НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Базайкин
Ярослав Владимирович

УДК 515.165.7

Двойные частные групп Ли положительной секционной кривизны

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

научный руководитель —
доктор физико- математических
наук И. А. Тайманов

Содержание

0 Введение

Одной из важных задач римановой геометрии является исследование геометрических и топологических свойств римановых пространств положительной секционной кривизны. Естественным образом, топологический аспект проблемы распадается на два направления: изучение топологических свойств односвязных пространств положительной секционной кривизны, и изучение свойств фундаментальных групп таких пространств. Дадим, сначала, краткий обзор и опишем результаты предлагаемой диссертации в первом направлении.

Известно очень мало примеров односвязных римановых многообразий положительной секционной кривизны, а именно:

1) классическими примерами являются компактные ранга 1 симметрические пространства, т. е. сферы S^n, комплексные проективные пространства $\mathbf{C}P^n$, кватернионные проективные пространства $\mathbf{H}P^n$ и проективная плоскость Кэли $\mathbf{C}aP^2$. Отметим, что перечисленные примеры исчерпывают известные топологические типы пространств положительной секционной кривизны в размерностях > 24;

2) все классические пространства положительной секционной кривизны являются нормально однородными, что навело на мысль провести исследование в классе таких пространств; это исследование было предпринято Берже [1], который взялся описать все нормально однородные пространства положительной секционной кривизны и обнаружил два новых "исключительных пространства"вида $\mathrm{Sp}(2)/SU(2)$ и $SU(5)/\mathrm{Sp}(2) \times S^1$ размерности 7 и 13, соответственно (причем вложение $SU(2) \subset \mathrm{Sp}(2)$ не является стандартным). Однако, в работе Берже была допущена неточность, в силу которой им было выпущено еще одно нормально однородное пространство положительной секционной кривизны в размерности 7 вида $SO(3) \times SU(3)/U(2)$ (это пространство диффеоморфно пространству Алоффа-Уоллаха $N_{1,1}$, см. ниже). Ошибка была найдена и исправлена недавно, в работе Вилкинга [2]. При этом Вилкинг нашел на $N_{1,1}$ 1-параметрическое семейство нормально однородных метрик положительной секционной кривизны — это единственный пример с таким свойством;

3) Уоллах показал, что все четномерные однородные односвязные замкнутые многообразия с метриками положительной кривизны исчерпываются нормально однородными многообразиями и многообразиями флагов над $\mathbf{C}P^2$, $\mathbf{H}P^2$ и $\mathbf{C}aP^2$ (их размерности равны 6, 12 и 24, соответственно) [3];

4) Алофф и Уоллах [4] указали бесконечную серию пространств $N_{p,q}$ вида $SU(3)/S^1$, где подгруппа S^1 является обмоткой максимального тора группы $SU(3)$ и тем самым определяется двумя взаимно простыми целочисленными параметрами p и q. При выполнении некоторых условий на p и q на этих пространствах существует левоинвариантная однородная риманова метрика положительной кривизны. Берард Бержери [5] показал, что пространства Алоффа — Уоллаха исчерпывают все нечетномерные замкнутые односвязные многообразия с однородными (но не нормально однородны-

ми) римановыми метриками положительной кривизны, а Крек и Штольц обнаружили среди них пару гомеоморфных, но не диффеоморфных многообразий ($N_{-56788,5227}$ и $N_{-42652,61213}$) [6];

5) используя конструкцию Алоффа и Уоллаха, Эшенбург нашел бесконечную серию семимерных пространств с неоднородными метриками положительной кривизны [7], а в дальнейшем построил и шестимерный пример неоднородного пространства с метрикой положительной кривизны [8].

Этот список исчерпывает известные к настоящему времени топологические типы односвязных замкнутых многообразий, допускающих метрики положительной секционной кривизны. Заметим, что размерность 13 среди указанных имеют только два многообразия — сфера S^{13} и нормально однородное пространство Берже $SU(5)/\operatorname{Sp}(2) \times S^1$.

При построении своих пространств Эшенбург использовал понятие *двойного частного группы Ли* — естественного обобщения однородного пространства, которое, вкратце, состоит в следующем.

Рассмотрим группу Ли G и подгруппу Ли U в $G \times G$. Зададим действие U на G:

$$U \ni (g_1, g_2) : g \in G \to g_1 g g_2^{-1} \in G.$$

Рассмотренное действие может иметь неподвижные точки. Положим $U' = \{(g_1, g_2) \in U | g_1 \in Ad(G) g_2\}$. Тогда легко увидеть, что свободность рассмотренного действия, равносильна условию $U' = \{(1, 1)\}$, где $1 \in G$ — единица группы G.

Если действие свободно и изометрично относительно некоторой римановой метрики на G, то каноническим образом возникает фактормногообразие G/U, называемое двойным частным группы Ли G (в случае, если $U = H \times K$, где $H, K \subset G$, то двойное частное обозначают $H \backslash G / K$). Впервые конструкция двойного частного группы Ли возникла в работе Громолла и Майера [9] для построения метрики неотрицательной секционной кривизны на одной экзотической сфере Милнора.

Одним из основных результатов предлагаемой диссертации является конструкция новой серии односвязных замкнутых 13-мерных римановых многообразий, допускающих метрику строго положительной секционной кривизны. Построенные многообразия являются двойными частными группы Ли $U(5)$. А именно, в первой главе работы доказана следующая теорема (она следует из Теорем 1, 2 и 3 Главы 1):

Теорема A. *Пусть $U(5)$ — группа комплексных унитарных 5×5-матриц, а группа $U(4) \times U(1)$ вложена в нее как подгруппа, состоящая из матриц блочного вида с двумя блоками размеров 4×4 и 1×1. Пусть M^{25} — однородное риманово многообразие, диффеоморфное $U(5)$ и наделенное метрикой, индуцированной из двусторонне-инвариантной метрики на $U(5) \times U(4) \times U(1)$ при проекции*

$$U(5) \times U(4) \times U(1) