}e^2 \wedge e^1 \wedge \omega_2 =$$

$$\left(A_2 - \frac{B^2 + C^2}{2A_3} + \frac{BC' + B'C}{2} + \frac{BCA_3'}{2A_3}\right) e^0 \wedge \omega_2 \wedge e^3 +$$

$$\left(-A_3 + \frac{B^2 + C^2}{2A_2} - \frac{BCA_2'}{2A_2} - \frac{BC' + B'C}{2}\right) e^0 \wedge e^2 \wedge \omega_3 +$$

$$\left(\frac{BC}{A_1} - \frac{BCA_3}{A_1 A_2}\right) e^1 \wedge e^2 \wedge \omega_2 + \left(\frac{BC}{A_1} - \frac{BCA_2}{A_1 A_3}\right) e^1 \wedge e^3 \wedge \omega_3$$

Аналогично,

$$d\Psi_2 = (B^2C^2)'e^0 \wedge \Omega - \frac{1}{2}(BB' + CC')e^0 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge \omega_1 -$$

$$\frac{1}{4}(B^2 + C^2)de^2 \wedge e^3 \wedge \omega_1 + \frac{1}{4}(B^2 + C^2)e^2 \wedge de^3 \wedge \omega_1 -$$

$$\frac{1}{4}(B^2+C^2)e^2\wedge e^3\wedge d\omega_1-\frac{1}{2}(BB'-CC')e^0\wedge e^2\wedge e^3\wedge\omega-$$

$$\frac{1}{4}(B^2-C^2)de^2\wedge e^3\wedge\omega+\frac{1}{4}(B^2-C^2)e^2\wedge de^3\wedge\omega-\frac{BC}{2}e^0\wedge de^2\wedge\omega_2+$$

$$\frac{BC}{2}e^0\wedge e^2\wedge d\omega_2-\frac{BC}{2}e^0\wedge de^3\wedge\omega_3+\frac{BC}{2}e^0\wedge e^3\wedge d\omega_3=$$

$$(B^2C^2)'e^0\wedge\Omega-\frac{1}{2}(BB'+CC')e^0\wedge e^2\wedge e^3\wedge\omega_1-$$

$$\frac{A_2'(B^2+C^2)}{4A_2}e^0\wedge e^2\wedge e^3\wedge\omega_1-\frac{A_3'(B^2+C^2)}{4A_3}e^0\wedge e^2\wedge e^3\wedge\omega_1-$$

$$\frac{1}{2}(BB'-CC')e^0\wedge e^2\wedge e^3\wedge\omega-\frac{A_2'(B^2-C^2)}{4A_2}e^0\wedge e^2\wedge e^3\wedge\omega-$$

$$\frac{A_3'(B^2-C^2)}{4A_3}e^0\wedge e^2\wedge e^3\wedge\omega-\frac{BC}{2}e^0\wedge\left(A_2\omega_2-\frac{2A_2}{A_1A_3}e^3\wedge e^1\right)\wedge\omega_2+$$

$$BCe^0\wedge e^2\wedge\left(\frac{1}{A_1}\omega_3\wedge e^1-\frac{1}{A_3}e^3\wedge\omega_1\right)-$$

$$\frac{BC}{2}e^0\wedge\left(A_3\omega_3-\frac{2A_3}{A_1A_2}e^1\wedge e^2\right)\wedge\omega_3+$$

$$BCe^0\wedge e^3\wedge\left(\frac{1}{A_2}\omega_1\wedge e^2-\frac{1}{A_1}e^1\wedge\omega_2\right)=$$

$$\left((B^2C^2)'+4A_2BC+4A_3BC\right)e^0\wedge\Omega-$$

$$\left(\frac{BB'+CC'}{2}+\frac{A_2'(B^2+C^2)}{4A_2}+\frac{A_3'(B^2+C^2)}{4A_3}+\frac{BC}{A_3}+\frac{BC}{A_2}\right)e^0\wedge\omega_1\wedge e^2\wedge e^3-$$

$$\left(\frac{BB'-CC'}{2}+\frac{A_2'(B^2-C^2)}{4A_2}+\frac{A_3'(B^2-C^2)}{4A_3}\right)e^0\wedge e^2\wedge e^3\wedge\omega+$$

$$\left(-\frac{BCA_2}{A_1A_3}+\frac{BC}{A_1}\right)e^0\wedge e^1\wedge\omega_2\wedge e^3+$$

$$\left(\frac{BCA_3}{A_1A_2}-\frac{BC}{A_1}\right)e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge\omega_3.$$

Формы $d\Psi_1$ и $d\Psi_2$ вообще говоря определены на $M\times\mathbb{R}_+$, и их можно отождествить с соответствующими дифференциалами форм на $\mathcal{Z}\times\mathbb{R}_+$, если они будут аннулировать поливекторы, содержащие поле ξ^1. Это означает, что в выражение для дифференциалов не должны входить члены с e^1, т.е. в первую очередь нужно занулить все коэффициенты при таких членах:

$$\frac{BC}{A_1}\left(1-\frac{A_3}{A_2}\right)=0,$$
$$\frac{BC}{A_1}\left(1-\frac{A_2}{A_3}\right)=0.$$

Итак, $A_2=A_3=A$ является необходимым условием корректной определенности форм Ψ_1 и Ψ_2. Оставшиеся уравнения, тогда принимают вид следующей, вообще говоря переопределенной системы дифференциальных уравнений:

$$A-\frac{B^2+C^2}{2A}+\frac{BC'+B'C}{2}+\frac{BCA'}{2A}=0,$$
$$BC'+B'C+4A=0,$$
$$\frac{BB'+CC'}{2}+\frac{A'(B^2+C^2)}{2A}+\frac{BC}{A}=0,$$
$$\frac{BB'-CC'}{2}+\frac{A'(B^2-C^2)}{2A}=0.$$

Разрешая эту систему относительно производных убеждаемся, что система оказывается корректной и совпадает с (2.20).

Условия гладкости метрики в точке t_0 доказывается совершенно аналогично случаю группы голономии $Spin(7)$, который был подробно изложен в параграфе 2.4, доказательство леммы 2.2. Заметим только, что при факторизации единичной сферы S^3 по хопфовскому действию окружности мы получаем сферу радиуса $1/2$, что и объясняет условие $|A'(0)|=2$.

Проинтегрируем систему (2.20): $(AB)'=-2C$, откуда

$$\frac{(AB)'}{ABC}=-\frac{2}{AB}.$$

Сделаем замену переменной

$$dr=ABCdt,$$

тогда непосредственным интегрированием получаем

$$A^2B^2 = -4(r - r_3),$$

где r_3 — константа интегрирования. Совершенно аналогично

$$A^2C^2 = -4(r - r_2), B^2C^2 = -8(r - r_1).$$

Таким образом, метрика (2.19) определена при $r \in (-\infty, \min\{r_1, r_2, r_3\})$. Далее, условия регулярности означают, что $A(t_0) = 0$, т.е. константы r_3 и r_2 равны, причем отвечают при замене переменной константе t_0. Но это значит, что $A^2B^2 = A^2C^2$ при всех r, откуда получаем $B(r) = \pm C(r)$. Непосредственно проверяется, что система (2.20) инвариантна при замене $C \mapsto -C, t \mapsto -t$, поэтому остается исследовать случай $B = C$.

При $B = C$ система сводится к паре уравнений

$$A' = 2\left(\frac{A^2}{B^2} - 1\right),\ B' = -2\frac{A}{B},$$

решение которой дает метрику (2.21). Условия регулярности для этой метрики выполнены, и эта гладкая метрика была найдена впервые в [40] для случая $M = SU(3)/S^1$ и $M = S^7$ (отметим, что при $B = C$ не обязательно требовать кэлеровости $\mathcal{O}$). Теорема доказана.

В общем случае $B \neq C$ система (2.20) также интегрируется [55], однако получающиеся решения не удовлетворяют условиям регулярности.

2.6 Примеры

Интересное семейство примеров возникает, если рассмотреть в качестве 3-сасакиевых многообразий семимерные двойные частные группы Ли $SU(3)$. А именно, пусть p_1, p_2, p_3 — попарно взаимно простые положительные целые числа. Рассмотрим следующее действие группы S^1 на группе Ли $SU(3)$:

$$z \in S^1 : A \mapsto \mathrm{diag}\,(z^{p_1}, z^{p_2}, z^{p_3}) \cdot A \cdot \mathrm{diag}\,(1, 1, z^{-p_1-p_2-p_3}).$$

Такое действие свободно, и в [35] показано, что на пространстве орбит $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{p_1,p_2,p_3}$ существует 3-сасакиева структура. Более того, действие группы $SU(2)$ на $SU(3)$ правыми сдвигами

$$B \in SU(2) : A \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

коммутирует с действием S^1 и переносится на пространство орбит $\mathcal{S}$. Соответствующие киллинговы поля и будут являться характеристическими полями ξ_i на $\mathcal{S}$. Следовательно, соответствующим твисторным пространством $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{p_1,p_2,p_3}$ будет пространство орбит следующего действия тора T^2 на $SU(3)$:

$$(z, u) \in T^2 : A \mapsto \mathrm{diag}\ (z^{p_1}, z^{p_2}, z^{p_3}) \cdot A \cdot \mathrm{diag}\ (u, u^{-1}, z^{-p_1-p_2-p_3}).$$

Лемма 2.17. *Пространство $\mathcal{Z}_{p_1,p_2,p_3}$ диффеоморфно пространству орбит группы $U(3)$ относительно следующего действия тора T^3:*

$$(z, u, v) \in T^3 : A \mapsto diag\ (z^{-p_2-p_3}, z^{-p_1-p_3}, z^{-p_1-p_2}) \cdot A \cdot diag\ (u, v, 1). \quad (2.22)$$

Для доказательства достаточно проверить, что каждая T^3-орбита действия (2.21) в $U(3)$ высекает в группе $SU(3) \subset U(3)$ в точности орбиту T^2-действия (2.22).

Действие (2.22) позволяет прозрачно описать топологию $\mathcal{Z}$ и, следовательно, топологию $\mathcal{N}$. При этом мы пользуемся конструкцией взятой из [49]. Рассмотрим подмногообразие

$$E = \{(u, [v]) \mid u \perp v\} \subset S^5 \times \mathbb{C}P^2.$$

Очевидно, что E диффеоморфно $U(3)/S^1 \times S^1$ («правая» часть действия (4)) и представляет собой проективизацию $\mathbb{C}^2$-расслоения $\tilde{E} = \{(u, v) \mid u \perp v\} \subset S^5 \times \mathbb{C}^3$ над S^5. Добавив тривиальное одномерное комплексное расслоение над S^5 к $\tilde{E}$, мы получаем тривиальное расслоение $S^5 \times \mathbb{C}^3$ над S^5.

Группа S^1 действует слева автоморфизмами векторного расслоения $\tilde{E}$ и $\mathcal{Z} = S^1 \backslash E$ является проективизацией $\mathbb{C}^2$-расслоения $S^1 \backslash \tilde{E}$ над взвешенным комплексным проективным пространством $\mathcal{O} = \mathbb{C}P^2(q_1, q_2, q_3) = S^1 \backslash S^5$, где $q_i = (p_{i+1} + p_{i+2})/2$, если все p_i нечетны, и $q_i = (p_{i+1} + p_{i+2})$ в противном случае.

Из всего вышесказанного вытекает, что расслоение $S^1 \backslash \tilde{E}$ стабильно эквивалентно расслоению $S^1 \backslash (S^5 \times \mathbb{C}^3)$ над $\mathcal{O}$. Последнее расслоение очевидным образом раскладывается в сумму Уитни $\sum_{i=1}^3 \xi^{q_i}$, где ξ — аналог одномерного универсального расслоения для орбифолда $\mathcal{O}$. Таким образом, твисторное пространство $\mathcal{Z}$ диффеоморфно проективизации двумерного комплексного расслоения над $\mathbb{C}P^2(q_1, q_2, q_3)$ стабильно эквивалентного $\xi^{q_1} \oplus \xi^{q_2} \oplus \xi^{q_3}$. Вспоминая определение $\mathcal{N}$, немедленно получаем

Следствие. *Орбифолд $\mathcal{N}$ диффеоморфен самосопряженной части внешней степени $\Lambda^2_+ \eta$ двумерного комплексного расслоения η над $\mathbb{C}P^2(q_1, q_2, q_3)$ стабильно эквивалентного $\xi^{q_1} \oplus \xi^{q_2} \oplus \xi^{q_3}$.*

Глава 3

Специальные кэлеровы метрики на комплексных линейных расслоениях и $K3$-поверхности

3.1 Конструкция эйнштейновых метрик на одномерных комплексных расслоениях

Напомним, что метрикой Эйнштейна называется метрика g_{ij}, удовлетворяющая уравнению Эйнштейна

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}, \tag{3.1}$$

где R_{ij} — тензор Риччи метрики g_{ij}. Случай нулевой кривизны Риччи возникает при $\lambda = 0$. Уравнение Эйнштейна чрезвычайно сложно по своей структуре, и на данный момент нет общих подходов к его решению. Поэтому естественно пытаться искать решения при дополнительном предположении о симметричности метрики. В этом направлении был получен ряд результатов, в частности, на данный момент много известно об однородных метриках и о метриках коодннородности один (см. обзор в [14] и [87]). Например, классифицированы все односвязные компактные однородные многообразия Эйнштейна до размерности 5 включительно [62, 78, 88, 25] и в размерности 7 [72] (в размерности 6 остался до конца не исследованным довольно трудоемкий случай $S^3 \times S^3$). Однако несомненную важность имеет задача построения решений уравнения Эйнштейна с как можно меньшими группами изометрий. Например, одной из нерешенных задач общей теории относительности является задача построения лоренцевой метрики, описывающей гравитационное поле, создаваемое двумя тяготеющими телами. Из физических соображений ясно, что соответствующее решение (3.1) может иметь, самое большее, одномерную группу изометрий (т. е. коолнородность три). В настоящий момент в римановом случае известен ряд точных решений уравнения Эйнштейна с малыми группами изометрий. Например, используя главные торические расслоения над произведениями многообразий Кэлера — Эйнштейна можно построить решения (3.1) со сколь угодно высокой коднородностью, однако эти решения аналитически сводится к метрикам когоднородности один. Было бы интересно исследовать решения с более сложной аналитической структурой (пример метрики аналитически «более сложной» — метрика Керра общей теории относительности). Данный вопрос кажется более изученным в размерности четыре: здесь известны точные решения, называемые *мульти-инстантонами*, построенные в [52]. Однако, одной из черт этих решений является их топологическая «непрозрачность». Построенные нами метрики в каком-то смысле занимают промежуточное положение: их топологическое строение хорошо контролируемо, но взамен мы получаем две особые точки, окрестности которых диффеоморфны конусам над линзовыми пространствами.

Часть известных метрик коодноролности один нулевой кривизны Риччи естественным образом определена на пространствах векторных расслоений. Все такие расслоения с кэлеровой базой и соответствующие метрики были классифицированы в [32], и, несколько с других позиций, изучались в [75]. В частности, полные метрики нулевой кривизны Риччи существуют на части линейных комплексных расслоений над $\mathbb{C}P^n$, а именно на всех таких расслоениях с классом Чженя по модулю не превосходящим n (мы принимаем за 1 класс Чженя универсального линейного расслоения). Для нас особую важность будет иметь одна из этих метрик, найденная в [48], и называемая метрикой Эгучи — Хансона:

$$ds^2 = \frac{4dr^2}{1-\frac{1}{r^4}} + r^2\left(1-\frac{1}{r^4}\right)(d\psi + \cos\theta d\phi)^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.2)$$

Эта метрика является гладкой и полной римановой метрикой, определенной на кокасательном расслоении T^*S^2 к сфере S^2 с геодезическими координатами (θ, ϕ); ψ, r — угловая и радиальная координаты на комплексных слоях T^*S^2.

Приступим к описанию нашей конструкции. В области U с координатами $(\rho, \theta, \phi, \psi) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ рассмотрим риманову метрику

$$ds^2 = f(d\rho^2 + d\theta^2) + g_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.3)$$

где $i, j = 2, 3$ и функция f и матрица $g = (g_{ij})$ зависят только от ρ и θ. Аналогичный вид метрики (лоренцев вариант) рассматривался в [9]; там же посчитан тензор Риччи для такой метрики. Условие $R_{ij} = 0$ принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\sqrt{\det g}\ \frac{\partial g}{\partial\rho}\ g^{-1}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sqrt{\det g}\ \frac{\partial g}{\partial\theta}\ g^{-1}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial(\ln f)}{\partial\rho}\ \tfrac{\partial(\ln\det g)}{\partial\theta} + \tfrac{\partial(\ln f)}{\partial\theta}\ \tfrac{\partial(\ln\det g)}{\partial\rho} = 2\tfrac{\partial^2(\ln\det g)}{\partial\rho\partial\theta} + \mathrm{Tr}\ (\tfrac{\partial g}{\partial\rho}\ g^{-1}\ \tfrac{\partial g}{\partial\theta}\ g^{-1}),\\
&\tfrac{\partial(\ln f)}{\partial\rho}\ \tfrac{\partial(\ln\det g)}{\partial\rho} - \tfrac{\partial(\ln f)}{\partial\theta}\ \tfrac{\partial(\ln\det g)}{\partial\theta} = \left(\tfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)(\ln\det g) +\\
&+\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \left(\tfrac{\partial g}{\partial\rho}\ g^{-1}\ \tfrac{\partial g}{\partial\rho}\ g^{-1} - \tfrac{\partial g}{\partial\theta}\ g^{-1}\ \tfrac{\partial g}{\partial\theta}\ g^{-1}\right).
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Видно, что основным уравнением является уравнение (3.4) на матрицу g; после нахождения g функция f находится из (3.5) простым интегрированием. Уравнение (3.4) в лоренцевом случае также исследовалось в [10] и [11], где для (3.4) была найдена L-A пара и развит солитонный подход. Будем считать переменные ϕ, ψ периодическими и определенными на некотором двумерном торе; этот тор очевидным образом действует изометриями на пространстве, на котором определена метрика ds^2.

Нетрудно проверить, что следующие функции являются решением системы (3.4), (3.5):

$$g = \frac{\operatorname{sh}^2\rho}{\operatorname{ch}\rho}\begin{pmatrix} \cos^2\theta & 1\cos\theta \\ b\cos\theta & 1 \end{pmatrix},$$

$$f = \operatorname{ch}\rho.$$

Если положить $r^2 = \operatorname{ch}\rho$, то мы получим метрику Эгучи — Х ансона (3.2).

При исследовании системы уравнений (3.4), (3.5) нам удалось найти следующее решение:

$$f = b\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta,$$

$$g = \frac{1}{f}\left[\operatorname{sh}^2\rho\begin{pmatrix} \cos^2\theta & b\cos\theta \\ b\cos\theta & b^2 \end{pmatrix} + \sin^2\theta\begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2\rho & a\operatorname{ch}\rho \\ a\operatorname{ch}\rho & a^2 \end{pmatrix}\right],$$

где a и b — произвольные вещественные параметры. Таким образом, мы получаем метрику нулевой кривизны Риччи следующего вида:

$$\begin{gathered} ds^2 = (\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta)\,(d\rho^2 + d\theta^2) + \\ \tfrac{\operatorname{sh}^2\rho}{\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta}\,(d\psi + \cos\theta d\phi)^2 + \tfrac{\sin^2\theta}{\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta}\,(ad\psi + \operatorname{ch}\rho d\phi)^2 \end{gathered} \tag{3.6}$$

(мы положили $b = 1$ для простоты; случай произвольного b сводится к общему гомотетией). Для анализа полученной метрики нам будет иногда удобно перейти в «геометрическую» систему координат, по аналогии с метрикой Эгучи — Хансона. А именно, как и выше, введем координату r соотношением:

$$r^2 = \operatorname{ch}\rho.$$

В координатах (r, θ, ϕ, ψ) метрика (3.5) принимает вид:

$$\begin{gathered} ds^2 = (r^2 - a\cos\theta)\left(\tfrac{4r^2dr^2}{r^4-1} + d\theta^2\right) + \\ \tfrac{r^4-1}{r^2-a\cos\theta}\,(d\psi + \cos\theta d\phi)^2 + \tfrac{r^4\sin^2\theta}{r^2-a\cos\theta}\left(\tfrac{a}{r^2}d\psi + d\phi\right)^2. \end{gathered} \tag{3.6$'$}$$

Для исследования топологии пространства, на котором определена метрика (3.6) нам потребуются некоторые приготовления. Пусть

$$S^3 = \{(z_1, z_2) | |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

— трехмерная сфера в $\mathbb{C}^2$. Возьмем произвольную пару взаимно-простых чисел k, l и обозначим через $\omega = e^{2\pi i \frac{1}{k+l}}$ образующий группы $\mathbb{Z}_{k+l}$ корней из единицы степени $k+l$. Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}_{k+l}$ на S^3:

$$\omega \cdot (z_1, z_2) = (\omega^k z_1, \omega^l z_2).$$

Это действие свободно, и его фактор-пространством является линзовое пространство $L(-1, k+l)$. Теперь рассмотрим следующее действие окружности S^1 на S^3:

$$z \in S^1 : (z_1, z_2) \mapsto (z^k z_1, z^l z_2).$$

Это действие не является свободным, и его фактор-пространством является двумерный орбифолд $S^2(k, l)$, топологически гомеоморфный сфере, но имеющий в полюсах две особые конусные точки с «углами» $2\pi/k$ и $2\pi/l$. Очевидно, что орбиты действия S^1 содержат орбиты действия $\mathbb{Z}_{k+l}$, поэтому мы получаем естественную проекцию

$$p : L(-1, k+l) \to S^2(k, l).$$

По аналогии с тем, как универсальное комплексное линейное расслоение над $\mathbb{C}P^1 = S^2$ строится по расслоению Хопфа S^3 над S^2, мы определим пространство $M_{k,l}$ как цилиндр отображения p, т. е. надо рассмотреть цилиндр над $L(-1, k+l)$ и на одном основании затянуть в точки орбиты действия S^1. Пространство $M_{k,l}$ имеет структуру гладкого четырехмерного орбифолда и естественным образом расслаивается над $S^2(k, l)$ с одномерными комплексными слоями, хотя это расслоение уже не будет, вообще говоря, локально тривиальным. Очевидно, что $M_{k,l}$ является гладким многообразием всюду, за исключением, возможно, двух полюсов в $S^2(k, l) \subset M_{k,l}$.

Теорема 3.1. *i) Метрика (3.6) является гладкой полной римановой метрикой нулевой кривизны Риччи коодногодности два на $M_a = M_{k,l}$*

при $-1 < a = \frac{p}{q} < 1$, $a \neq 0$ *где* p, q *— пара взаимно простых целых чисел,* $q > 0$ *и*

$$\begin{cases} k = q - p, \ l = q + p, \text{ если } \ q \pm p \text{ нечетно,} \\ k = \frac{q-p}{2}, \ l = \frac{q+p}{2}, \text{если } q \pm p \ \text{ четно.} \end{cases}$$

ii) При $a = 0$ *метрика (3.6) является полной римановой метрикой нулевой кривизны Риччи коодноpодности один на* $M_{1,1}$ *и совпадает с метрикой Эгучи — Хансона (3.2).*

Доказательство. По условию, пара чисел k и l такова, что $a = \frac{l-k}{l+k}$ и k, l — взаимно просты. Рассмотрим на S^3 систему координат (θ, α, β):

$$z_1 = \cos\frac{\theta}{2}\ e^{2\pi i\alpha}, z_2 = \sin\frac{\theta}{2}\ e^{2\pi i\beta},$$

где $0 \leq \theta \leq \pi$, а $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$. При факторизации S^3 по действию $\mathbb{Z}_{k+l}$ к решетке $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, порожденной векторами $e_1 = \frac{\partial}{\partial\beta}, e_2 = \frac{\partial}{\partial\alpha}$ добавляется элемент

$$e_3 = \frac{k}{k+l}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{l}{k+l}\frac{\partial}{\partial\beta}.$$

Таким образом, координаты (θ, α, β) задают линзовое пространство $L(-1, k+l)$, если $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2/\Gamma$, где

$$\Gamma = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle.$$

На $M_{k,l}$ добавим радиальную координату r — «расстояние до дна» цилиндра вдоль его образующей плюс один. Таким образом $r \geq 1$, причем $r = 1$ в точности для точек из $S^2(k, l)$. Мы получили систему координат $(r, \theta, \alpha, \beta)$ на $M_{k,l}$. Рассмотрим теперь координаты (r, θ, ψ, ϕ), связанные с предыдущими соотношениями:

$$\alpha = \frac{\psi + \phi}{2}, \beta = \frac{\psi - \phi}{2}.$$

В новых координатах порождающие решетки Γ примут вид:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial\phi}, e_2 = \frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{\partial}{\partial\phi}, e_3 = \frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{k-l}{k+l}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Вернемся теперь к метрике (3.6). Координаты (r, θ, ϕ, ψ) мы считаем определенными в области $U \times \mathbb{R}^2/\Gamma$, где

$$U = \{(r, \theta) | 1 < r < \infty, 0 < \theta < \pi\}.$$

Очевидно, что метрика будет риманова (т. е. с сигнатурой $+ + ++$) и регулярна в $U \times \mathbb{R}^2/\Gamma$, если

$$-1 < a < 1.$$

Вырождение метрики на краю области определения влечет «склейки» точек края между собой и задает топологию полученного риманова пространства, априори с особенностями. Множество точек вырождения метрики очевидным образом распадается на три компоненты, определяемые уравнениями $\theta = 0, \theta = \pi, r = 1$, соответственно. На каждой из этих трех компонент возникает одномерное касательное распределение, вдоль которого метрика (3.6) равна нулю. А именно, мы получаем одномерные распределения

$$V_1 = \{dr = d\theta = d\psi + d\phi = 0\},$$
$$V_2 = \{dr = d\theta = d\psi - d\phi = 0\},$$
$$V_3 = \{dr = d\theta = ad\psi + d\phi = 0\},$$

для компонент $\theta = 0, \theta = \pi$ и $r = 1$, соответственно. Отметим, что на пересечении компонент точек вырождения ($\{\theta = 0, r = 1\}$ и $\{\theta = \pi, r = 1\}$) определены по два линейно независимых распределения V_1, V_3 и V_2, V_3. Интегральные кривые распределений V_i, являющиеся линейными обмотками тора $\mathbb{R}^2/\Gamma$ имеют нулевую длину дуги, следовательно, для гладкого продолжения метрики на край $\partial U \times \mathbb{R}^2/\Gamma$ необходимо затянуть в точку каждую интегральную кривую распределений V_i.

Фиксируем $r > 1$. Тогда при $\theta = 0$ $(\theta = \pi)$ распределение V_1 (V_2) порождено вектором e_1 (e_2). Это значит, что в произведении $(0, \pi) \times \mathbb{R}^2/\langle e_1, e_2\rangle$ надо на левом краю затянуть параллели, а не правом — меридианы тора. Таким образом получается сфера S^3. Если теперь учесть элемент e_3 решетки Γ, то мы получим, что при фиксированном $r>1$ пространство, определяемое метрикой (3.6) диффеоморфно линзе $L(-1,k+l)$.

Теперь посмотрим, что происходит на нижнем основании $r=1$. Здесь надо затянуть в точку каждую интегральную кривую распределения V_3 на S^3. Легко видеть, что распределение V_3 порождено вектором e_3, поэтому интегральной кривой V_3 является обмотка $\mathbb{R}e_3$, т.е. после затягивания кривых на нижнем основании мы получаем $S^2(k,l)$. Таким образом, метрика (3.6) определена на $M_{k,l}$. Выясним степень ее гладкости, по пути прояснив строение $M_{k,l}$ в двух «особых» точках $\theta=0, r=1$ и $\theta=\pi, r=1$.

Во-первых, для исследования гладкости метрики (3.6) можно сократить ее на гладкий множитель f и рассматривать метрику

$$d\tilde{s}^2=\tfrac{4r^2dr^2}{r^4-1}+d\theta^2+$$
$$\tfrac{r^4-1}{(r^2-a\cos\theta)^2}\left(d\psi+\cos\theta d\phi\right)^2+\tfrac{r^4\sin^2\theta}{(r^2-a\cos\theta)^2}\left(\tfrac{a}{r^2}d\psi+d\phi\right)^2.$$

На $M_{k,l}$ рассмотрим два двумерных взаимно ортогональных распределения D_1 и D_2:

$$D_1=\{dr=0, d\psi+\cos\theta d\phi=0\},$$
$$D_2=\{d\theta=0, \tfrac{a}{r^2}d\psi+d\phi=0\}.$$

Эти распределения гладкие на $M_{k,l}$ и невырождены. Значит, достаточно доказать гладкость ограничения метрики $d\tilde{s}^2$ на D_1 и D_2 в окрестности множеств $\theta=0,\pi; r=1$. Несложно посчитать, что

$$d\tilde{s}^2|_{D_1}=d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2,$$

$$d\tilde{s}^2|_{D_2}=d\rho^2+\operatorname{th}^2\rho d\psi^2.$$

В окрестности точек $\theta=0$ и $\theta=\pi$ рассмотрим отображение

$$u_1:(r,\theta,\psi,\phi)\mapsto(\theta,\phi),$$

а в окрестности точек $r=1$ — отображение

$$u_2:(r,\theta,\psi,\phi)\mapsto(\rho,\psi).$$

Видно, что ограничения дифференциалов du_1 и du_2 на D_1 и D_2, соответственно, являются линейными изоморфизмами. Таким образом, метрика $d\tilde{s}^2|_{D_1}$ является поднятием при помощи u_1 метрики $d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, определенной на плоскости с полярными координатами θ, ϕ. Аналогично, метрика $d\tilde{s}^2|_{D_2}$ является поднятием при помощи u_2 метрики $d\rho^2 + \operatorname{th}^2\rho d\psi^2$. Эти две метрики являются гладкими в точности тогда, когда полные периоды переменных ϕ, ψ равны 2π. Если $r > 1$, $\theta = 0$ (или $\theta = \pi$), то происходит затягивание в точку торических кривых $\mathbb{R}e_1$ (или $\mathbb{R}e_2$). Нетрудно убедиться, что периодичность этих кривых задается элементом e_1 (или e_2) решетки Γ, что соответствует полному периоду 2π переменной ϕ. Совершенно аналогично, при $r = 1$, $\theta \neq 0, \pi$ происходит затягивание торических кривых $\mathbb{R}e_3$, на которых периодичность задается вектором e_3 и переменная ψ имеет полный период 2π. Далее, в точке $\theta = 0, r = 1$ происходит одновременное затягивание пары кривых $\mathbb{R}e_1$ и $\mathbb{R}e_3$. После затягивания окрестность этой точки становится диффеоморфной произведению двух двумерных дисков (например, с полярными системами координат (ρ, ψ) и (θ, ϕ)) с гладкой метрикой, поднимаемой как и выше при помощи u_1 и u_2. Однако, надо еще факторизовать эту окрестности по действию элемента $e_2 \in \Gamma$. Поскольку

$$e_2 \equiv -\frac{1}{k}e_1 + \frac{1}{k}e_3 (\mathrm{mod}\ e_1, e_3),$$

мы окончательно получаем, что окрестность точки $\theta = 0, r = 1$ в $M_{k,l}$ диффеоморфна конусу над линзовым пространством $L(-1, k)$, причем метрика на конусе гладкая в смысле гладкости метрики на орбифолде, т.е. получается факторизацией гладкой метрики на $\mathbb{R}^4$ по дискретной группе изометрий, порожденной элементом e_2. Совершенно аналогично, в точке $\theta = \pi, r = 1$ мы имеем

$$e_1 \equiv -\frac{1}{l}e_2 + \frac{1}{l}e_3 (\mathrm{mod}\ e_2, e_3),$$

и, следовательно, окрестность этой точки в $M_{k,l}$ диффеоморфна конусу над линзовым пространством $L(-1, l)$ с гладкой метрикой.

Докажем теперь, что коонородность метрики (6) действительно равна двум при $a \neq 0$. Поскольку этот вопрос носит локальный характер, рассмотрим метрику ds^2, определенную на области $U \times \mathbb{R}^2$ с координатами $(\rho, \theta, \psi, \phi)$. Для любых значений ψ_0, ϕ_0 переменных ψ, ϕ поверхность M_{ψ_0,ϕ_0} в M_a, определяемая уравнениями $\psi = \psi_0$, $\phi = \phi_0$ является вполне геодезической поверхностью с координатами (ρ, θ) как множество неподвижных точек изометрии

$$\sigma_{\psi_0,\phi_0} : (\rho, \theta, \psi, \phi) \mapsto (\rho, \theta, 2\psi_0 - \psi, 2\phi_0 - \phi).$$

Допустим, что у нас есть поле Киллинга K на $U \times \mathbb{R}^2$. Тогда Ad $\sigma_{\psi_0,\phi_0}(K)$ — тоже поле Киллинга. Рассмотрим усреднение поля K по σ:

$$\bar{K} = \frac{1}{2}(K + \mathrm{Ad}\ \sigma_{\psi_0,\phi_0}(K)).$$

Поле $\bar{K}$ касательно к M_{ψ_0,ϕ_0}, является полем Киллинга на M_a, и следовательно, является полем Киллинга на M_{ψ_0,ϕ_0}. Однако метрика на поверхности M_{ψ_0,ϕ_0} не зависит от ψ_0, ϕ_0 и имеет вид

$$d\bar{s}^2 = (\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta)(d\rho^2 + d\theta^2).$$

Непосредственно проверяется, что метрика $d\bar{s}^2$ не имеет нетривиальных киллинговых векторных полей при $a \neq 0$, значит $\bar{K} = 0$ на M_{ψ_0,ϕ_0}. Но это значит, что поле K ортогонально к поверхности M_{ψ_0,ϕ_0}. Поскольку ψ_0 и ϕ_0 выбраны произвольно, то мы получаем, что поле K всюду ортогонально к полям $\frac{\partial}{\partial\rho}, \frac{\partial}{\partial\theta}$. Но это значит, что любое поле Киллинга K касательно к орбитам действия тора T^2. Итак, коонородность M_a равна $\dim M_a/T^2 = 2$. Теорема доказана.

Замечания.

1. Мы показали, что в двух особых точках пространство $M_{k,l}$ локально устроено как конус над линзовым пространством $L(-1,k)$ и $L(-1,l)$, соответственно. Значит при $q = p+1$ окрестность первой точки становится многообразием, а при $q = -p+1$ — то же происходит с окрестностью второй точки. Однако $M_{k,l}$ является многообразием в обеих особых точках лишь при $a = 0$.

2. Если параметр a иррационален, то распределение V_3 представляет собой плотную обмотку тора $\mathbb{R}^2/\langle e_1, e_2\rangle$. Значит при $r = 1$ надо затянуть в точку каждый такой тор, т. е. вместо $S^2(k,l)$ в M_a будет лежать отрезок, окрестность каждой точки которого в M_a гомеоморфна произведению конуса над 2-тором на отрезок. Таким образом, в этом случае M_a не является орбифолдом, и нельзя говорить о гладкости или полноте метрики на M_a. В предельном случае $a = \pm 1$ непосредственным вычислением можно установить, что $R_{ijkl} = 0$, т. е. ds^2 является плоской метрикой.

3. Форма (3.3) метрики обеспечивает распадение уравнений Эйнштейна на две группы уравнений (3.4) и (3.5), причем (3.4) — это уравнение только на матрицу g, а (3.5) элементарно интегрируется при известной g. Это подсказывает возможный путь для обобщения на более высокие размерности: в переменных $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$ рассмотрим метрику вида

$$ds^2 = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + g_{ij} dy^i dy^j,$$

где матрицы $h_{\alpha\beta}$ и g_{ij} зависят только от $(x^1, \dots, x^n)$. Задача тогда состоит в том, чтобы найти такой класс метрик $h_{\alpha\beta}$, чтобы уравнение Эйнштейна (3.1) распалось на две группы: на матричное нелинейное уравнение, содержащее только неизвестную g_{ij} и элементарно интегрируемые уравнения, при известных g_{ij}. При этом мы можем считать, что переменные $(y_1, \dots, y_n)$ — циклические и определены на некотором m-торе T^m, который действует изометриями на пространстве, на котором определена метрика ds^2. Тем самым, мы получаем, что ds^2 определена на некотором торическом многообразии (или орбифолде), и имеет коодноролность m. Возможно, что наиболее интересные примеры следует ожидать при $m = n$.

4. Безусловный интерес представляет построение решений вида (3.3) для уравнения (3.1) при $\lambda \neq 0$, особенно при $\lambda > 0$. В последнем случае по теореме Майерса решение (при условии его гладкости и полноты) определено на компактном многообразии (орбифолде), поэтому для области определения переменных (ρ, θ) появляется дополнительный «кусок» границы, что ужесточает требования регулярности на краю.

3.2 Специальная кэлерова структура на $M_{k,l}$

Пусть $\mathbf{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_n)$ — набор взаимно простых целых положительных чисел. Рассмотрим действие $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ на $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ с весами $k_0, \ldots, k_n$:

$$\lambda \in \mathbb{C}^* : (z_0, z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_0\lambda^{k_0}, z_1\lambda^{k_1}, \ldots, z_n\lambda^{k_n}).$$

Множество орбит этого действия $\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ обладает структурой комплексного орбифолда и называется взвешенным комплексным проективным пространством. Орбиту точки $(z_0, \ldots z_n)$ будем обозначать как $[z_0 : \ldots : z_n]$. Структура особенностей орбифолда $\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ может быть довольно сложна и вообще говоря зависит от свойств взаимной делимости различных наборов чисел из $k_0, \ldots, k_n$. В случае, если каждая пара чисел k_i, k_j взаимно проста (именно такой случай интересует нас), ситуация несколько упрощается, и $\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ обладает лишь дискретным набором изолированных особенностей $[1 : 0 : \ldots : 0], [0 : 1 : \ldots : 0], \ldots, [0 : 0 : \ldots : 1]$, вне которых является комплексным аналитическим многообразием. В качестве униформизующего атласа надо рассмотреть набор карт:

$$\phi_i(z_1, \ldots, z_n) = [z_1 : \ldots : z_i : 1 : z_{i+1} : \ldots : z_n],\ i = 0, \ldots, n.$$

При этом для каждой карты униформизующей группой будет группа $\Gamma_i = \mathbb{Z}_{k_i}$, порожденная элементом $\omega_i = e^{\frac{2\pi i}{k_i}}$, действие которого задается следующим образом:

$$\omega_i(z_1, \ldots, z_n) = (z_1\omega_i^{k_0}, \ldots, z_i\omega_i^{k_{i-1}}, z_{i+1}\omega_i^{k_{i+1}}, \ldots, z_n\omega_i^{k_n}).$$

Нам потребуется обобщение рассмотренной конструкции. Предположим, что у нас есть наборы $\mathbf{k} = (k_0, \ldots, k_n), \mathbf{l} = (l_0, \ldots, l_m)$ попарно взаимно простых целых чисел, причем $k_i > 0$, $l_j < 0$. Формально, как и ранее, мы можем рассмотреть действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^{n+m+2} \setminus \{0\}$ с весами $k_0, \ldots, k_n, l_0, \ldots l_m$. При этом в качестве пространства орбит $\mathbb{C}P^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = (\mathbb{C}^{n+m+2} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ мы получим топологическое пространство, обладающее униформизующим атласом, который задается набором карт ϕ_i, ψ_j, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots m$, определенных также, как и выше. Однако полученное пространство орбит не обладает свойством хаусдорфовости: особые точки, соответствующие положительным весам не отделены от особых точек, отвечающих весам отрицательным. Более точно, рассмотрим очевидное вложение $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1} \times \{0\}$ и $\mathbb{C}^{m+1} = \{0\} \times \mathbb{C}^{m+1}$ в $\mathbb{C}^{n+m+2} = \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1}$. При переходе к пространству орбит мы получаем два орбифолда $\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ и $\mathbb{C}P^m(\mathbf{l})$, естественно вложенные в $\mathbb{C}P^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ и покрывающие вместе все особые точки. Очевидно, что $\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ не отделимо от $\mathbb{C}P^m(\mathbf{l})$ в фактор-топологии пространства орбит. Поэтому определим два взвешенных комплексных проективных пространства:

$$\mathbb{C}P_+^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \mathbb{C}P^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \setminus \mathbb{C}P^m(\mathbf{l}),$$

$$\mathbb{C}P_-^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \mathbb{C}P^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \setminus \mathbb{C}P^n(\mathbf{k}).$$

Ясно, что $\mathbb{C}P_+^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ и $\mathbb{C}P_-^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ являются некомпактными орбифолдами с униформизующими атласами, заданными наборами карт ϕ_i, $i = 0, \ldots, n$ и ψ_j, $j = 0, \ldots, m$, соответственно. Заметим, что имеется очевидный изоморфизм комплексных многообразий $\mathbb{C}P_+^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \setminus \mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ и $\mathbb{C}P_-^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \setminus \mathbb{C}P^m(\mathbf{l})$, индуцированный тождественным преобразованием пространства $\mathbb{C}^{n+m+2}$.

Перейдем к описанию нужных нам пространств. Рассмотрим пару k, l взаимно простых положительных чисел. Мы получаем взвешенную комплексную проективную прямую $S^2(k, l) = \mathbb{C}P^1(k, l)$. В качестве униформизующего атласа на $S^2(k, l)$ выступают две карты ϕ_0, ϕ_1, задающие координаты $z \in \mathbb{C}$ и $w \in \mathbb{C}$:

$$\phi_0(z) = [1 : z],\ \phi_1(w) = [w : 1].$$

Координаты связаны соотношением $z^k w^l = 1$. Таким образом, $S^2(k,l)$ имеет две особые точки $z = 0$ и $w = 0$ с униформизующими группами $\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{Z}_l$, соответственно. Вне особых точек $S^2(k,l)$ обладает структурой комплексного многообразия, а топологически представляет собой двумерную сферу.

Изучим структуру кокасательного расслоения $T^*S^2(k,l)$. В касательном расслоении $T(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})$ естественно выделяется подрасслоение, состоящее из вертикальных касательных векторов относительно действия $\mathbb{C}^*$: вертикальными называются векторы, касательные к орбитам действия. В кокасательном расслоении $T^*(\mathbb{C}^2\backslash\{0\}) = \Lambda^{1,0}\mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^2\backslash\{0\})$ рассмотрим подрасслоение E, состоящее из тех ковекторов, которые обращаются в нуль на вертикальных векторах. Нетрудно понять, что

$$E = \{((z_0(lz_2dz_1 - kz_1dz_2), z_1, z_2)|z_0 \in \mathbb{C}, (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\backslash\{0\}\}.$$

Тогда действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ индуцирует действие $\mathbb{C}^*$ на E, которое устроено следующим образом:

$$\lambda \in \mathbb{C}^* : (z_0, z_1, z_2) \mapsto (z_0\lambda^{k+l}, z_1\lambda^{-k}, z_2\lambda^{-l}).$$

Поскольку факторпространство E по действию $\mathbb{C}^*$ очевидным образом совпадает с $T^*S^2(k,l)$, то мы тем самым получили, что $T^*S^2(k,l)$ можно отождествить с $\mathbb{C}P^2_-(k+l, -k, -l)$. Прямая $S^2(k,l)$ при этом вложена в $T^*S^2(k,l)$ как комплексное подмногообразие с особенностями $\{z_0 = 0\}$.

Таким образом, $T^*S^2(k,l)$ является комплексным орбифолдом с двумя особыми точками и униформизующими группами $\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{Z}_l$ в этих точках. В частности, если одно из чисел k, l равно единице, то особенность только одна, а если $k = l = 1$, то мы получаем кокасательное расслоение над стандартной двумерной сферой, без особенностей. Рассмотрим две карты с локальными координатами $(z,\alpha)\in\mathbb{C}^2$ и $(w,\beta)\in\mathbb{C}^2$, задающие атлас на $T^*S^2(k,l)$:

$$\psi_1(\alpha,z)=[\alpha:1:z],\ \psi_2(\beta,w)=[\beta:w:1].$$

Системы координат связаны соотношениями $z^kw^l=1,\alpha z=\beta w$. При этом униформизующие группы $\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{Z}_l$, действующие в каждой системе координат будут представлены в группе $SU(2)$, стандартно действующей на $\mathbb{C}^2$:

$$\mathbb{Z}_k=\left\{\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix}\mid \omega\in\mathbb{C},\omega^k=1\right\},$$
$$\mathbb{Z}_l=\left\{\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega^{-1}\end{pmatrix}\mid \omega\in\mathbb{C},\omega^l=1\right\}.$$

Прямая $S^2(k,l)$ вложена в $T^*S^2(k,l)$ как комплексное подмногообразие (с особенностями) $\{\alpha=\beta=0\}$.

В дальнейшем нам понадобится аналитическая структура $T^*S^2(k,l)$ на бесконечности. Поэтому, рассмотрим изоморфизм комплексных многообразий

$$\begin{gathered}\tau_{k,l}:(\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l})\backslash\{0\}=\mathbb{C}P^2_+(k+l,-k,-l)\backslash\{[1:0:0]\}\to T^*S^2(k,l)\backslash S^2(k,l),\\ \tau_{k,l}[z_0:z_1:z_2]=[z_0:z_1:z_2].\end{gathered}\tag{3.7}$$

Нетрудно убедиться, что $\tau_{k,l}$ «вклеивает» вместо нуля в $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}$ прямую $S^2(k,l)$. При этом различные орбиты действия $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$, «пересекающиеся» в точке $0\in\mathbb{C}^2$, уже не будут пересекаться в $T^*S^2(k,l)$ — аналог операции раздутия.

Легко заметить, что отображение (3.7) устанавливает диффеоморфизм сферического подрасслоения в $T^*S^2(k,l)$ и факторпространства трехмерной сферы $S^3\subset\mathbb{C}^2$ по действию $\mathbb{Z}_{k+l}$, т.е. линзового пространства $L(-1,k+l)$ (рассмотренного более подробно в предыдущем параграфе). При этом пространство $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ диффеоморфно открытому цилиндру и «вклеивание» $S^2(k,l)$ происходит затягиванием в точку на одном основании цилиндра каждой орбиты действия S^1 на S^3. Таким образом, пространство $T^*S^2(k,l)$ можно отождествить с пространством $M_{k,l}$, описанным в предыдущем параграфе.

Напомним, что риманова метрика на двумерном комплексном многообразии (орбифолде) называется специальной кэлеровой, если ее группа голономии лежит в группе $SU(2)$, стандартно представленной в касательном пространстве. Основным результатом параграфа является следующее наблюдение.

Теорема 3.2. *Пространство $M_{k,l} = T^*S^2(k,l)$ с метрикой (3.6) является специальным кэлеровым орбифолдом.*

Доказательство. Зададим ортонормированный относительно метрики (3.6) корепер e^1, e^2, e^3 и e^4 следующим образом:

$$\begin{array}{l} e^1 = \sqrt{\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta}\, d\rho, \\ e^2 = \frac{\operatorname{sh}\rho}{\sqrt{\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta}}(d\psi + \cos\theta d\phi), \\ e^3 = \sqrt{\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta}\, d\theta, \\ e^4 = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta}}(a d\psi + \operatorname{ch}\rho d\phi). \end{array}$$

Комплексная структура на $T^*S^2(k,l)$ задавалась при помощи карт (z,α) и (w,β). Оператор комплексной структуры J при этом действует вращением на угол $\pi/2$ одновременно в распределении вертикальных и горизонтальных векторов в $TT^*S^2(k,l)$. С другой стороны, очевидно, что эти распределения совпадают, соответственно с распределениями D_2 и D_1, фигурировавшими в доказательстве теоремы 1 из параграфа 1. Следовательно, $Je^1 = e^2$, $Je^2 = -e^1$, $Je^3 = e^4$, $Je^4 = -e^3$. Таким образом, форма

$$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 =$$

$$\operatorname{sh}\rho d\rho \wedge d\psi - a\sin\theta d\theta \wedge d\psi + \operatorname{sh}\rho\cos\theta d\rho \wedge d\phi - \operatorname{ch}\rho\sin\theta d\theta \wedge d\phi.$$

задает $U(2)$ структуру на $M_{k,l}$, соответствующую рассмотренной нами выше комплексной структуре на $T^*S^2(k,l)$. Непосредственным вычислением проверяется, что ω гладкая вне особых точек и замкнута (а следовательно, по предложению 1.5, параллельна). Значит $U(2)$-структура на $M_{k,l}$ не имеет кручения и пространство $M_{k,l}$ имеет группу голономии $U(2)$, т.е. является кэлеровым. Далее, поскольку по теореме 3.1 кривизна Риччи метрики (3.6) равна нулю, то форма Риччи нулевая, а это значит, по предложению 1.6, что локальная группа голономии пространства $M_{k,l}$ без пары особых точек лежит в $SU(2) \subset U(2)$. Таким образом, параллельный перенос вдоль маленьких петель вдали от пары особых точек попадает в $SU(2)$. В перенос «вокруг» особой точки дает вклад кроме всего прочего униформизующая группа орбифолда. Однако элементы униформизующих групп тоже лежат в $SU(2)$, поэтому группа голономии $M_{k,l}$ совпадает с $SU(2)$. Теорема доказана.

3.3 Приложения к геометрии $K3$-поверхностей

Конструкция Куммера. Напомним построение $K3$-поверхности при помощи конструкции Куммера. Рассмотрим комплексный двумерный тор $T^4 = \mathbb{C}^2/\Lambda$, где $\Lambda = \{(a+ib, c+id) | a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}$ — решетка в $\mathbb{C}^2$. Определим инволюцию $\sigma : T^4 \to T^4$ как

$$\sigma : (z_1, z_2) + \Lambda \mapsto (-z_1, -z_2) + \Lambda.$$

Инволюция σ имеет 16 неподвижных точек, а именно точки (z_1, z_2) при $z_i \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\}$. Если на T^4 рассмотреть плоскую метрику, то σ становится изометрией и $X = T^4/\sigma$ представляет собой специальный кэлеров орбифолд с 16 особыми точками. Окрестность каждой точки при этом устроена как $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$. Теперь рассмотрим комплексную поверхность Y, получаемую раздутием каждой из 16 особых точек — это и есть $K3$-поверхность.

Конструкцию раздутия можно представить следующим образом. Пусть $u = (u_1, u_2)$ — евклидовы координаты в $\mathbb{C}^2$; рассмотрим шаровую окрестность $\Delta = \{|u|^2 \le \varepsilon\}/\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, в которой будет происходить раздутие. Теперь рассмотрим $M_{1,1} = T^*S^2$ и отображение $\tau_{1,1} : \mathbb{C}^2 \backslash \{0\} \to M_{1,1} \backslash S^2$, построенные выше. Отображение $\tau_{1,1}$ индуцирует комплексный изоморфизм открытого подмногообразия $\Delta\backslash\{0\}$ и открытого подмногообразия в $M_{1,1}\backslash S^2$. Выкалывая точку $0\in\Delta$ и производя отождествление по указанному изоморфизму получаем комплексное многообразие без особой точки.

Конструкция Пейджа. Известно [91], что Y обладает 58-ми мерным семейством $\mathcal{S}$ метрик с голономией $SU(2)$. Пейдж в работе [74] предложил геометрическое описание пространства модулей метрик с голономией $SU(2)$. Опишем вкратце его подход. Рассматривая всевозможные плоские метрики на T^4 мы получаем семейство $\mathcal{S}_2$ метрик голономии $SU(2)$ на орбифолде X. Окрестности 16 особых точек X изометричны окрестности нуля в $\mathbb{C}/\{\pm1\}$. Для каждой особой точки вырежем ее окрестность $(0,\varepsilon_1)\times S^3/\{\pm1\}$. Тогда «воротник» края $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times S^3/\{\pm1\}$ «почти» изометричен открытому шаровому слою $M_{1,1}$ с метрикой, гомотетичной метрике Эгучи — Хансона, с коэффициентом гомотетии t. Уменьшая t мы можем сделать метрики сколь угодно близкими на воротнике, причем обе метрики имеют голономию $SU(2)$. Далее используя аналитический аппарат можно показать, что если окрестность достаточно мала, то деформация обеих метрик дает гладкую метрику на Y с голономией $SU(2)$. Строгое обоснование этой конструкции было дано позже в работах [85, 69, 63]. Более подробное описание геометрических свойств $K3$-поверхности можно также найти в [15].

Такой взгляд на пространство модулей $K3$-поверхности дает геометрически прозрачное истолкование его размерности 58. Действительно, пространство $\mathcal{S}_2$ десятимерно. Далее, в окрестности каждой особой точки метрики из $\mathcal{S}_2$ обладают на $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\times S^3/\{\pm1\}$ группой изометрии $SO(4)$. Подгруппа $U(2)\subset SO(4)$ оставляет метрику Эгучи — Хансона инвариантной. Это дает нам семейство метрик размерности $\dim(SO(4)/U(2)) = 2$. Если учесть параметр t, мы получаем 3-х мерное семейство различных метрик в окрестности каждой особой точки. Итого, учтя все особые точки получаем, что размерность всего построенного семейства равна $10+16\cdot 3=58$. Фактически, Пейдж предложил геометрическое описание пространства модулей $\mathcal{S}$ метрик голономии $SU(2)$ на Y в окрестности предельного семейства $\mathcal{S}_2$.

Разрешение особенностей типа $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}$ при помощи $M_{k,l}$. Мы предлагаем смотреть на $M_{k,l}$ как на пространство, позволяющее разрешить особенности высокого порядка, сводя их к особенностям порядка меньшего. Более точно, рассмотрим особую точку некоторого комплексного многообразия, в окрестности которой многообразие устроено как $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}$. Пусть $u=(u_1,u_2)$ — евклидовы координаты в $\mathbb{C}^2$ и $\Delta=\{|u|^2\leq\varepsilon\}/\mathbb{Z}_{k+l}$ — окрестность многообразия, в которой происходит раздутие. Далее, рассмотрим $M_{k,l}$ и определенное в (3.7) отображение $\tau_{k,l}:(\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l})\backslash\{0\}\to M_{k,l}\backslash S^2(k,l)$. Это отображение индуцирует комплексный изоморфизм многообразия $\Delta\backslash\{0\}$ и открытого подмногообразия в $M_{k,l}\backslash S^2(k,l)$. Удалив особую точку $0\in\Delta$ и произведя отождествление по указанному изоморфизму мы получим комплексное многообразие, в котором вместо одной особой точки вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}$ появились две особые точки типов $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_l$. Далее, итерируя конструкцию, можно разрешить все получившиеся особые точки.

Имея в виду обобщить конструкцию Пейджа, рассмотрим следующий вопрос: какие группы $\mathbb{Z}_p\subset SU(2)$ при $p>2$ могут действовать на $T^4=\mathbb{C}^2/\Lambda$ изометриями? Ясно, что после подходящего выбора унитарного базиса можно считать, что

$$\mathbb{Z}_p=\left\{\left(\begin{array}{cc}\omega^q & 0\\ 0 & \bar{\omega}^q\end{array}\right)|q\in\mathbb{Z}\right\},$$

где $\omega=e^{\frac{2\pi}{p}i}$ — примитивный корень из единицы степени p. Рассмотрим $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\Lambda$ — ненулевой элемент решетки. Пусть $\Pi=\{(\lambda_1 z,\lambda_2\bar{z})|z\in\mathbb{C}\}$ — вещественная двумерная плоскость, инвариантная относительно $\mathbb{Z}_p$. Поскольку Λ инвариантна относительно действия $\mathbb{Z}_p$, то $\Pi\cap\Lambda$ является решеткой, содержащей векторы $\lambda,\lambda\omega,\lambda\omega^2$. Следовательно, существует полином второй степени с целыми коэффициентами, корнем которого является примитивный корень ω. Значит этот полином является полиномом деления круга, что оставляет только три возможности: $p = 3, 4$ и 6. Однако случаи $p = 4, 6$ означают наличие особых точек в $T^4/\mathbb{Z}_p$, окрестности которых не будут моделироваться конусом $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, и мы не сможем их разрешить при помощи нашей конструкции. Остается единственный случай $p = 3$, который мы и разберем подробно.

Предположим, что плоская метрика на $\mathbb{C}^2$ задается вещественной частью стандартного эрмитова произведения, и $\Lambda_0 = \{ae_1 + be_2 | a, b \in \mathbb{Z}\}$, где $e_1 = 1, e_2 = e^{\frac{\pi}{3}i}$. Предыдущие рассуждения показывают, что общая решетка Λ, инвариантная относительно действия $\mathbb{Z}_3$ имеет вид $\Lambda = \{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2) | z_1, z_2 \in \Lambda_0\} \cong \Lambda_0 \oplus \Lambda_0$, где $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ — комплексные параметры, от которых зависит Λ, и $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$. Действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $T^4 = \mathbb{C}^2/\Lambda$ порождено преобразованием

$$\gamma : (z_1, z_2) + \Lambda \mapsto (z_1 e^{\frac{2\pi}{3}i}, z_2 e^{-\frac{2\pi}{3}i}) + \Lambda.$$

Факторпространство $X = T^4/\mathbb{Z}_3$ является кэлеровым орбифолдом с девятью особыми точками, которые соответствуют неподвижным относительно γ точкам в T^4. Эти точки имеют вид $(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2)$, где $z_i \in \{0, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2, \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2\}$. Будем обозначать через $\{s_1, \ldots, s_9\}$ особые точки в X. Пусть $\mathcal{S}_3$ — пространство модулей плоских метрик на X с голономией $SU(2)$, отвечающих всем возможным значениям параметров λ_i, μ_i. Действие группы $U(2) \subset GL_{\mathbb{C}}(2)$ оставляет метрику на $\mathbb{C}^2$ инвариантной, и, следовательно, индуцирует тривиальное действие на $\mathcal{S}_3$. Поэтому $\dim(\mathcal{S}_3) = \dim(GL_{\mathbb{C}}(2)/U(2)) = 4$.

Пусть X' — комплексная поверхность, получаемая последовательным разрешением X в особых точках при помощи $M_{1,2}$ и $M_{1,1}$. А именно, пусть $B_i \subset T^4/\mathbb{Z}_3$, $i = 1, \ldots, 9$ — открытые шары радиуса ε с центрами в особых точках X, $B'_i \subset B_i$ — замкнутые шары с теми же центрами радиуса $\varepsilon' < \varepsilon$. Таким образом, мы получили систему концентрических окрестностей особых точек в X: $s_i \in B'_i \subset B_i$. Выберем достаточно малое ε, начиная с которого $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Ясно, что $B_i \backslash B_i'$ диффеоморфно $(\varepsilon', \varepsilon) \times S^3/\mathbb{Z}_3$. Рассмотрим пространство $M_{1,2}$ с метрикой $t^2 ds^2$, где ds^2 — метрика (3.6) при $a = 1/3$. В пространстве $M_{1,2}$ рассмотрим воротник $\tau_{1,2}((\varepsilon', \varepsilon) \times S^3/\mathbb{Z}_3)$, где отображение $\tau_{k,l}$ определено в (3.7). Тогда при $t \to 0$ отображение $\tau_{1,2}$, определенное на воротнике стремится к изометрии. Рассмотрим орбифолд Y, полученный отождествлением $X \backslash (\cup_{i=1}^9 B_i')$ с девятью экземплярами $\tau_{1,2}((0, \varepsilon) \times S^3/\mathbb{Z}_3)$ при помощи отображения $\tau_{1,2}$, ограниченного на воротник $(\varepsilon', \varepsilon) \times S^3/\mathbb{Z}_3$. На областях склейки метрика $t^2 ds^2$ будет сколь угодно мало отличаться от локально плоской метрики на X при $t \to 0$. Орбифолд Y будет иметь девять особенностей $s_1', \dots s_9'$, в окрестности которых будет локально устроен как $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Теперь совершенно аналогично, рассмотрим достаточно малые $\delta' < \delta < \varepsilon'$ и систему концентрических окрестностей $s_i' \in C_i' \subset C_i$ в Y радиусов δ' и δ. При помощи отображения $\tau_{1,1}$ мы осуществим отождествление $Y \backslash (\cup_{i=1}^9 C_i')$ с девятью экземплярами $\tau_{1,1}((0, \delta) \times S^3/\mathbb{Z}_2) \subset M_{1,1}$ по воротнику $(\delta', \delta) \times S^3/\mathbb{Z}_2$ и получим комплексную поверхность X' без особенностей. При этом в областях склейки метрика на Y будут сколь угодно близка к метрике $u^2 ds'^2$ при $u, \delta \to 0$, где ds'^2 — метрика (3.6) на $M_{1,1}$ при $a = 0$. Пусть $d\tilde{s}^2$ — метрика на Y, получающаяся сглаживанием метрик на X, $M_{1,2}$ и $M_{1,1}$ в областях описанного отождествления.

Напомним, что $\mathcal{S}$ — пространство модулей метрик с группой голономии $SU(2)$ на $K3$-поверхности, $\mathcal{S}_3$ — пространство модулей плоских метрик на X с группой голономии $SU(2)$.

Теорема 3.3. *Поверхность X' является $K3$-поверхностью, и, следовательно, $\mathcal{S}_3$ является предельным для $\mathcal{S}$. Достаточно малая окрестность $\mathcal{S}_3$ в $\mathcal{S}$ состоит из 58-мерного семейства метрик, получающихся малой деформацией семейства метрик $d\tilde{s}^2$, построенных описанным выше способом при $\delta, t, u \to 0$.*

Доказательство этой теоремы приведено в следующем параграфе.

3.4 Связь с мульти-инстантонами и доказательство теоремы 3.3

Для строгого обоснования описанной выше конструкции проще всего воспользоваться связью построенных нами метрик с мульти-инстантонами. А именно, мульти-инстантоны [52] — метрики с группой голономии $SU(2)$ следующего вида:

$$ds^2 = \frac{1}{U}(d\tau + \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{x})^2 + U d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \tag{3.8}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, переменная τ является периодической,

$$U = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|},$$

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega} = \mathrm{grad}\, U,$$

и $\mathbf{x}_i$ — набор из s различных точек в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Мульти-инстантон (3.8) является гладкой римановой метрикой на некотором четырехмерном многообразии.

Пусть $d\sigma$ — форма площади поверхности уровня функции U в пространстве $\mathbb{R}^3$. Тогда несложно проверить, что форма

$$\omega_1' = \frac{dU}{|\mathrm{grad}\, U|} \wedge (d\tau + \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{x}) + U d\sigma \tag{3.9}$$

является замкнутой кэлеровой формой, согласованной с метрикой (3.8).

Рассмотрим предельный случай, когда точек всего две: $\mathbf{x}_1 = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$, причем первая имеет кратность l, вторая — k. Зададим координаты (r, θ, ϕ, ψ) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x_1 = \mathrm{ch}\, \rho \cos\theta, \\
&x_2 = \mathrm{sh}\, \rho \sin\theta \cos\psi, \\
&x_3 = \mathrm{sh}\, \rho \sin\theta \sin\psi, \\
&\tau = (l + k)\phi.
\end{aligned}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что в таких координатах мульти-инстантон (3.8) совпадает с метрикой (3.6) с точностью до умножения на константу, т.е. построенная нами метрика на $T^*\mathbb{C}P^1(k,l)$ является предельным случаем мульти-инстантона.

Теперь мы можем доказать Теорему 3.3. Наше доказательство аналогично рассуждениям из [63], поэтому мы постараемся насколько это возможно сохранить соответствующие обозначения. Пусть T^4 — плоский тор с определенным выше действием группы $\mathbb{Z}_3$, рассмотрим тор $T^7 = T^3 \times T^4$ с плоской метрикой и распространим действие $\mathbb{Z}_3$ на T^7 положив его тривиальным на T^3. Тогда множеством S особых точек в $T^7/\mathbb{Z}_3$ будет дизъюнктное объединение девяти торов T^3, причем окрестность T множества S изометрична дизъюнктному объединению девяти экземпляров $T^3 \times B^4_\zeta/\mathbb{Z}_3$, где B^4_ζ — открытый шар радиуса ζ в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ для подходящей константы $\zeta > 0$.

Выберем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим мульти-инстантон $ds^2(t)$ на четырехмерном многообразии M_t, заданный тремя следующими точками: $\mathbf{x}_1 = (-4t^2/3, 0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (2t^2/3, t^2\varepsilon, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (2t^2/3, -t^2\varepsilon, 0)$. Обозначим через U_t соответствующий потенциал. Положим $\bar{U}(\mathbf{x}) = 3/|\mathbf{x}|$ — потенциал центра тяжести, рассмотренного с кратностью три. Легко проверить, что при $|\mathbf{x}| > \zeta^2/16$

$$|\nabla^i(U_t(\mathbf{x}) - \bar{U}(\mathbf{x}))| = O(t^4), \tag{3.10}$$

при $t \to 0$ и при всех $i \geq 0$, где ∇^i — совокупность частных производных порядка i. Метрика $d\bar{s}^2$, построенная по потенциалу $\bar{U}$ изометрична плоской метрике на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$, причем каждая область $\{|\mathbf{x}| \leq r^2\}$ изометрична шару B^4_r. Из (5) следует, что

$$|\nabla^i(ds^2(t) - d\bar{s}^2)| = O(t^4), \tag{3.11}$$

при $|\mathbf{x}| > \zeta^2/16$ и $t \to 0$.

Теперь мы вырежем каждую из девяти окрестностей $B^4_\zeta/\mathbb{Z}_3$ особых точек в $X = T^4/\mathbb{Z}_3$ и вклеим вместо нее область в M_t, определенную условием $|\mathbf{x}| \leq \zeta^2$. Мы получим гладкое четырехмерное многообразие X'. В X' определим три области A, B, C следующим образом: область A состоит из объединения окрестностей, заданных условием $|\mathbf{x}| \leq \zeta^2/9$ в каждом из девяти приклеенных экземпляров M_t; область C представляет собой дополнение в X' к вклеенным окрестностям и изометрична $X \backslash (\cup_{i=1}^9 B_\zeta^4)$; наконец, $B = X' \backslash (A \cup C)$.

Рассмотрим кэлеровы формы $\omega_1'(t)$ и $\bar{\omega}_1$ метрик $ds^2(t)$ и $d\bar{s}^2$, описанные в (3.9). Поскольку метрика $ds^2(t)$ имеет группу голономии $SU(2)$, то на кэлеровом многообразии $(M_t, \omega_1'(t))$ имеется параллельная комплексная форма объема $\mu(t)$. Положим

$$\omega_2'(t) = Re(\mu(t)),\ \omega_3'(t) = Im(\mu(t)).$$

Тогда тройка параллельных кэлеровых форм $\omega_1'(t), \omega_2'(t), \omega_3'(t)$ задает гиперкомплексную структуру на M_t с метрикой $ds^2(t)$. Аналогично построим тройку параллельных постоянных форм $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$, которые задают плоскую гиперкомплексную структуру на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$ с метрикой $d\bar{s}^2$.

Из (3.9) и (3.10) следует, что

$$|\nabla^k(\omega_i'(t) - \bar{\omega}_i)| = O(t^4), i = 1, 2, 3,$$

при $t \to 0$ и $|\mathbf{x}| > \zeta^2/16$.

Рассмотрим объединение шаровых слоев B. Существуют 1-формы $\eta_i'(t)$ и $\bar{\eta}_i$, такие, что $\omega_i'(t) = d\eta_i'(t)$, $\bar{\omega}_i = d\bar{\eta}_i$, причем

$$|\nabla^k(\eta_i'(t) - \bar{\eta}_i)| = O(t^4),$$

при $t \to 0$. Рассмотрим вещественную гладкую возрастающую функцию $u(r)$, определенную на отрезке $[0, \zeta]$ и обладающую следующими свойствами:

$$\begin{array}{l} 0 \leq u(r) \leq 1, \\ u(r) = 0 \text{ при } \ 0 \leq r \leq \zeta/3, \\ u(r) = 1 \text{ при } \ \zeta/2 \leq r \leq \zeta. \end{array}$$

Положим $\eta_i(t) = u\bar{\eta}_i + (1-u)\eta'_i(t)$ и $\omega_i(t) = d\eta_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Таким образом, мы построили тройку замкнутых 2-форм на X', которые совпадают с формами $\bar{\omega}_i$ в области C и с формами $\omega'_i(t)$ в области A. При этом легко увидеть, что в области $B \cup C$

$$|\nabla^k(\omega_i(t) - \bar{\omega}_i)| = O(t^4), \tag{3.12}$$

при $t \to 0$.

Мы напомним определение G_2-структуры. Зададим 3-форму ϕ_0 на пространстве $\mathbb{R}^7$ со стандартной евклидовой метрикой и ориентацией следующим образом:

$$\phi_0 = y_1 \wedge y_2 \wedge y_7 + y_1 \wedge y_3 \wedge y_6 + y_1 \wedge y_4 \wedge y_5 + y_2 \wedge y_3 \wedge y_5$$

$$-y_2 \wedge y_4 \wedge y_6 + y_3 \wedge y_4 \wedge y_7 + y_5 \wedge y_6 \wedge y_7,$$

где $y_1, \ldots, y_7$ — стандартный ортонормированный положительно ориентированный базис в $(\mathbb{R}^7)^*$. При этом двойственная относительно оператора Ходжа 4-форма выглядит так:

$$*\phi_0 = y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 \wedge y_4 + y_1 \wedge y_2 \wedge y_5 \wedge y_6 - y_1 \wedge y_3 \wedge y_5 \wedge y_7 + y_1 \wedge y_4 \wedge y_6 \wedge y_7$$

$$+y_2 \wedge y_3 \wedge y_6 \wedge y_7 + y_2 \wedge y_4 \wedge y_5 \wedge y_7 + y_3 \wedge y_4 \wedge y_5 \wedge y_6.$$

Подгруппа в $GL_+(\mathbb{R}^7)$, сохраняющая форму ϕ_0 или $*\phi_0$ совпадает с группой G_2.

Если теперь M — семимерное ориентированное многообразие, то положим $\Lambda^3_+ M$ и $\Lambda^4_+ M$ — подрасслоения в $\Lambda^3 T^* M$ и $\Lambda^4 T^* M$, образованные формами, которые в каждой точке $p \in M$ в подходящем ориентированном базисе $T^*_p M$ имеют вышеуказанный вид ϕ_0 и $*\phi_0$. Нетрудно увидеть, что $\Lambda^3_+ M$ и $\Lambda^4_+ M$ являются открытыми подрасслоениями в $\Lambda^3 T^* M$ и $\Lambda^4 T^* M$, и мы имеем естественное отображение отождествления $\Theta : \Lambda^3_+ M \to \Lambda^4_+ M$, которое относит каждой форме локального вида ϕ_0 форму локального вида $*\phi_0$. Говорят, что сечение ϕ расслоения $\Lambda^3_+ M$

задает на G_2-структуру на M. Такая форма ϕ однозначно определяет риманову метрику, относительно которой оператор отождествления Θ становится оператором Ходжа $*$. Если к тому же формы ϕ и $*\phi$ являются замкнутыми, то G_2-структура не имеет кручения и группа голономии риманова многообразия M содержится в $G_2 \subset SO(7)$.

Зададим на $T^3 \times X = T^7/\mathbb{Z}_3$ плоскую G_2-структуру $\bar{\phi}$ и двойственную ей $*\bar{\phi}$ следующим образом:

$$\bar{\phi} = \bar{\omega}_1 \wedge \delta_1 + \bar{\omega}_2 \wedge \delta_2 + \bar{\omega}_3 \wedge \delta_3 + \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3,$$

$$*\bar{\phi} = \bar{\omega}_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3 + \bar{\omega}_2 \wedge \delta_3 \wedge \delta_1 + \bar{\omega}_3 \wedge \delta_1 \wedge \delta_2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_1,$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — постоянные ортонормированные 1-формы на T^3, распространенные на весь $T^7/\mathbb{Z}_3 = T^3 \times X$. Определим на $M = T^3 \times X'$ следующие 3- и 4-формы:

$$\phi_t = \omega_1(t) \wedge \delta_1 + \omega_2(t) \wedge \delta_2 + \omega_3(t) \wedge \delta_3 + \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3,$$

$$v_t = \omega_1(t) \wedge \delta_2 \wedge \delta_3 + \omega_2(t) \wedge \delta_3 \wedge \delta_1 + \omega_3(t) \wedge \delta_1 \wedge \delta_2 + \frac{1}{2}\omega_1(t) \wedge \omega_1(t).$$

Ясно, что в области $T^3 \times C$ определенные таким образом формы совпадают соответственно с $\bar{\phi}$ и $*\bar{\phi}$. Поскольку все формы $\omega_i(t)$ и δ_i замкнуты, то формы ϕ_t и v_t тоже замкнуты на M.

В областях $T^3 \times A$ и $T^3 \times C$ тройка форм $\omega_i(t)$ является тройкой кэлеровых форм, задающих гиперкомплексную структуру, поэтому форма ϕ_t задает G_2-структуру без кручения, и $v_t = \Theta(\phi_t)$. В области $T^3 \times B$ тройка $\omega_i(t)$ уже не задает вообще говоря гиперкомплексную структуру, поэтому мы даже не можем априори гарантировать, что ϕ_t задает G_2-структуру. Однако $\Lambda^3_+(M)$ открыто в $\Lambda^3 T^*(M)$, поэтому из (3.12) следует, что при достаточно малом t форма $\phi_t \in C^\infty(\Lambda^3_+(M))$. При этом форма v_t вообще говоря отличается от $\Theta(\phi_t)$. Определим 3-форму ψ_t на M соотношением $*\psi_t = \Theta(\phi_t) - v_t$, где оператор Ходжа определен относительно римановой метрики g, заданной G_2-структурой ϕ_t. Очевидно, что $d^*\psi_t = d^*\phi_t$.

Следующие теоремы доказаны в [63].

Теорема A. *Пусть $E_1, \dots E_5$ — положительные константы. Тогда существуют положительные константы κ, K, зависящие от $E_1, \dots, E_5$ такие, что для любого $0 < t < \kappa$ имеет место следующее.*

Пусть M — компактное семимерное многообразие, и ϕ — гладкая замкнутая форма из $C^\infty(\Lambda^3_+ M)$. Предположим, что ψ — гладкая 3-форма на M, такая, что $d^*\psi = d^*\phi$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) $||\psi||_2 \leq E_1 t^4$ *и* $||\psi||_{C^{1,1/2}} \leq E_1 t^4$,
- (ii) *Если* $\chi \in C^{1,1/2}(\Lambda^3 T^* M)$ *и* $d\chi = 0$, *тогда* $||\chi||_{C^0} \leq E_2(t||\nabla\chi||_{C^0)} + t^{-7/2}||\chi||_2)$, *и* $||\nabla\chi||_{C^0} + t^{1/2}[\nabla\chi]_{1/2} \leq E_3(||d^*\chi||_{C^0} + t^{1/2}[d^*\chi]_{1/2} + t^{-9/2}||\chi||_2)$,
- (iii) $1 \leq E_4 vol(M)$, *и*
- (iv) *если* f — *гладкая, вещественная функция и* $\int_M f d\mu = 0$, *то* $||f||_2 \leq E_5||df||_2$.

Тогда существует $\eta \in C^\infty(\Lambda^2 T^* M)$ такое, что $||d\eta||_{C^0} \leq K t^{1/2}$ и $\tilde{\phi} = \phi + d\eta$ является гладкой G_2-структурой на M без кручения.

Теорема B. *Пусть $D_1, \dots, D_5$ — положительные константы. Тогда существуют положительные константы $E_1, \dots, E_5$ и λ, зависящие только от $D_1, \dots, D_5$ такие, что для каждого $t \in (0, \lambda]$ имеет место следующее.*

Пусть M — компактное семимерное многообразие и ϕ — замкнутая форма из $C^\infty(\Lambda^3_+ M)$. Пусть g — метрика, ассоциированная с ϕ. Предположим, что ψ — гладкая 3-форма на M такая, что $d^*\phi = d^*\psi$, удовлетворяющая следующим условиям:

- (i) $||\psi||_2 \leq D_1 t^4$ *и* $||\psi||_{C^2} \leq D_1 t^4$,
- (ii) *радиус инъективности $\delta(g)$ удовлетворяет неравенству* $\delta(g) \geq D_2 t$,
- (iii) *тензор Римана $R(g)$ метрики g удовлетворяет неравенству* $||R(g)||_{C^0} \leq D_3 t^{-2}$,
- (iv) *объем $vol(M)$ удовлетворяет неравенству $vol(M) \geq D_4$, и*
- (v) *диаметр $diam(M)$ удовлетворяет неравенству $diam(M) \leq D_5$.*

Тогда условия (i)-(iv) Теоремы A выполнены для (M, ϕ).

Мы хотим применить эти теоремы к форме ϕ_t на M с ассоциированной метрикой g. Действительно, из (3.12) следует выполнение условия (i), условие (iv) вытекает тривиальным образом из самой конструкции. Далее, заметим, что $ds^2(t) = t^2 ds^2(1)$. Отсюда следует, что радиус инъективности растет линейно с ростом t, что показывает (ii) и (iii). Это же соображение показывает ограниченность диаметра, т. е. (v). Значит, существует близкая к ϕ_t G_2-структура $\tilde{\phi}$ без кручения. Пусть g' — ассоциированная с ней метрика с группой голономии G_2 на $M = T^3 \times X'$.

Поскольку X односвязно, то и X' — односвязно, поэтому $\pi_1(T^3 \times X') = \mathbb{Z}^3$, следовательно из [63] мы можем сделать вывод, что группа голономии (M, g') равна $SU(2) \subset G_2$. Значит метрика на M является прямым произведением плоской метрики на T^3 и метрики ds'^2 с группой голономии $SU(2)$ на X'. В частности, отсюда следует, что X' является $K3$-поверхностью.

Выясним как выглядит метрика ds'^2 вблизи удаленных особых точек, т. е. в области A. Метрика g на $T^3 \times X'$, близкая к g' в области A является прямым произведением плоской метрики на T^3 и мульти-инстантона $ds^2 = ds^2(t)$. При $t \to 0$ мульти-инстантон ds^2 стремится к плоской метрике на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$, а при $\varepsilon \to 0$ — к метрике (3.6) на $M_{1,2}$. Значит метрика ds^2 при $\varepsilon \to 0$ получается из X описанным в Теореме 2 разрешением особых точек при помощи $M_{1,2}$. Если теперь ограничиться на небольшую окрестность точек $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ и выбрать ε настолько малым, чтобы $\mathbf{x}_1$ давала вклад в потенциал U_t малый по сравнению с вкладом $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, то метрика ds^2 в этой окрестности будет близка к метрике (3.6) на $M_{1,1}$. Итак, метрика ds^2 получается указанным в Теореме 2 двойным разрешением особых точек X, и метрика ds'^2 получается ее малой деформацией.

Оценим размерность построенного семейства метрик. При разрешении особенностей s_i свобода приклеивания $M_{1,2}$ определяется группой $U(2)$, оставляющей инвариантной комплексную структуру на T^4. Однако метрика на $M_{1,2}$ имеет группу изометрий $U(1) \times U(1) \subset U(2)$, поэтому, если мы учтем параметр t, отвечающий за гомотетию, то мы получаем семейство различных метрик с голономией $SU(2)$ размерности 3 в окрестности каждой точки s_i. При разрешении особенности s'_i, как и в методе Пейджа мы получаем также семейство размерности 3. Размерность $\mathcal{S}_3$ равна 4, поэтому суммируя, получаем, что размерность $\mathcal{S}$ в окрестности $\mathcal{S}_3$ равна 58 — именно такова размерность пространства модулей метрик с голономией $SU(2)$ на $K3$-поверхности.

Теорема доказана.

Глава 4

Метрики положительной кривизны Риччи на четырехмерных односвязных T^2-многообразиях

4.1 Универсальное пространство для T^2-многообразия

Пусть M — гладкое односвязное четырехмерное многообразие с эффективным гладким действием тора T^2. Для любой точки $p \in M$ стабилизатором G_p точки p может быть только одна из следующих подгрупп в T^2: $G_p = 0$, $G_p = T^2$ и $G_p = S^1$ [73]. Первый случай отвечает главным орбитам, второй — неподвижным точкам действия. Если представить тор как фактор-пространство $\mathbb{R}^2$ по стандартной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$, то стабилизатор $G_p = S^1$ реализуется как подгруппа $\{(pt, qt) | t \in \mathbb{R}\}$, где p, q — пара взаимно простых целых чисел, определённых с точностью до одновременного изменения знаков.

В [73] доказывается, что в этом случае пространство орбит M^* гомеоморфно двумерному диску, причем внутренние точки диска состоят из главных орбит, а граница диска разбивается на открытые дуги, состоящие из точек со стабилизатором S^1, разделенные неподвижными точками.

Каждой такой дуге приписывается вес (p, q), определенный как выше. Нетрудно понять, что если (p, q), (r, s) — соседние веса, то

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Для каждого целого $m \geq 2$ следуя [47] мы строим T^m-многообразие N_m размерности $m+2$ следующим образом.

Пусть двумерный диск M^* содержит m дуг $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ на своей границе, разделенных точками $F_1, \ldots, F_m$. Рассмотрим произведение $M^* \times T^m$, где $T^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$. На границе произведения произведем следующие отождествления. Во внутренней точке дуги с номером i затянем в точку i-ую координатную окружность тора T^k. Таким образом, в каждой неподвижной точке, лежащей между дугами i и j мы затягиваем в точку координатный тор, отвечающий i-ой и j-ой окружностям. В итоге мы получаем многообразие N_m размерности $m+2$ с действием тора T^m на нем. Следующее утверждение доказано в [47] в более общем виде, и мы приведем лишь некоторые детали доказательства, нужные нам в дальнейшем.

Лемма 4.1. *Для любого односвязного четырехмерного T^2-многообразия M существует тор $T^{m-2} \subset T^m$, свободно действующий на N_m таким образом, что T^2-многообразие N_m/T^{m-2} эквивариантно гомеоморфно T^2-многообразию M.*

Доказательство. Пусть дуга Γ_i имеет вес (p_i, q_i), где p_i, q_i — пара взаимно простых целых чисел, определённых с точностью до одновременного изменения знака. Рассмотрим матрицу весов A размера $2 \times m$, состоящую из двух строк p_i, q_i, $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим ядро E линейного отображения $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$ и ядро F аддитивного отображения $A : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^2$. Тогда $T^{m-2} = E/F$ действует сдвигами на T^m — это и является искомым действием.

4.2 Метрика положительной кривизны Риччи

Целью данной главы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.1. *На каждом односвязном четырехмерном T^2-многообразии существует риманова метрика положительной кривизны Риччи, относительно которой T^2 действует изометриями.*

При построении метрики мы используем конструкцию, представляющую M как фактор-пространство некоторого универсального T^m-многообразия N_m по свободному действию тора T^{m-2}. Мы строим метрику на N_m и пользуясь римановой субмерсией $N_m \to M$ получаем требуемую метрику на M. Отметим, что аналог универсального пространства N_m строится в любых размерностях, и было бы интересным обобщить доказанную теорему на случай любого квазиторического многообразия (в смысле книги [17]).

Сначала рассмотрим случай малых m. Если $m = 2$, то $N_2 = S^4 = M$ и метрика положительной кривизны Риччи очевидно существует. Если $m = 3$, то $N_3 = S^5$ обладает стандартной метрикой постоянной кривизны и $M = S^5/S^1$ имеет положительную кривизну Риччи. Наконец, если $m = 4$, то $N_4 = S^3 \times S^3$ с метрикой произведения. Тогда $M = S^3 \times S^3/S^1 \times S^1$ имеет положительную кривизну Риччи.

Итак, пусть $m \geq 5$. Зададим $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\nu > 0$. Рассмотрим функцию $G(x)$, определенную на промежутке $[-\delta, \infty)$ следующим образом:

$$G(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + (1 + k_1^2)\operatorname{sh}^2(\varepsilon + \nu)} \cos\left(\frac{x+\delta}{k_1}\right), & -\delta \leq x \leq \varepsilon, \\ \operatorname{ch}(x - 2\varepsilon - \nu), & \varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon, \\ \sqrt{1 + (1 + k_2^2)\operatorname{sh}^2 \nu} \cos\left(\frac{x - x_0}{k_2}\right), & 2\varepsilon \leq x, \end{cases}$$

где k_2 — достаточно большое число, а параметры k_1, x_0 находятся из соотношений

$$\operatorname{th}(\varepsilon + \nu) = \frac{1}{k_1} \operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon + \delta}{k_1}\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\varepsilon - x_0}{k_2}\right) = k_2 \operatorname{th} \nu.$$

Нетрудно увидеть, что функция $G(x)$ является кусочно C^∞-гладкой с двумя точками излома, в которых первая производная сохраняет непрерывность. Рассмотрим метрику

$$ds_0^2 = dx^2 + G(x)^2 dy^2$$

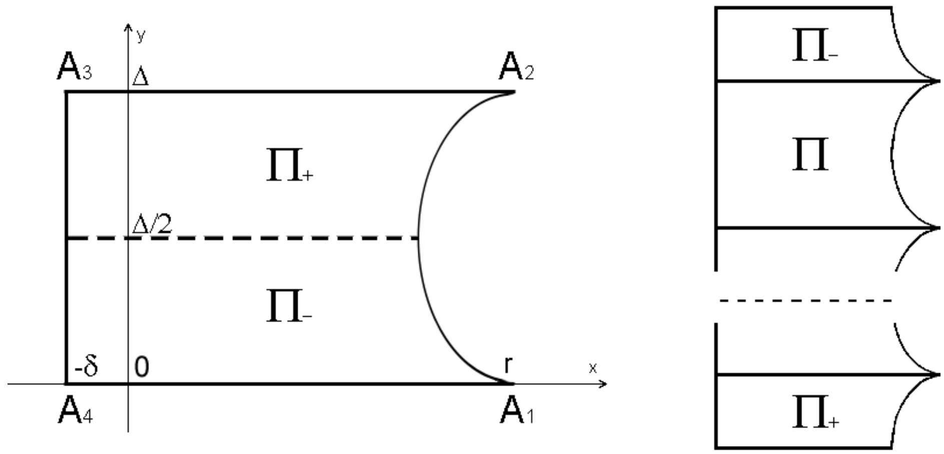
в полосе $\{(x,y) | x \geq -\delta, 0 \leq y \leq \Delta\}$, где $\Delta > 0$ — некоторая константа. Ясно, что при $x \leq \varepsilon$ метрика ds_0^2 локально изометрична метрике сферы радиуса k_1, при $x \geq 2\varepsilon$ — метрике сферы радиуса k_2, и при $\varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon$ — метрике гиперболической плоскости кривизны -1.

Зададим $\mu > 0$. Для каждого $r > 0$ рассмотрим кратчайшую геодезическую γ метрики ds_0^2, соединяющую точки $A_1(r,0)$ и $A_2(r,\Delta)$. Выберем r таким, чтобы кривая $\{x = 2\varepsilon\}$ находилась на расстоянии меньшем чем $\mu\pi/2$ от геодезической γ (очевидно, что это обеспечивается при достаточно большом k_2). Точки A_1, A_2, наряду с вершинами $A_3(-\delta,\Delta)$ и $A_4(-\delta,0)$ образуют геодезический четырехугольник Π. Теперь выберем настолько большие Δ и k_2, что имеет место соотношение

$$\int_\Pi K d\sigma = -\frac{\pi}{2},$$

где K — секционная кривизна и $d\sigma$ — форма площади метрики ds_0^2 (отметим, что в силу определяющих величину k_1 соотношений, для выполнения последней формулы нужно выбрать $\nu < \delta$). Формула Гаусса-Бонне гарантирует, тогда, что углы в вершинах A_1, A_2 равны по $\pi/4$. В дальнейшем, будем под Π подразумевать именно такой четырехугольник.

Разделим четырехугольник Π пополам по геодезической $\{y = \Delta/2\}$. Верхнею и нижнею половины, мы обозначим соответственно Π_+ и Π_-. Четырехугольники Π, Π_- и Π_+ являются элементарными кирпичиками, из которых мы строим многоугольник D. А именно, будем присоединять друг к другу последовательно, сверху вниз, Π_-, затем $(m-5)$ штук



четырехугольников П и, наконец, четырехугольник Π_+ так, что стороны $\{x = -\delta\}$ образуют одну геодезическую сторону в D. Полученный многоугольник D имеет геодезические стороны и $m \geq 5$ прямых углов. Очевидно, что метрика ds_0^2 гладко продолжается на весь D.

Перенумеруем стороны D индексами от 1 до m по часовой стрелке, считая, что самая длинная сторона $\{x = -\delta\}$ имеет номер 1. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ — стороны многоугольника D. Обозначим через ρ_i расстояние до стороны γ_i в метрике ds_0^2, и ψ_i — координата вдоль геодезической γ_i. Таким образом, (ρ_i, ψ_i) — координаты Ферми в окрестности γ_i. Очевидно, что $\rho_1 = x + \delta, \psi_1 = y$. Положим для $i > 1$

$$f_i = \begin{cases} \mu \sin \frac{\rho_i}{\mu}, & 0 \leq \rho_i \leq \frac{\pi}{2}\mu, \\ \mu, & \rho_i \geq \frac{\pi}{2}\mu, \end{cases}$$

где ρ_i — расстояние до геодезической, содержащей i-ую сторону D. Функцию f_1 определим специальным образом:

$$f_1 = \begin{cases} 4\varepsilon \sin \frac{x+\delta}{4\varepsilon}, & -\delta \leq x \leq 2\pi\varepsilon - \delta, \\ 4\varepsilon, & x \geq 2\pi\varepsilon - \delta, \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что функции f_i являются кусочно C^∞-гладкими с непрерывными всюду первыми производными.

Рассмотрим следующую метрику на N_m:

$$ds^2 = ds_0^2 + \sum_{i=1}^{m} f_i^2 d\phi_i^2.$$

Очевидно, что метрика ds^2 является гладкой класса C^1 на произведении $Int(D) \times T^m \subset N_m$. Более того:

Лемма 4.2. *Метрика ds^2 является C^1-гладкой римановой метрикой на универсальном многообразии N_m.*

Доказательство. Во внутренних точках γ_i некоторая окрестность N_m имеет метрику вида

$$d\rho_i^2 + \mu_i^2 \sin^2 \frac{\rho_i}{\mu_i} d\phi_i^2 + d\psi_i^2 + \sum_{j \neq i} f_j^2 d\phi_i^2,$$

где $\mu_i = \mu$ при $i \neq 1$ и $\mu_1 = 4\varepsilon$. Первые два слагаемых описывают C^1-гладкую метрику на двумерном диске, оставшиеся задают гладкую метрику на $\mathbb{R} \times T^{m-1}$, поскольку $f_j = const$ в окрестности внутренних точек γ_i. Таким образом метрика ds^2 гладкая во внутренних точках каждой стороны γ_i.

Рассмотрим вершину D, в которой сходятся два ребра γ_i, γ_{i+1}. В окрестности этой точки метрика имеет вид

$$d\rho_i^2 + \mu_i^2 \sin^2 \frac{\rho_i}{\mu_i} d\phi_i^2 + d\rho_{i+1}^2 + \mu_{i+1}^2 \sin^2 \frac{\rho_{i+1}}{\mu_{i+1}} d\phi_{i+1}^2 + ds'^2,$$

где аналогично предыдущему случаю, ds'^2 — гладкая метрика на T^{m-2}. Лемма доказана.

Ясно, что тор T^{m-2} свободно действует на N_m изометриями, поэтому на фактор-пространстве $M = N_m/T^{m-2}$ возникает риманова метрика $d\bar{s}^2$.

Лемма 4.3. *Построенная описанным выше способом риманова метрика $d\bar{s}^2$ на M обладает положительно определенным тензором Риччи при выборе достаточно малых ε, μ.*

Замечание. Константы δ, k_2 и $\nu < \delta$ выполняют скорее «техническую» функцию, обеспечивая положительность секционной кривизны метрики ds_0^2 на краю. Выбор малых величин ε и μ дает требуемую положительность кривизны Риччи, как будет видно из доказательства.

Доказательство. Обозначим через r и $\bar{r}$ (соответственно, R и $\bar{R}$) тензоры Риччи и кривизны Римана метрик ds^2 и $d\bar{s}^2$. В каждой точке многообразия N_m будем обозначать буквой X векторы, касательные к D, буквой U — векторы касательные к тору T^m и ортогональные к $T^{m-2} \subset T^m$, наконец буквой V — векторы, касательные к T^{m-2}. Каждый вектор, касательный к M можно поднять в N_m, получив вектор вида $X+U$ — все такие векторы образуют горизонтальное распределение $\mathcal{H}$ в TN_m, векторы вида V образуют вертикальное распределение $\mathcal{V}$ в TN_m. В дальнейших формулах для римановой субмерсии $N_m \to M$ мы пользуемся обозначениями из [14].

Непосредственные вычисления показывают, что $A_U = 0$ и $TU = 0$. Далее, рассмотрим вектор средней кривизны N вертикальных слоев субмерсии. Формула первой вариации объема, примененная к вариации вертикального слоя показывает, что вектор N является касательным к D. Следовательно, $(D_U N, X) = 0$ и $(D_X N, U) = 0$. Формула О'Нила ([14], 9.36c) для кривизны Риччи немедленно дает

$$\bar{r}(X,U) = r(X,U) + 2(A_X, A_U) + (TX, TU)$$

$$-\frac{1}{2}((D_X N, U) + (D_U N, X)) = r(X,U).$$

Формула 9.106b, [14] примененная к N_m показывает, что $r(X,U) = 0$. Итак,

$$\bar{r}(X,U) = 0.$$

Следовательно, чтобы доказать положительную определенность тензора Риччи для метрики $d\bar{s}^2$ достаточно доказать, что $\bar{r}(X,X) > 0$ и $\bar{r}(U,U) > 0$.

Вычислим тензор кривизны N_m. Для этого выберем ортонормированную систему 1-форм:

$$e^{-1} = dx, e^0 = Gdy, e^i = f_i d\phi_i.$$

Форма связности ω_{ij} находится из соотношения $de^i = \omega_{ij} \wedge e^j$. Непосредственными вычислениями получаем:

$$\begin{array}{l}
\omega_{-10} = -\frac{G_x}{G} e^0, \\
\omega_{-1i} = -\frac{(f_i)_x}{f_i} e^i, \\
\omega_{0i} = -\frac{(f_i)_y}{G f_i} e^i, \\
\omega_{ij} = 0, \ i, j = 1, \dots, m.
\end{array}$$

Форма кривизны Θ_{ij} находится из соотношений $\Theta_{ij} = d\omega_{ij} + \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$:

$$\begin{array}{c}
\Theta_{-10} = -\frac{G_{xx}}{G} e^{-1} \wedge e^0, \\
\Theta_{-1i} = -\frac{(f_i)_{xx}}{f_i} e^{-1} \wedge e^i - \frac{1}{G} \left[\frac{(f_i)_{xy}}{f_i} - \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{G_x}{G} \right] e^0 \wedge e^i, \\
\Theta_{0i} = -\frac{1}{G} \left[\frac{(f_i)_{xy}}{f_i} - \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{G_x}{G} \right] e^{-1} \wedge e^i - \left[\frac{(f_i)_{yy}}{f_i} \frac{1}{G^2} - \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{G_y}{G^3} + \frac{(f_i)_x}{f_i} \frac{G_x}{G} \right] e^0 \wedge e^i, \\
\Theta_{ij} = -\left[\frac{(f_i)_x}{f_i} \frac{(f_j)_x}{f_j} + \frac{1}{G^2} \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{(f_j)_y}{f_j} \right] e^i \wedge e^j.
\end{array}$$

Таким образом, мы получаем следующие соотношения для ненулевых компонент тензора кривизны R_{ijkl} относительно репера $e^{-1}, \dots, e^m$:

$$\begin{array}{l}
R_{-10-10} = -\frac{G_{xx}}{G}, \\
R_{-1i-1i} = -\frac{(f_i)_{xx}}{f_i}, \\
R_{0i0i} = -\frac{(f_i)_{yy}}{f_i} \frac{1}{G^2} + \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{G_y}{G^3} - \frac{(f_i)_x}{f_i} \frac{G_x}{G}, \\
R_{ijij} = -\frac{(f_i)_x}{f_i} \frac{(f_j)_x}{f_j} - \frac{1}{G^2} \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{(f_j)_y}{f_j}, \\
R_{-1i0i} = -\frac{(f_i)_{xy}}{f_i} \frac{1}{G} + \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{G_x}{G^2}.
\end{array}$$

Рассмотрим касательный вектор X. Рассмотрим два единичных ортогональных друг другу вектора U_1 и U_2, приложенных в той же точке. Тогда

$$U_1 = \sum_{l=1}^{m} c_l \frac{\partial_{\phi_l}}{f_l}, \ U_2 = \sum_{l=1}^{m} d_l \frac{\partial_{\phi_l}}{f_l},$$

где $|c_i| \geq c, |c_{i+1}| \geq c, |d_i| \geq c, |d_{i+1}| \geq c$, для некоторой константы $c > 0$ (это следует из определения тора T^{m-2} в доказательстве леммы 1). Из формул О'Нила для секционной кривизны следует, что

$$\bar{r}(X, X) \geq K + R(X, U_1, X, U_1) + R(X, U_2, X, U_2),$$

где K — секционная кривизна метрики ds_0^2.

Предположим сначала, что координата $x \geq 2\varepsilon$. Тогда найдутся два соседних индекса, скажем i, $i+1$, такие, что все остальные функции f_j, $j \neq 1, i, i+1$, являются константами, а хотя бы одна из функций f_i, f_{i+1} непостоянна. Тогда из формул для тензора кривизны следует, что

$$\bar{r}(X, X) \geq \frac{1}{k_2^2} + 2c^2 R\left(X, \frac{\partial_{\phi_i}}{f_i}, X, \frac{\partial_{\phi_i}}{f_i}\right) + 2c^2 R\left(X, \frac{\partial_{\phi_{i+1}}}{f_{i+1}}, X, \frac{\partial_{\phi_{i+1}}}{f_{i+1}}\right) +$$

$$+2c^2 R\left(X, \frac{\partial_{\phi_1}}{f_1}, X, \frac{\partial_{\phi_1}}{f_1}\right).$$

Во втором слагаемом представим $X = x_1 \partial_{\rho_i} + x_2 \frac{\partial_{\psi_i}}{k_2 \cos(\rho_i/k_2)}$, в третьем как $X = y_1 \partial_{\rho_{i+1}} + y_2 \frac{\partial_{\psi_{i+1}}}{k_2 \cos(\rho_{i+1}/k_2)}$, а в четвертом — $X = z_1 \partial_x + z_2 \frac{\partial_y}{G}$. Тогда

$$\bar{r}(X, X) \geq \frac{1}{k_2^2} + 2c^2 \left(x_1^2 \frac{1}{\mu^2} + x_2^2 \frac{\cos(\rho_i/\mu)\sin(\rho_i/k_2)}{\mu k_2 \sin(\rho_i/\mu)\cos(\rho_i/k_2)}\right) +$$

$$+2c^2 \left(y_1^2 \frac{1}{\mu^2} + y_2^2 \frac{\cos(\rho_{i+1}/\mu)\sin(\rho_{i+1}/k_2)}{\mu k_2 \sin(\rho_{i+1}/\mu)\cos(\rho_{i+1}/k_2)}\right) +$$

$$+2c^2 \left(\frac{z_1^2}{16\varepsilon^2} + z_2^2 \frac{\cos(\rho_1/4\varepsilon)\sin(\rho_1/k_2)}{k_2 4\varepsilon \sin(\rho_1/4\varepsilon)\cos(\rho_1/k_2)}\right) > \frac{1}{k_2^2}.$$

Предположим теперь, что X приложен в точке, в которой $\varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon$. Тогда

$$X = x_1 \partial_x + x_2 \frac{\partial_y}{G},$$

где $x_1^2 + x_2^2 = |X|^2 = 1$. Из формул О'Нила следует, что $\bar{r}(X, X) \geq -1 + R(X, U_1, X, U_1) + R(X, U_2, X, U_2)$. Перепишем ненулевые компоненты тензора кривизны в рассматриваемой области:

$$\begin{aligned}
&R_{-10-10} = -1,\\
&R_{-11-11} = -\tfrac{(f_1)_{xx}}{f_1} = \tfrac{1}{16\varepsilon^2},\\
&R_{0101} = -\tfrac{1}{4\varepsilon}\tfrac{\operatorname{th}(x-2\varepsilon-\nu)}{\operatorname{tg}(x/4\varepsilon)},
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{r}(X,X) \geq -1 + 2c^2\frac{x_1^2}{16\varepsilon^2} + 2c^2x_2^2\left(\frac{1}{4\varepsilon}\frac{\operatorname{th}\nu}{\operatorname{tg}(1/2)}\right) > 0,$$

если ε достаточно мало.

Наконец, рассмотрим случай, когда $-\delta \leq x \leq \varepsilon$. Этот случай анализируется совершенно аналогично первому (т.е. случаю $x \geq 2\varepsilon$). Итак, мы показали, что $\bar{r}(X,X) > 0$.

Рассмотрим пару произвольных векторов U_1 и U_2, как выше. Как и ранее, рассмотрим последовательно три случая: $x \geq 2\varepsilon$, $\varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon$ и $-\delta \leq x \leq \varepsilon$. Пусть K — секционная кривизна N_m в двумерном направлении $\langle U_1, U_2\rangle$, т.е.

$$K = R(U_1,U_2,U_1,U_2) = \sum_{s,t=1}^{m} c_s^2 d_t^2 R\left(\frac{\partial_{\phi_s}}{f_s}, \frac{\partial_{\phi_t}}{f_t}, \frac{\partial_{\phi_s}}{f_s}, \frac{\partial_{\phi_t}}{f_t}\right) = \sum_{s,t=1}^{m} c_s^2 d_t^2 R_{stst}.$$

Пусть $x \geq 2\varepsilon$. Как и ранее, найдем «ближайшие» стороны с индексами i, $i{+}1$, т.е. в рассмотренной точке все функции f_j постоянны, при $j \neq 1, i, i{+}1$. Предположим, что f_i непостоянна. Пусть $X = \partial_{\rho_i}$, $X' = \frac{\partial_{\psi_i}}{k_2\cos(\rho_i/k_2)}$. Тогда из формул О'Нила следует, что

$$\bar{r}(U_1,U_1) \geq R(X,U_1,X,U_1) + R(X',U_1,X',U_1) + K.$$

Первые два слагаемых расписываются точно так же, как это делалось выше, поэтому их сумма положительна и имеет порядок $1/\mu^2$. Оценим последнее слагаемое. В формуле для R_{stst} функции f_i монотонно возрастают, метрика D в окрестности углов изометрична метрике сферы. Поэтому все ненулевые R_{stst} положительны, и мы получаем $K > 0$. Совершенно аналогично проверяется положительность $\bar{r}(U_1,U_1)$ в остальных участках D. Итак, $\bar{r}(U_1,U_1) > 0$. Лемма доказана.

Для доказательства обещанной во введении теоремы достаточно сгладить метрику ds^2 с сохранением положительности кривизны Риччи. Это делается следующим образом. Мы сглаживаем все участвующие в определении ds^2 функции в точках разрыва таким образом, чтобы вторая производная вблизи точек разрыва оставалась монотонной. Поскольку все функции были класса гладкости C^1, это сделать возможно. Далее, как следует, например из 1.174, [14] тензор кривизны Риччи является дифференциальным оператором, линейно зависящим от вторых производных метрики, значит если такое сглаживание мало́, то кривизна останется положительной.

Глава 5

Глобально гиперболические лоренцевы многообразия со специальными группами голономии

5.1 Конструкция лоренцевых метрик со специальными группами голономии

Пусть M — риманово многообразие размерности n с метрикой g. Рассмотрим следующую лоренцеву метрику на многообразии $N = M \times \mathbb{R}^2$:

$$\tilde{g} = 2d\eta(d\xi + \varepsilon f d\eta + 2\varepsilon A) + g, \tag{5.1}$$

где ξ, η — координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, f — функция на N, A — 1-форма на M, $\varepsilon > 0$ — вещественный параметр.

Основной целью данной главы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 5.1.*Пусть H — группа голономии риманова пространства, представление голономии которой не содержи в качестве прямого множителя группу изотропии кэлерова симметрического пространства* *ранга большего один. Тогда существует лоренцево многообразие с метрикой вида (5.1), группа голономии которого совпадает с любой из групп* $G^{1,H}$, $G^{2,H}$, $G^{3,H,\phi}$ *и* $G^{4,H,m,\psi}$.

Напомним, что группы, о котрых идет речь в теореме, описаны в параграфе 1.3.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы. Пусть $e^1,\dots,e^n$ — ортонормированный корепер метрики g, определенный вообще говоря лишь локально. Достроим его до изотропного корепера $\tilde{e}^0$, $\tilde{e}^1,\dots\tilde{e}^n$, $\tilde{e}^{n+1}$ метрики $\tilde{g}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\tilde{e}^0 = d\xi + \varepsilon f d\eta + 2\varepsilon A,\\
&\tilde{e}^i = e^i,\\
&\tilde{e}^{n+1} = d\eta.
\end{aligned}$$

Условимся, что в дальнейшем греческие индексы будут пробегать значения от 0 до $n+1$, латинские — от 1 до n. Пусть $\tilde{e}_\alpha$ — двойственный репер к $\tilde{e}^\alpha$. Напомним, что формы связности $\tilde{\omega}$ и кривизны $\tilde{\Omega}$ находятся из соотношений $d\tilde{e}^\alpha = -\tilde{\omega}^\alpha_\beta\wedge\tilde{e}^\beta$ и $\tilde{\Omega}^\alpha_\beta = d\tilde{\omega}^\alpha_\beta + \tilde{\omega}^\alpha_\gamma\wedge\tilde{\omega}^\gamma_\beta$, где матрицы $(\tilde{\omega}^\alpha_\beta)_{\alpha,\beta}$ и $(\tilde{\Omega}^\alpha_\beta)_{\alpha,\beta}$ лежат в алгебре $\mathbf{so}(n+1,1)$ (напомним здесь, что мы пользуемся изотропным представлением группы $SO(n+1,1)$, описанным подробно в параграфе 1.3).

Непосредственные вычисления, которые мы опускаем, позволяют получить следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Формы кручения и кривизны метрики* $\tilde{g}$ *в изотропном корепере* $\tilde{e}^0,\tilde{e}^1,\dots,\tilde{e}^n,\tilde{e}^{n+1}$ *задаются следующими соотношениями:*

$$\begin{array}{lclcl}
\tilde{\omega}^0_0 &=& -\tilde{\omega}^{n+1}_{n+1} &=& \varepsilon f_0\tilde{e}^{n+1},\\
\tilde{\omega}^0_{n+1} &=& -\tilde{\omega}^{n+1}_0 &=& 0,\\
\tilde{\omega}^{n+1}_i &=& -\tilde{\omega}^i_0 &=& 0,\\
\tilde{\omega}^0_i &=& -\tilde{\omega}^i_{n+1} &=& \varepsilon f_i\tilde{e}^{n+1} + \varepsilon F_{ij}\tilde{e}^j,\\
\tilde{\omega}^i_j &=& -\tilde{\omega}^j_i &=& \omega^i_j - \varepsilon F_{ij}\tilde{e}^{n+1},
\end{array} \tag{5.2}$$

где $f_0 = \langle df, e^{n+1}\rangle = \partial f/\partial\xi$, $f_i = \langle df, e^i\rangle$ *и* $dA = F = \frac{1}{2}F_{ij}e^i\wedge e^j$,

$$\begin{array}{lllll}
\tilde\Omega^0_0 & = & -\tilde\Omega^{n+1}_{n+1} & = & \varepsilon f_{00}\tilde e^0\wedge\tilde e^{n+1} + \varepsilon f_{0i}\tilde e^i\wedge\tilde e^{n+1},\\
\tilde\Omega^{n+1}_0 & = & -\tilde\Omega^0_{n+1} & = & 0,\\
\tilde\Omega^i_0 & = & -\tilde\Omega^{n+1}_i & = & 0,\\
\tilde\Omega^0_i & = & -\tilde\Omega^i_{n+1} & = & \varepsilon\tilde\nabla_0 f_i\tilde e^0\wedge\tilde e^{n+1}+\\
 & & & & (\varepsilon\tilde\nabla_k f_i + \varepsilon^2 F_{ij}F_{jk})\tilde e^k\wedge\tilde e^{n+1} + \varepsilon\tilde\nabla_k F_{ij}\tilde e^k\wedge\tilde e^j,\\
\tilde\Omega^i_j & = & -\tilde\Omega^j_i & = & \Omega^i_j - \varepsilon\nabla_k F_{ij}\tilde e^k\wedge\tilde e^{n+1},
\end{array} \tag{5.3}$$

где $f_{00} = \partial^2 f/\partial\xi^2$, $f_{0i} = \langle f_0, e^i\rangle$.

В соответствии с теоремой 1.3 алгебра голономии $\mathbf{hol} = \mathbf{hol}_p(N)$ многообразия N порождена элементами вида

$$(P_\gamma\tilde\Omega)(v, w) \in \mathbf{so}(n+1, 1),$$

где $v, w \in T_pN$, γ — путь в N, заканчивающийся в точке p, а P_γ — параллельный перенос вдоль кривой γ. Поскольку свойство изотропности корепера сохраняется при параллельном переносе, то можно в каждой точке отождествить группу изометрий касательного пространства с матричной группой $SO(n+1, 1)$, сохраняющей скалярное произведение (5.1).

Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = p$. Сделаем параллельный перенос корепера $\tilde e^\alpha$ вдоль γ:

$$(P_\gamma)_t(\tilde e^\alpha) = (W_t)^\alpha_\beta\tilde e^\beta, W_t \in SO(n+1, 1).$$

Из теоремы Амброза-Зингера 1.3 следует, что алгебра **hol** порождена элементами $Ad(W_t)\tilde\Omega(v, w)$, для всех $p \in N$, $v, w \in T_pN$ и всех достаточно малых t. Переходя к пределу при $t \to 0$ получаем, что алгебра **hol** порождена матрицами $\tilde\Omega(v, w)$, $[\tilde\omega(u), \tilde\Omega(v, w)]$, для всех $p \in N$ и $u, v, w \in T_pN$. Таким образом, нами доказано следующее утверждение:

Лемма 5.2. *Алгебра голономии* $\mathbf{hol} \subset \mathbf{so}(n+1, 1)$ *многообразия* N *может быть найдена следующим образом:*

$$\mathbf{hol} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde\Omega(\tilde v_\alpha\wedge\tilde v_\beta), [\tilde\omega(\tilde v_\gamma), \tilde\Omega(\tilde v_\alpha\wedge\tilde v_\beta)] | p \in N, \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots, n, n+1\}.$$

Пусть $\mathbf{g} \subset \mathbf{so}(1,n+1)$ — алгебра одного из четырех типов, определенных выше, $\mathbf{h}$ – ее ортогональная часть. Как следует из вышесказанного, $\mathbf{h}$ является алгеброй голономии риманова многообразия. Используя классификацию римановых групп голономии, мы получаем ортогональное разложение

$$\tilde{U}_p = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \oplus \mathbb{R}^{n_0} \oplus_{i=1}^r \mathbb{R}^{n_i}, m = n_0 + \sum_{i=1}^r n_i,$$

и соответствующее разложение алгебр

$$\mathbf{h} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{h}_0 \oplus_{i=1}^r \mathbf{h}_i \subset \mathbf{so}(n),$$

где $\mathbf{0} \subset \mathbf{so}(n-m)$ — тривиальное слагаемое, алгебра $\mathbf{h}_0$ является (возможно приводимой) подалгеброй $\mathbf{so}(n_0)$ с тривиальным центром, а каждая алгебра $\mathbf{h}_i$, $i = 1, \dots, r$ изоморфна $\mathbf{u}(m_i)$, $2m_i = n_i$ со стандартным действием на $\mathbb{R}^{n_i} = \mathbb{C}^{m_i}$, $\mathbf{h}_i(\mathbb{R}^{n_j}) = 0$ при $i \neq j$; $i, j = 0, \dots, r$, и $\mathbf{h}$ аннулирует слагаемое $\mathbb{R}^{n-m}$.

В дальнейшем нам будет удобно ввести следующие обозначения:

$$\mathcal{A} = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{K} = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | A \in \mathbf{so}(n)\},$$

$$\mathcal{N} = \{ \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & -X^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | X \in \mathbb{R}^n\}.$$

Таким образом, $\mathbf{so}(n+1,1)_L = \mathcal{A} \oplus \mathcal{K} \oplus \mathcal{N}$, причем $\mathcal{N}$ — абелев идеал в $\mathbf{so}(n+1,1)_L$, $\mathcal{K}$ — подалгебра, изоморфная $\mathbf{so}(n)$ и $\mathcal{A}$ коммутирует с $\mathcal{K}$. Элементы из $\mathbf{so}(n+1,1)_L$ будем обозначать как (a, A, X), в соответствии с указанным разложением. Наконец, обозначим через $\mathrm{pr}_{\mathcal{A}}$, $\mathrm{pr}_{\mathcal{K}}$ и $\mathrm{pr}_{\mathcal{N}}$ проекции алгебры $\mathbf{so}(n+1,1)_L$ на соответствующие подалгебры относительно нашего разложения. Рассмотрим отдельно случай каждой алгебры.

Тип 1. В этом случае, пусть M — компактное n-мерное риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathbf{h}$. Положим $N = M \times \mathbb{R}^2$, рассмотрим на N метрику (5.1) при $A = 0$.

Из формул (5.3) видно, что если функция f имеет достаточно общий вид, то

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha \wedge \tilde{v}_\beta)|\alpha, \beta\} = \mathbf{g}^{1,\mathbf{h}}.$$

Далее, формулы (5.2) показывают, что $\tilde{\omega}(\tilde{v}_\gamma) \in \mathbf{g}^{1,\mathbf{h}}$, откуда следует требуемый результат.

Тип 2. Этот случай совершенно аналогичен предыдущему, надо только рассмотреть функцию f достаточно общего вида, не зависящую от переменных ξ, η.

Для продолжения доказательства нам понадобится пример Калаби риманова пространства с группой голономии $SU(n)$. При изложении следующей конструкции мы следуем [75]. Пусть $\mathbb{C}P^{n-1}$ — комплексное проективное пространство с метрикой Фубини — Штуди ds^2. Рассмотрим метрику

$$d\hat{s}^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \frac{1}{\rho^{2n}}} + \rho^2 \left(1 - \frac{1}{\rho^{2n}}\right)(d\tau - 2A)^2 + \rho^2 ds^2, \tag{5.4}$$

где A — 1-форма на $\mathbb{C}P^{n-1}$ такая, что $dA = \Phi$ — кэлерова форма, $\rho \geq 1, \tau$ — новые переменные, причем τ периодична. Форма A определена лишь локально на $\mathbb{C}P^{n-1}$, однако в силу ходжевости $\mathbb{C}P^{n-1}$ можно выбрать период $\Delta\tau$ переменной τ таким, что $\int 2\Phi$ по каждой замкнутой 2-цепи в целое число раз отличается от $\Delta\tau$. Тогда $(d\tau - 2A)$ не зависит от выбора координатной окрестности и метрика (4) является корректно определенной гладкой метрикой на пространстве комплексного линейного расслоения над $\mathbb{C}P^{n-1}$, являющегося n-ной степенью расслоения Хопфа над $\mathbb{C}P^{n-1}$. Более того, получающееся таким образом полное риманово многообразие C_n (пространство Калаби) обладает группой голономии $SU(n)$.

Пространство C_n, построенное Калаби [41], является обобщением пространства Эгучи — Хансона [48], возникающим при $n = 2$.

При этом кэлерова форма на C_n выглядит следующим образом:

$$\hat{\Phi} = -\rho^2\Phi + \rho d\rho \wedge (d\tau - 2A).$$

В дальнейшем нам понадобится 1-форма B:

$$B = \frac{1}{2}\rho^2(d\tau - 2A).$$

В соответствии с вышесказанным, форма B глобально определена на C_n и $dB = \hat{\Phi}$.

Тип 3. Пусть M^{n_0} — компактное риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathbf{h}_0$. Положим $M^n = M^{n_0} \times C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_r}$, $n = n_0 + 2\sum_{i=1}^r m_i$ — прямое произведение римановых пространств, где пространства Калаби C_{m_i} определены выше. Обозначим через ρ_i, τ_i соответствующие координаты, а B_i, $i = 1, \ldots, r$ — 1-формы на C_{m_i}. Нетрудно заметить, что ρ_i^2 и B_i глобально определены и гладки на всем N. Центр алгебры $Z(\mathbf{h}) = \oplus_{i=1}^r \mathbf{h}_i$ изоморфен $\oplus_{i=1}^r \mathbf{u}(1)$, и в качестве базиса $Z(\mathbf{h})$ можно выбрать формы $\hat{\Phi}_i$, $i = 1, \ldots, r$ (2-формы естественно интерпретируются как элементы алгебры $\mathcal{K}$). Тогда ненулевое линейное отображение $\phi : Z(\mathbf{h}) \to \mathbb{R}$ определяется набором вещественных констант ϕ_i, $i = 1, \ldots, r$, одновременно не равных нулю. Положим

$$A = \sum_{i=1}^r g_i B_i,$$

где каждая функция g_i зависит только от переменной ρ_i. Далее, пусть

$$f = h - \xi \sum_{i=1}^r \phi_i \left(\frac{1}{2m_i} \rho_i g_i' + g_i \right),$$

где функция h не зависит от ξ, η. Пусть $N = M \times \mathbb{R}^2$, и рассмотрим на N метрику (5.1), определяемую функцией f и 1-формой A.

Пусть

$$W_1 = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\omega}(\tilde{e}_k)|k = 1,\dots,n\}, W_2 = \mathbb{R}\tilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1}).$$

Ясно, что $\mathrm{pr}_{\mathcal{K}}(W_1) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\omega(e_k)|, k = 1,\dots,n\}$ и $\mathrm{pr}_{\mathcal{A}}(W_1) = 0$. Далее, $F = dA = \sum_{i=1}^r (dg_i \wedge B_i + g_i dB_i) = \sum_{i=1}^r (g_i' d\rho_i \wedge B_i + g_i \hat{\Phi}_i) = \sum_{i=1}^r (\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\tau_i - A_i) + g_i\hat{\Phi}_i)$. Таким образом, $F \in \oplus_{i=1}^r \mathbf{h}_i$. Формулы (2) показывают, что $\mathrm{pr}_{\mathcal{K}}(\tilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon F$. Следовательно, $\mathrm{pr}_{\mathbf{so}(n_0)}(\tilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = 0$, $\mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i}(\tilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\tau_i - A_i) + g_i\hat{\Phi}_i)$. У нас каждая алгебра $\mathbf{h}_i$ изоморфна $\mathbf{u}(m_i)$, поэтому определена проекция $\mathrm{tr} : \mathbf{h}_i \to Z(\mathbf{h}_i) = \mathbf{u}(1)$, инвариантная относительно группы голономии. Кроме того, форма $\hat{\Phi}_i$ является образующей центра $Z(\mathbf{h}_i)$, поэтому

$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(W_2) = -\varepsilon \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\tau_i - A_i) + g_i\hat{\Phi}_i\right) =$$

$$-\varepsilon\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)\hat{\Phi}_i.$$

Далее,

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{A}}(\tilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon\sum_{i=1}^r \phi_i\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right) = \phi(\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h})}(\tilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1}))).$$

Таким образом, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\omega}(\tilde{e}_\alpha)|\alpha\} = W_1 \oplus W_2 \subset \mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi}$.

Положим теперь

$$V_1 = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\Omega}(\tilde{e}_i \wedge \tilde{e}_j)|i,j = 1,\dots,n\} \subset \mathbf{so}(n+1,1).$$

Анализируя формулы (3) и применяя лемму 2, видим, что $\mathrm{pr}_{\mathcal{K}}(V_1) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\Omega(e_i \wedge e_j)|i,j = 1,\dots,n\} \subset \mathbf{h}_0 \oplus_{i=1}^r \mathbf{h}_i'$, где $\mathbf{h}_i' = \mathbf{su}(m_i)$. Кроме того, $\mathrm{pr}_{\mathcal{A}}(V_1) = 0$. Далее, положим

$$V_2 = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})|k = 1,\dots,n\}.$$

Поскольку $F = \sum_{i=1}^r (\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\tau_i - A_i) + g_i\hat{\Phi}_i) \in \oplus_{i=1}^r \mathbf{h}_i$, то $\nabla_k F \in \oplus_{i=1}^r \mathbf{h}_i$. Формулы (3) показывают, что $\mathrm{pr}_{\mathcal{K}}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon\nabla_k F$. Следовательно, $\mathrm{pr}_{\mathbf{so}(n_0)}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = 0$ и $\mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon\nabla_k(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge$

$(d\tau_i - A_i) + g_i\hat{\Phi}_i)$, где $i = 1, \dots, r$; $k = 1, \dots, n$. Тогда, воспользовавшись параллельностью формы $\hat{\Phi}_i$ мы получаем

$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \mathrm{tr}\left(\nabla_k\left(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\psi_i - A_i) + g_i\hat{\Phi}_i\right)\right) =$$

$$-\varepsilon\nabla_k \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\psi_i - A_i) + g_i\hat{\Phi}_i\right) = -\varepsilon\nabla_k\left(\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)\hat{\Phi}_i\right) =$$

$$-\varepsilon\left(1 - \frac{1}{\rho_i^{2m_i}}\right)\left(\frac{2m_i+1}{2m_i}g_i' + \frac{\rho_i}{2m_i}g_i''\right)\hat{\Phi}_i,$$

если индекс k соответствует переменной ρ_i; и

$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = 0,$$

в противном случае. Далее, в случае, если индекс k соответствует переменной ρ_i, мы имеем:

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{A}}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon\phi_i\left(1 - \frac{1}{\rho_i^{m_i}}\right)\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)' =$$

$$\phi(\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h})}(\tilde{\Omega}(\tilde{v}_i \wedge \tilde{v}_{n+1}))).$$

Наконец, $V_3 = \mathbb{R}\tilde{\Omega}(\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_{n+1}) = 0$. Из последних соотношений вытекает, что

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta)|\alpha, \beta\} = V_1 + V_2 + V_3 \subset \mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi}.$$

Более того, $\mathrm{pr}_{\mathcal{K}}([W_1, V_1] \oplus V_1) = \mathbf{h_0} \oplus_{i=1}^r \mathbf{h}_i'$ по лемме 2, примененной к многообразию M. Осталось заметить, что если выбрать функцию h достаточно общим образом, то $\mathrm{pr}_{\mathcal{N}}(V_2) = \mathcal{N}$, откуда следует, что

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{[\tilde{\omega}(\tilde{e}_\gamma), \tilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta)], \tilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta)|\alpha, \beta\,\gamma\} = \mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi}.$$

По лемме 5.2

$$\mathbf{hol}(N) = \mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi}.$$

Так как ортогональный корепер $e^1, \dots, e^n$ выбирался в произвольной окрестности M, то отсюда следует, что

$$\mathrm{Hol}(N) = G^{3,H,\phi}.$$

Тип 4. Доказательство в целом аналогично предыдущему случаю. Пусть M^{n_0} — компактное риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathbf{h}_0$. Положим $M^n = \mathbb{R}^{n-m} \times M^{n_0} \times C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_r}$, $m = n_0 + 2\sum_{i=1}^r m_i$ — прямое произведение римановых пространств, где $\mathbb{R}^{n-m}$ — плоское $(n-m)$-мерное евклидово пространство с переменными $t_1, \ldots, t_{n-m}$, а пространства Калаби C_{m_i} определены выше. Обозначим через ρ_i, τ_i, B_i, $i = 1, \ldots, r$ соответствующие координаты и 1-формы на C_{m_i}. Как и ранее, ρ_i^2 и B_i глобально определены и гладки на всем N. Пусть линейное отображение $\psi : Z(\mathbf{h}) = \oplus_{i=1}^r Z(\mathbf{h}_i) \to \mathbb{R}^{n-m}$ задается матрицей $(\psi_i^j)_{i=1;j=1}^{r;n-m}$ максимального ранга, в базисе $\hat{\Phi}_i, i = 1, \ldots, r$.

Положим
$$A = \sum_{i=1}^r g_i B_i,$$
где каждая функция g_i зависит только от переменной ρ_i, и
$$f = h - \sum_{k=1}^{n-m} \sum_{i=1}^r \psi_i^k t_k \left(\frac{1}{2m_i} \rho_i g_i' + g_i \right),$$
для некоторой функции h, не зависящей от ξ, η. Пусть $N = M \times \mathbb{R}^2$, и рассмотрим на N метрику (1), определяемую функцией f и 1-формой A.

Пусть
$$W_1 = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\omega}(\tilde{e}_k) | k = 1, \ldots, n\}, W_2 = \mathbb{R}\tilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1}).$$
Как и прежде, $\mathrm{pr}_{\mathcal{K}}(W_1) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\omega(e_k)|, k = 1, \ldots, n\}$, $\mathrm{pr}_{\mathcal{K}}(W_2) \subset \mathbf{h}$ и
$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(\tilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \left(\frac{1}{2m_i} \rho_i g_i' + g_i \right) \hat{\Phi}_i.$$
Будем обозначать через $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ подпространства $\mathcal{N}$, отвечающие $\mathbb{R}^{n-m}$ и $M^{n_0} \times C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_r}$, соответственно. Ясно, что $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$. Далее, $\mathrm{pr}_{\mathcal{N}_1}(W_1) = 0$ и
$$\mathrm{pr}_{\mathcal{N}_1}(\tilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial f}{\partial t_k} \frac{\partial}{\partial t_k} =$$

$$-\varepsilon \sum_{k=1}^{n-m} \sum_{i=1}^{r} \psi_i^k \left(\frac{1}{2m_i} \rho_i g_i' + g_i \right) \frac{\partial}{\partial t_k} = \psi(\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h})}(\tilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1}))),$$

где $\frac{\partial}{\partial t_k}$, $k = 1, \ldots, n-m$ — базис в $\mathbb{R}^{n-m}$. Таким образом, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\omega}(\tilde{e}_\alpha)|\alpha\} \subset \mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi}$. Как и ранее, положим

$$V_1 = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\Omega}(\tilde{e}_i \wedge \tilde{e}_j)|i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Из формул (5.3) видим, что $\mathrm{pr}_{\mathbf{so}(n)}(V_1) \subset \mathbf{h}_0 \oplus_{i=1}^r \mathbf{h}_i'$ и $\mathrm{pr}_{\mathcal{N}_1}(V_1) = 0$. Далее, функция f не зависит от ξ, поэтому пространство $V_2 = \mathbb{R}\tilde{\Omega}(\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_{n+1})$ тривиально. Наконец, рассмотрим пространство

$$V_3 = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\Omega}(\tilde{e}_i \wedge \tilde{e}_{n+1})|i = 1, \ldots, n\}.$$

Имеем, $\mathrm{pr}_{\mathcal{K}}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \nabla_k F$, следовательно, $\mathrm{pr}_{\mathbf{so}(n-m+n_0)}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = 0$ и $\mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \nabla_k (\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\psi_i - A_i) + g_i \hat{\Phi}_i)$, где $i = 1, \ldots, r; k = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \left(1 - \frac{1}{\rho_i^{2m_i}}\right) \left(\frac{2m_i + 1}{2m_i} g_i' + \frac{\rho_i}{2m_i} g_i''\right) \hat{\Phi}_i,$$

если индекс k соответствует переменной ρ_i, и

$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = 0,$$

в противном случае. Далее, если индекс k отвечает переменной ρ_i, то из (5.3) следует, что

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{N}_1}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \sum_{j=1}^{n-m} \tilde{\nabla}_k f_j \frac{\partial}{\partial t_j} =$$

$$-\varepsilon \sum_{j=1}^{n-m} \nabla_k \sum_{i=1}^{r} \psi_i^j \left(\frac{1}{2m_i} \rho_i g_i' + g_i\right) \frac{\partial}{\partial t_j} =$$

$$-\varepsilon \sum_{j=1}^{n-m} \psi_i^j \left(1 - \frac{1}{\rho_i^{2m_i}}\right) \left(\frac{1}{2m_i} \rho_i g_i' + g_i\right)' \frac{\partial}{\partial t_j} = \psi(\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h})}(\tilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})))$$

Из последних соотношений вытекает, что

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{\tilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha,\tilde{v}_\beta)|\alpha,\beta\} = V_1+V_2+V_3 \subset \mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi}.$$

Далее, $\mathrm{pr}_{\mathcal{K}}([W_1,V_1]\oplus V_1)=\mathbf{h_0}\oplus_{i=1}^r\mathbf{h}'_i$ по лемме 5.2, примененной к многообразию M. Осталось заметить, что если выбрать функцию h достаточно общим образом, то $\mathrm{pr}_{\mathcal{N}_2}(V_3)=\mathcal{N}_2$, откуда следует, что

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}\{[\tilde{\omega}(\tilde{e}_\gamma),\tilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha,\tilde{v}_\beta)],\tilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha,\tilde{v}_\beta)|\alpha,\beta\,\gamma\} = \mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi}.$$

По лемме 5.2

$$\mathbf{hol}(N)=\mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi}.$$

Так как ортогональный корепер $e^1,\dots,e^n$ выбирался в произвольной окрестности M, то отсюда следует, что

$$\mathrm{Hol}(N)=G^{4,H,m,\psi}.$$

5.2 Глобально гиперболические лоренцевы многообразия: обзор необходимых результатов

В данном параграфе мы кратко дадим основные сведения о свойствах причинности лоренцевых многообразий, которые нам понадобятся в дальнейшем. Более подробную информацию, а также дальнейшие ссылки можно найти в [16].

Лоренцево многообразие (N,g) называется *ориентируемым во времени*, если существует глобально определенное времениподобное векторное поле X на N. Если такое поле выбрано, то N называют *ориентированным во времени*. Выбор ориентирующего во времени поля автоматически разбивает все непространственноподобные вектора на направленные в будущее и направленные в прошлое, в зависимости от того, образуют они с полем X острый, либо тупой угол. Соответственно, непространственноподобная кривая γ называется направленной в будущее (прошлое), если $\dot{\gamma}$ направлен в будущее (прошлое). В дальнейшем, все лоренцевы многообразия будут подразумеваться ориентированными во времени.

Пусть теперь $p, q \in N$. Мы будем писать $p \ll q$, если существует гладкая направленная в будущее времениподобная кривая, идущая из p в q; и $p \leq q$, если либо $p = q$, либо существует гладкая, направленная в будущее непространственноподобная кривая, идущая из p в q. *Хронологическим будущим* и хронологическим прошлым точки p называются, соответственно, множества

$$I^+(p) = \{q \in N | p \ll q\},\ I^-(p) = \{q \in N | q \ll p\}.$$

Причинным будущим и *причинным прошлым* точки p называются, соответственно, множества

$$J^+(p) = \{q \in N | p \leq q\},\ J^-(p) = \{q \in N | q \leq p\}.$$

Нетрудно понять, что хронологические будущее и прошлое являются открытыми в N. С другой стороны, примеры показывают, что причинные прошлое и будущее в общем случае не являются ни открытыми, ни замкнутыми.

На множестве $Lor(N)$ лоренцевых метрик можно ввести тонкую C^r-топологию следующим образом. Рассмотрим локально конечное покрытие N координатными окрестностями. Выберем положительную непрерывную функцию δ на N. Две метрики из $Lor(N)$ называются δ-близкими, если в каждой координатной окрестности все их производные вплоть до порядка r включительно отличаются друг от друга не более чем на δ. Для данной метрики $g \in Lor(N)$ будем называть ее δ-окрестностью все лоренцевы метрики δ-близкие к g. Тогда в качестве базы (тонкой) C^r-топологии возьмем все δ-окрестности всех метрик $g \in Lor(N)$.

Следующие определения характеризуют причинные свойства лоренцевых многообразий, которые нам необходимы для изложения своих результатов. Лоренцево многообразие называется

- *причинным*, если не содержит ни одной пары точек p, q, связанные соотношением $p \leq q \leq p$; очевидно, что это равносильно отсутствию замкнутых непространственноподобных кривых;

- *сильно причинным*, если у каждой точки $p \in N$ существуют сколь угодно малые окрестности, пересекающиеся с каждой непространственноподобной кривой по связному множеству;

- *устойчиво причинным*, если существует C^0-окрестность $U(g)$ метрики g в пространстве лоренцевых метрик такая, что каждая метрика $g' \in U(g)$ является причинной;

- *глобально гиперболическим*, если N сильно причинно и для каждой пары $p, q \in N$ множество $J^+(p) \cap J^-(q)$ компактно.

Топология Александрова на N задается выбором в качестве базы всевозможные пересечения вида $I^+(p) \cap I^-(q)$, $p, q \in N$. Следующий результат проясняет понятие сильно причинных пространств.

Предложение 5.2[22, 76]. *Топология Александрова на N совпадает с исходной топологией тогда, и только тогда, когда N — сильно причинно.*

Непрерывная функция $f : N \to \mathbb{R}$ называется *глобальной функцией времени*, если f строго возрастает вдоль любой направленной в будущее непространственноподобной кривой.

Предложение 5.3[58, 83]. *Лоренцево многообразие N допускает глобальную функцию времени в точности тогда, когда оно устойчиво причинно.*

Предложение 5.4[16, Гл. 2]. *Устойчиво причинное лоренцево многообразие сильно причинно.*

Следующее утверждение в более сильном виде доказано в [51].

Предложение 5.5. *Глобальная гиперболичность является C^0-устойчивым свойством, т.е. если $g \in Lor(N)$ глобально устойчива, то таким же свойством обладают все лоренцевы метрики, лежащие в некоторой C^0-окрестности g.*

Следующий результат, является непосредственным следствием [16, Гл. 2].

Предложение 5.6. *Прямое произведение глобально гиперболического лоренцева многообразия и полного риманова многообразия является глобально гиперболическим лоренцевым многообразием.*

Для прояснения свойства глобальной гиперболичности, полезно воспользоваться понятием поверхности Коши. А именно, гиперповерхность S в лоренцевом многообразии N называется *поверхностью Коши*, если каждая непродолжаемая непространственноподобная кривая в N пересекает S ровно в одной точке.

Предложение 5.7 [24]. *Лоренцево многообразие является глобально гиперболическим тогда, и только тогда, когда оно допускает поверхность Коши.*

Следующий результат не является необходимым для нас, но мы его приводим, поскольку он проясняет топологическое строение глобально гиперболических лоренцевых многообразий.

Предложение 5.8 [51]. *Глобально гиперболическое лоренцево многообразие N размерности n гомеоморфно произведению $\mathbb{R} \times S$, где S — $(n-1)$-мерное топологическое подмногообразие в N, и для каждого $t \in \mathbb{R}$ подмногообразие $\{t\} \times S$ является поверхностью Коши в N.*

5.3 Свойства причинности построенных метрик

Целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 5.9. *Лоренцевы многообразия с группами голономии* $G^{1,H}$, $G^{2,H}$, $G^{3,H,\phi}$ *и* $G^{4,H,m,\psi}$ *построенные в теореме 5.1 являются глобально гиперболическими при подходящем выборе* f, A *и* ε.

Доказательство. Рассмотрим отдельно каждый тип группы голономии.

Типы 1 и **2**. Нетрудно заметить, что при построении метрик с группами голономии этих типов можно в качестве f выбрать функцию с компактным носителем в N. Значит при $\varepsilon \to 0$ метрика (5.1) сходятся к метрике

$$g_0 = 2d\eta d\xi + ds^2,$$

в тонкой C^0 топологии. Ясно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ векторное поле $\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$ является времениподобным и ориентирует N во времени как относительно метрики g_0, так и относительно $\tilde{g}$. Пространство (N, g_0) изометрично прямому произведению двумерного плоского пространства Минковского и полного риманова пространства M, поэтому является глобально гиперболичным по предложению 5.6. По предложению 5.5 свойство глобальной гиперболичности является C^0-устойчивым, поэтому мы получаем требуемый результат.

Тип 3. Рассмотрим метрику

$$g_0 = 2d\eta(d\xi - (1 + |\xi|)d\eta) + \frac{1}{2}g.$$

Напомним, что на пространстве лоренцевых метрик на данном многообразии N вводится отношение частичного порядка следующим образом [16]. Говорят, что метрика $g_1 \preceq g_2$ ($g_1 \prec g_2$), если каждый световой конус метрики g_1 (строго) содержится в световом конусе g_2, или, другими словами, для любой точки $p \in N$ и для любого ненулевого вектора $X \in T_pN$, из неравенства $g_1(X,X) \leq 0$ следует, что $g_2(X,X) \leq 0$ ($g_2(X,X) < 0$).

Лемма 5.3. *При достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *имеет место соотношение:* $\tilde{g} \preceq g_0$.

Доказательство. Пусть $p \in N$, $V = V_1 + V_2 \in T_pN$, где V_1, V_2 — компоненты V, касательные, соответственно к $\mathbb{R}^2$ и M. Заметим, что $|A(V_2)|^2 \leq Cg(V_2,V_2)$. Тогда

$$\tilde{g}(V,V) \geq 2d\eta\,(d\xi + \varepsilon f d\eta)\,(V_1,V_1) - 4\varepsilon d\eta(V_1)|A(V_2)| + g(V_2,V_2) \geq$$

$$2d\eta\,(d\xi + \varepsilon f d\eta)\,(V_1,V_1) - 2\varepsilon(d\eta(V_1))^2 - 2\varepsilon|A(V_2)|^2 + g(V_2,V_2) \geq$$

$$2d\eta\,(d\xi + \varepsilon(f-1)d\eta)\,(V_1,V_1) + (1 - 2C\varepsilon)g(V_2,V_2) \geq$$

$$2d\eta\,(d\xi - (|\xi|+1)d\eta)\,(V_1,V_1) + \frac{1}{2}g(V_2,V_2) \geq g_0(V,V),$$

если выбрать $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $1 - 2C\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ и

$$|\varepsilon(f-1)| = \varepsilon\left|h - \xi\sum_{i=1}^{r}\phi_i\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right) - 1\right| \leq$$

$$|\xi|\left|\varepsilon\sum_{i=1}^{r}\phi_i\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)\right| + \varepsilon|h-1| \leq |\xi| + 1.$$

Следовательно, любой непространственноподобный (времениподобный) вектор для метрики $\tilde{g}$ будет непространственноподобным (времениподобным) и для g_0. Лемма доказана.

Очевидно, что векторное поле $\frac{\partial}{\partial\eta}$ является времениподобным для (N, g_0), а по лемме 5.3 и для $(N, \tilde{g})$. Значит поле $\frac{\partial}{\partial\eta}$ задает направление времени на N относительно лоренцевых метрик g_0 и $\tilde{g}$. Везде в дальнейшем будем иметь в виду именно это направление времени.

Лемма 5.4. *Многообразие* (N, g_0) *является устойчиво причинным и глобально гиперболичным.*

Доказательство. Для начала рассмотрим метрику $g_1 = 2d\eta(d\xi - (1 + |\xi|)d\eta)$ на $\mathbb{R}^2$. Определим следующую функцию на $\mathbb{R}^2$:

$$T = \eta - \ln(|\xi| + 2).$$

Если рассмотреть направленную в будущее непространственноподобную регулярную кривую $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$, то

$$\dot{\eta}\left(\dot{\xi} - (|\xi| + 1)\dot{\eta}\right) \leq 0.$$

Следовательно,

$$\dot{T} = \dot{\eta} - \frac{\dot{\xi}}{|\xi| + 2} \geq \frac{1}{|\xi| + 2}\left((|\xi| + 1)\dot{\eta} - \dot{\xi}\right) + \frac{\dot{\eta}}{|\xi| + 2} > 0.$$

Значит T является глобальной функцией времени на $\mathbb{R}^2$, и по предложению 5.3 пространство $(\mathbb{R}^2, g_1)$ устойчиво причинно, а значит, по предложению 5.4 сильно причинно. Очевидно, что функция T также является глобальной функцией времени и для (N, g_0), откуда следует его устойчивая и сильная причинность.

Рассмотрим теперь пару точек $p_1 = (\xi_1, \eta_1)$ и $p_2 = (\xi_2, \eta_2)$ в $\mathbb{R}^2$. Непосредственными вычислениями устанавливается, что множество $J^+(p_1) \cap J^-(p_2)$ на $\mathbb{R}^2$ задается неравенствами:

$$\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2,$$

$$c(\xi_1, \eta_1) + \operatorname{sgn}(\xi)\ln(1 + |\xi|) \leq \eta \leq c(\xi_2, \eta_2) + \operatorname{sgn}(\xi)\ln(1 + |\xi|),$$

где $c(\xi_i, \eta_i) = \eta_i - \operatorname{sgn}(\xi_i)\ln(1 + |\xi_i|)$. Ясно, что последние неравенства определяют компакт в $\mathbb{R}^2$, независимо от выбора точек p_1, p_2. Следовательно, $(\mathbb{R}^2, g_1)$ глобально гиперболично. Значит (N, g_0), изометричное прямому произведению $(\mathbb{R}^2, g_0)$ и (M, g), также является глобально гиперболичным. Лемма доказана.

Теперь уже несложно получить требуемое свойство. Из леммы 5.3 следует, что функция времени для метрики g_0 является функцией времени и для g. Следовательно, $(N,\tilde g)$ является устойчиво причинным, а следовательно (по предложению 5.4) и сильно причинным. Далее, по лемме 5.4 если $p,q\in N$, то $J^+(p)\cap J^-(q)$ относительно метрики g_0 компактно. Следовательно, множество $J^+(p)\cap J^-(q)$ относительно метрики $\tilde g$ имеет компактное замыкание. Из [16, Гл.3] следует, что $(N,\tilde g)$ глобально гиперболично.

Тип 4. Пусть g' — риманова метрика на $M^{n_0}\times C_{m_1}\times\ldots\times C_{m_r}$, рассмотренная нами при доказательстве теоремы 1. Тогда риманово пространство (M,g) изометрично произведению плоского пространства $\mathbb{R}^{n-m}$ и некоторого риманова многообразия $(M^{n_0}\times C_{m_1}\times\ldots\times C_{m_r},g')$. Рассмотрим следующую «фоновую» метрику на N:

$$g_0=2d\eta\left(d\xi-\left(1+\left|\sum_{k=1}^{n-m}t_k\right|\right)d\eta\right)+\sum_{k=1}^{n-m}dt_k^2+\frac{1}{2}g'.$$

Лемма 5.5. *Имеет место соотношение: $\tilde g\preceq g_0$.*

Доказательство. Возьмем обозначения из доказательства леммы 5.3. Нетрудно заметить, что $|A(V_2)|^2\le Cg'(V_2,V_2)$, следовательно

$$\tilde g(V,V)\ge 2d\eta\left(d\xi+\varepsilon(f-1)d\eta\right)(V_1,V_1)+\sum_{k=1}^{n-m}dt_k^2+(1-2C\varepsilon)g'(V_2,V_2)\ge g_0(V,V),$$

если выбрать $\varepsilon>0$ настолько малым, что $1-2C\varepsilon\ge\frac{1}{2}$ и

$$|\varepsilon(f-1)|=\varepsilon\left|h-\sum_{k=1}^{n-m}\sum_{i=1}^{r}\psi_i^kt_k\left(\frac{1}{2m_i}\rho_ig_i'+g_i\right)-1\right|\le$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n-m}t_k\right|\left|\varepsilon\sum_{i=1}^{r}\psi_i^k\left(\frac{1}{2m_i}\rho_ig_i'+g_i\right)\right|+\varepsilon|h-1|\le\left|\sum_{k=1}^{n-m}t_k\right|+1.$$

Следовательно, любой непространственноподобный (времениподобный) вектор для метрики $\tilde g$ будет непространственноподобным (времениподобным) и для g_0. Лемма доказана.

Как и в предыдущем случае, лемма 5.5 позволяет в качестве ориентирующего во времени для $(N, \tilde{g})$, (N, g_0) (а также и для остальных используемых далее вспомогательных лоренцевых метрик) взять временниподобное поле $\frac{\partial}{\partial \eta}$ является временниподобным для (N, g_0).

Для простоты положим $F = F(\xi, \eta, t_1, \dots, t_k) = \left| \sum_{k=1}^{n-m} t_k \right|$ и рассмотрим две вспомогательные лоренцевы метрики на $\mathbb{R}^{2+n-m}$:

$$g_1 = 2d\eta \, (d\xi - (1 + F) \, d\eta) + \sum_{k=1}^{n-m} dt_k^2,$$

$$g_2 = 2 \, (d\eta - \delta d\xi) \left(d\xi - \left(1 + F + (1 + F)^2 \delta \right) d\eta \right) + (1 - \delta) \sum_{k=1}^{n-m} dt_k^2,$$

где $\delta = \delta(\xi, \eta, t_1, \dots, t_k)$ — вещественная функция, такая, что $0 < \delta < 1$ на $\mathbb{R}^{2+n-m}$.

Лемма 5.6. *Имеет место соотношение $g_1 \prec g_2$, при подходящем выборе функции δ. Кроме того, $(\mathbb{R}^{2+n-m}, g_2)$ причинно, следовательно $(\mathbb{R}^{2+n-m}, g_1)$ устойчиво причинно.*

Доказательство. Для любого вектора V имеем

$$g_1(V, V) - g_2(V, V) = 2\delta \left(d\xi^2 + (1 + F)^2 d\eta^2 - \right.$$

$$\left. \left(1 + F + (1 + F)^2 \delta \right) d\xi d\eta + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-m} dt_k^2 \right) (V, V) > 0,$$

если функцию δ выбрать таким образом, что $2(1 + F(p))\delta(p) < 1$ для всех $p \in \mathbb{R}^{2+n-m}$. Значит $g_1(V, V) \le 0$ влечет $g_2(V, V) < 0$ для любого ненулевого вектора V и, значит, $g_1 \prec g_2$.

Далее, пусть $\gamma(s) = (\xi(s), \eta(s), t_1(s), \dots, t_{n-m}(s))$, $0 \le s \le 1$, $\gamma(0) = \gamma(1)$ — замкнутая регулярная непространственноподобная кривая в $(\mathbb{R}^{2+n-m}, g_2)$, направленная в будущее. Следовательно,

$$\dot{\eta} - \delta \, (F) \, \dot{\xi} \ge 0, \tag{5.5}$$

поскольку времениподобный вектор $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ определяет часть светового конуса, направленную в будущее. Пусть $\gamma_1(s) = (\xi(s), \eta(s))$ — замкнутая регулярная проекция кривой $\gamma(s)$ на плоскость $\mathbb{R}^2$. Кривая $\gamma_1(s)$ может иметь самопересечения, но всегда можно рассмотреть замкнутый участок $\gamma_1(s)$ без самопересечения. Далее, на таком замкнутом участке может нарушиться непрерывность функции $\delta(s) = \delta(\gamma(s))$, однако ее можно продеформировать в непрерывную функцию, не изменив экстремальных значений δ на кривой $\gamma(s)$, следующим образом: в окрестности точки разрыва нужно сделать функцию δ меняющейся между левым и правым пределами в точке разрыва. При этом в силу линейности, неравенство (5.5) останется выполненным. Таким образом считаем, что плоская замкнутая кривая $\gamma_1(s)$ самопересечений не имеет.

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ одномерное распределение, заданное вдоль кривой $\gamma_1(s)$:

$$\eta - \delta(s)\xi = 0. \tag{5.6}$$

Поскольку у нас $\delta < 1$, то распределение (5.6) не может совершить «полный оборот» при обходе по кривой γ_1. Следовательно, распределение (5.6) может быть продолжено до непрерывного распределения на всей плоскости, которое интегрируемо. Из неравенства (5.5) следует, что если кривая $\gamma_1(s)$ пересекает трансверсально одну из интегральных линий распределения (6), то она больше его не пересечет — это противоречит замкнутости γ_1. Итак, $(\mathbb{R}^{2+n-2}, g_2)$ не содержит замкнутых непространственноподобных кривых, следовательно является причинным. Так как $g_1 \prec g_2$, то $(\mathbb{R}^{2+n-2}, g_1)$ устойчиво причинно. Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Пространство* $(\mathbb{R}^{2+n-2}, g_1)$ *глобально гиперболично.*

Доказательство. По лемме 5.6 пространство $(\mathbb{R}^{2+n-2}, g_1)$ устойчиво причинно, следовательно сильно причинно. Пусть $p_i = (\xi_i, \eta_i, t_{1i}, \ldots, t_{(n-m)i}) \in \mathbb{R}^{2+n-m}$, $i = 1, 2$. Предположим, что $p \in J^+(p_1) \cap J^-(p_2)$. Тогда существует непространственноподобная регулярная кривая $\gamma(s) = (\xi(s), \eta(s),$

$t_1(s), \ldots, t_{n-m}(s))$, идущая из p_1 в p_2 через точку p. Следовательно касательный вектор γ удовлетворяет неравенствам:

$$\begin{gathered}
\dot\eta \geq 0, \\
\dot\xi - (1 + F(s))\dot\eta \leq 0, \\
\left|\dot F(s)\right| \leq (n-m)\sqrt{2\dot\eta\left((1+F(s))\,\dot\eta - \dot\xi\right)},
\end{gathered} \tag{5.6}$$

где $F(s) = F(\gamma(s))$. Видим, что координата η не убывает вдоль кривой γ. Пусть γ_1 — проекция кривой γ на плоскость $\mathbb{R}^2$. Перепараметризуем кривую γ_1 таким образом, чтобы параметр s был натуральным относительно стандартной евклидовой метрики на $\mathbb{R}^2$.

Далее, так как кривая γ гладкая вплоть до концевых точек, то существует конечное число замкнутых промежутков, разбивающих область определения кривой γ таких, что в каждом промежутке либо $(1+F)\dot\eta + \dot\xi \leq 0$, либо $(1+F)\dot\eta + \dot\xi \geq 0$. Рассмотрим сначала произвольный участок на котором $(1+F)\dot\eta + \dot\xi \leq 0$. Тогда $\dot\xi < 0$ и на рассмотренном участке кривой можно в качестве параметра рассмотреть переменную ξ, $\xi_1' \leq \xi \leq \xi_2'$. Нетрудно подсчитать максимальный наклон по отношению к плоскости $\mathbb{R}^2$, среди тех образующих светового конуса метрики g_1, проекции которых на $\mathbb{R}^2$ удовлетворяют неравенству $(1+F)\dot\eta + \dot\xi \leq 0$. Учитывая, что параметр s натуральный для γ_1, мы получаем:

$$|\dot F(s)| \leq \sqrt{2}(n-m)\frac{\sqrt{2F+2}}{\sqrt{(1+F)^2+1}}.$$

Значит на рассматриваемом участке кривой γ имеет место неравенство

$$\left|\frac{dF}{d\xi}\right| \leq \sqrt{2}\left|\frac{dF}{ds}\right| \leq 2(n-m)\frac{\sqrt{2F+2}}{\sqrt{(1+F)^2+1}}.$$

Интегрируя, получаем:

$$F(\xi) \leq g(\xi),$$

для некоторой функции $g(\xi) \sim |\xi|^{\frac{2}{3}}$ (с точностью до умножения на константу и добавления членов меньшего порядка роста при $|\xi| \to \infty$). Теперь рассмотрим метрику на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$g_3 = 2d\eta\left(d\xi - g(\xi)d\eta\right).$$

Из последнего неравенства следует, что кривая γ_1 на рассматриваемом участке является непространственноподобной относительно метрики g_3. Однако непосредственным интегрированием уравнения световых линий метрики g_3 можно убедиться, что имеются два вида таких линий: $\eta = \mathrm{const}$ и линии, имеющие асимптотику $\xi \sim \eta^3$. Но это означает, что кривая γ_1 не может покинуть некоторой ограниченной области $K \subset \mathbb{R}^2$, зависящей только от начальной пары точек p_1 и p_2.

Теперь рассмотрим один из участков кривой γ, на котором $(1+F)\dot\eta + \dot\xi \geq 0$. Здесь рассмотрим в качестве параметра переменную η. Преобразуем последнее из неравенств (6):

$$\left|\frac{dF}{d\eta}\right| \leq (n-m)\sqrt{2\left((1+F(\xi)) - \frac{d\xi}{d\eta}\right)} \leq 2(n-m)\sqrt{1+F}$$

Интегрируя, получим

$$|F(\eta)| \leq g(\eta),$$

для некоторой функции $g(\eta) \sim \eta^2$ при $\eta \to \infty$. Как и в предыдущем случае проекция γ_1 будет непространственноподобной относительно метрики

$$g_3 = 2d\eta\left(d\xi - g(\eta)d\eta\right)$$

на $\mathbb{R}^2$. Интегрируя, получим световые линии с асимптотикой $\eta = \mathrm{const}$ и $\xi \sim \eta^3$, что опять означает невозможность для кривой γ_1 покинуть некоторую ограниченную область.

Итак, вся кривая γ_1 не может покинуть некоторую ограниченную область K, кроме того из последних неравенств следует, что F ограничено вдоль γ некоторой константой, зависящей только от p_1, p_2. Значит p принадлежит некоторой ограниченной области в R^{2+n-m}, зависящей только от p_1, p_2. Мы получили, что замыкание множества $J^+(p_1) \cap J^-(p_2)$ компактно в сильно причинном пространстве, следовательно пространство глобально гиперболично. Лемма доказана.

Теперь уже несложно закончить доказательство теоремы 5.9. Пространство (N, g_0) изометрично прямому произведению глобально гиперболического пространства $(\mathbb{R}^{2+n-m}, g_1)$ и полного риманова пространства $(M^{n_0} \times C_{m_1} \times \ldots C_{m_r}, \frac{1}{2}g')$, поэтому тоже глобально гиперболично по предложению 5.6. Далее, из лемм 5.5 и 5.6 следует, что $(N, \tilde{g})$ устойчиво причинно, следовательно сильно причинно, по предложению 5.4. Кроме того, замыкание пересечения причинных будущего и прошлого пространства $(N, \tilde{g})$ содержится в соответствующем пересечении (N, g_0), следовательно компактно. Из [16, Гл.3] следует, что $(N, \tilde{g})$ глобально гиперболично.

Литература

[1] Алексеевский Д. В. Римановы многообразия с необычными группами голономии // Функциональный анализ и его приложения. 1968. Т. 2, № 2. С. 1–10.

[2] Базайкин Я. В. О некоторых метриках нулевой кривизны Риччи коодноpодности два на комплексных линейных расслоениях // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45, № 3. С. 497–504.

[3] Базайкин Я. В. Специальные кэлеровы метрики на линейных комплексных расслоениях и геометрия $K3$-поверхностей // Сибирский математический журнал. 2005. Т. 46, № 6. С. 1235–1247.

[4] Базайкин Я. В. О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $Spin(7)$ // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 1. С. 11–32.

[5] Базайкин Я. В., Малькович Е. Г. Метрики с группой голономии G_2, связанные с 3-сасакиевым многообразием // Сибирский математический журнал. 2008. Т. 49, № 1. С. 3–7.

[6] Базайкин Я. В. Некомпактные римановы пространства с группой голономии $Spin(7)$ и 3-сасакиевы многообразия // Геометрия, топология и математическая физика. I, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Труды МИАН. 2008. Т. 263. С. 6–17.

[7] Базайкин Я. В. Глобально гиперболические лоренцевы пространства со специальными группами голономии // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 4. С. 721–736.

[8] Базайкин Я. В., Матвиенко И. В. О четырехмерных T^2-многообразиях положительной кривизны Риччи // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 5. С. 973–979.

[9] Белинский В. А., Халатников И. М. Общее решение уравнений гравитации с физической особенностью // ЖЭТФ. 1969. Т. 57, вып. 6(12). С. 2163–2175.

[10] Белинский В. А., Захаров В. Е. Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи рассеяния и вычисление точных солитонных решений // ЖЭТФ. 1978. Т. 75, вып. 6(12). С. 1953–1971.

[11] Белинский В. А., Захаров В. Е. Стационарные гравитационные солитоны с аксиальной симметрией // ЖЭТФ. 1979. Т. 77, вып. 1(7). С. 3–19.

[12] Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Об однородных по Клиффорду-Вольфу римановых многообразиях // Доклады РАН. 2008. Т. 423, № 1. С. 7–10.

[13] Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.. Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях // Сибирский математический журнал. 2008. Т. 49, № 3. С. 395–407.

[14] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

[15] Бессе А. (под ред.) Четырехмерная риманова геометрия. М.: Мир, 1985.

[16] Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир 1985.

[17] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.

[18] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир. 1982, 1, 2 том.

[19] Каждан Д. Л., Уорнер Ф. У.. Функции-кривизны для открытых двумерных многообразий // Сб. Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980. С. 60–80.

[20] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981, 1,2 том.

[21] Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономии. М.: ИЛ, 1960.

[22] Пенроуз Р. Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.

[23] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

[24] Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.

[25] Alekseevsky D., Isabel Dotti, Ferraris C. Homogeneous Ricci positive 5-manifolds // Pacific Journal of Mathematics. 1996. V.175, N. 1. P.1–12.

[26] Ambrose W., Singer I. M. A Theorem on holonomy // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 75, N. 3. P. 428–443.

[27] Baum H., Muller O. Codazzi Spinors and Globally hyperbolic Lorentzian manifolds with special holonomy I // Preprint ESI 1757, 2005.

[28] Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G., Clifford-Wolf Homogeneous Riemannian manifolds // J. Differ. Geom. (to appear).

[29] Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. Killing vector fields of constant length on locally symmetric Riemannian manifolds // Transform. Groups. 2008. V. 13, N 1. P. 25–45.

[30] Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G. Regular and quasiregular isometric flows on Riemannian manifolds // Siber. Adv. Math. 2008. V. 18, N. 3. P. 153–162.

[31] Berger M. Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variètès Riemanniennes // Bull. Soc. Math. France. 1955. V. 83. P. 279–330.

[32] Bérard-Bergery L. Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein // Publications de l'Institut E. Cartan. 1982. N 4 (Nancy). P. 1–60.

[33] Berard-Bergery L., Ikemakhen A. On the holonomy of Lorentzian manifolds // In: Differential Geometry: Geometry in Mathematical Physics and Related Topics., Proc. Sympos. Pure Math. 1993. V. 54. P. 27–40.

[34] Boyer C., Galicki K. 3-Sasakian manifolds // Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds, Surv. Differ. Geom., VI, Int. Press, Boston, MA. 1999. P. 123–184,

[35] Boyer C. P., Galicki K., Mann B. M. The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds // J. Reine angrew. Math. 1994. V. 455. P. 183–220.

[36] Borel A., Lichnerowicz A. Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1952. V. 234. P. 1835–1837.

[37] Brown R., Gray A. Riemannian manifolds with holonomy group $Spin(9)$ // In S. Kobayashi et al., editors, Differential Geometry (in honourof Kentaro Yano), P. 41–59, Tokiyo,1972. Kinokuniya.

[38] Bryant R. Metrics with exceptional holonomy // Ann. of Math. (2). 1987. V. 126, N. 3. P. 525–576.

[39] Bryant R. Classical, exceptional and exotic holonomies: a status report // Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle en l'Honneur de Marcel Berger . Collection SMF Séminaires and congrès 1 (Soc. math. de France), 1996, P. 93–166.

[40] Bryant R. L., Salamon S. L. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy // Duke Math. J. 1989. V. 58, N. 3. P. 829–850.

[41] Calabi E. Metriques kahleriennes et fibres holomorphes // Ann. Ecol. Norm. Sup. 1979. V. 12. P. 269–294.

[42] Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. I & II // Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. 1923. V. 40. P. 325–412 et 1924. V. 41. P. 1–25 ou Oeuvres complètes, tome III, P. 659–746 et P. 799-824.

[43] Cartan E. La géométrie des espaces de Riemann // Mémorial des Sciences Mathématiques. Paris, Gauthier-Villars. 1925. V. 5.

[44] Cartan E. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann // Bull. Soc. Math. France. 1926. V. 54. P. 214–264, 1927. V. 55. P. 114–134 ou Oeuvres complètes, tome I, V. 2. P. 587–659.

[45] Cartan E. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés // Acta Math. 1926. V. 48. P. 1–42 ou Oeuvres complètes. Tome III. V. 2. P. 997–1038.

[46] Cortés V. Alekseevskian spaces // Diff. Geom. Appl. 1996. V. 6. P. 129–168.

[47] Davis M. W., Januszkiewicz T. Convex polytopes, coxeters orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. V. 62, N. 2. P. 417–451.

[48] Eguchi T., Hanson A. J. Asymptotically flat self-dual solutions to euclidean gravity // Physics Letters B. 1978. V. 74, N. 4. P. 249–251.

[49] Eschenburg J. H.. Inhomogeneous spaces of positive curvature // Diff. Geom. Appl. 1992. V. 2, N. 2. P. 123–132.

[50] Galaev A. Metrics that realize all types of Lorentzian holonomy algebras // arXiv:mathDG/0502575, 2005.

[51] Geroc R. P.. Domain of dependence // J. Math. Phys. 1970. V. 11. P. 437–449.

[52] Gibbons G. W., Hawking S. W. Gravitational multi-instantons // Physics letters B. 1978. V. 78, N. 4. P. 430–432.

[53] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. New Complete Non-compact $Spin(7)$ Manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 620, N. 1–2. P. 29–54.

[54] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. New Cohomogeneity One Metrics With $Spin(7)$ Holonomy // J. Geom. Phys. 2004. V. 49, N. 3–4. P. 350–365.

[55] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. Cohomogeneity One Manifolds of $Spin(7)$ and $G(2)$ Holonomy // Phys. Rev. D. 2002. V. 65, N. 10. 29 p.

[56] Gray A. Weak holonomy groups // Math. Z. 1971. V. 123. P. 290–300.

[57] Gukov S., Sparks J. M-Theory on $Spin(7)$ Manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 625, N. 1–2. P. 3–69.

[58] Hawking S. W. The existence of cosmic time functions // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1968. V. 308. P. 433–435.

[59] Hertz H. Die Prinzipien der Mechanik, in neuen Zusammenhängen dargestellt. 1895. — Русский перевод: Герц Г. Р. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд. АН СССР, 1959.

[60] Hitchin N. J. Polygons and gravitons // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1979. V. 85. P. 465–476.

[61] Iwamoto H. On the structure of Riemannian spaces whose holonomy fix a null system // Tohoku Math. J. 1950. V. 1. P. 109–135.

[62] Jensen G. R. Homogeneous Einstein spaces of dimension 4 // J. Differential Geom. 1969. V. 3. P. 309–349.

[63] Joyce D. D. Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. I and II // J. Differentional Geometry. 1996. V. 43, N. 2. P. 291–328. P. 329-375.

[64] Joyce D. D. Compact 8-manifolds with holonomy $Spin(7)$ // Inv. Math. 1996. V. 123. P. 507–552.

[65] Joyce D. Compact manifolds with special holonomy. Oxford Science Publications, 2000.

[66] Kanno H., Yasui Y. On $Spin(7)$ holonomy metric based on $SU(3)/U(1)$ // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, N. 4. P. 293–309.

[67] Kanno H., Yasui Y. On $Spin(7)$ holonomy metric based on $SU(3)/U(1)$: II // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, N. 4. P. 310–326.

[68] A. Kovalev. Twisted connected sums and special Riemannian holonomy // J. Reine Angew. Math. 2003. V. 565. P. 125–160.

[69] LeBrun C., Singer M. A Kummer-type construction of self dual 4-manifolds // Mathematische Annalen. 1994. V. 300. P. 165–180.

[70] Leistner T. On the classification of Lorentzian holonomy groups // Jour. Diff. Geom. (to appear).

[71] Newlander A., Nirenberg L. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds // Ann. of Math. 1957. V. 65. P. 391–404.

[72] Nikonorov Yu. G.. Classification of invariant Einstein metrics on the Aloff-Wallach spaces // Siberian Advances in Math. 2003. V.13, N 4. P. 70–89.

[73] Orlik P., Raymond F. Actions of the torus on 4-manifolds // I. Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 152, N. 2. P. 531–559.

[74] Page D. N. A physical picture of the $K3$ gravitational instanton // Physics Letters B. 1978. V. 80, N. 1–2. P. 55–57.

[75] Page D., Pope C. Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles // Classical and Quantum Gravity. 1987. V. 4. P. 213–225.

[76] Penrose R. Techniques of Differential Topology in Relativity // Regional conference series in Applied math. 7. SIAM. Philadelfia, 1972.

[77] de Rham G. Sur la reductibilité d'un espace de Riemann // Comm. Math. Helv. 1952. V. 26. P. 328–344.

[78] Rodionov E. D. Einstein metrics on a class of 5-dimensional homogeneous spaces // Comm. Math. Univ. Carolinae. 1991. V. 32, N. 2. P. 389–393.

[79] Salamon S. M. Quaternionic Käler manifolds // Inventiones mathematicae. 1982. V. 67. P. 143–171.

[80] Salamon S. M. Quaternion-Käler geometry // In C. LeBrun and M. Wang, editors, Essays on Einstein manifolds, Vol. V of Surveys in Differential Geometry, International Press. 2000. P. 83–122.

[81] Satake I. The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds // J. Math. Soc. Japan. 1957. V. 9, N. 4. P. 464–476.

[82] Schwachhöfer L. J. Holonomy. Review, 2008.

[83] Seifert H.-J. The causal boundary of space-times // Zs. f. Naturforsche. A. 1967. V. 22. P. 1356–1360.

[84] Sha J., Yang D. Positive Ricci curvature on compact simply connected 4-manifolds // Differential geometry. Part 3: Riemannian geometry. Providence, RI: American Mathematical Society. Proc. Symp. Pure Math. 1993. V. 54, Part 3. P. 529–538.

[85] Topiwala P. A new proof of the existence of Kähler-Einstein metrics on K3. I // Inventiones mathematicae. 1987. V. 89. P. 425–448.

[86] Wakakuwa H. Holonomy groups. Public. Study Group of Geometry, 6 Okayama Univ., Okayama, 1971.

[87] Wang M. Einstein metrics from symmetry and bundle constructions // Surveys in differential geometry, VI: essays on Einstein manifolds, Int. Press, Boston, MA, 1999. P. 287–325.

[88] Wang M., Ziller W. Einstein metrics on principal bundles // J. Differential Geom. 1990. V.31. P. 215–261.

[89] Wilking B. On compact Riemannian manifolds with noncompact holonomy groups // J. Diff. Geom. 1999. V. 52, N. 2. P. 223–257.

[90] Wu H. On the de Rham decomposition theorem // Illinois. J. Math. 1964. V. 8. P. 291–311.

[91] Yau S.-T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equations // I. Communications on pure and applied mathematics. 1978. V. 31. P. 339–411.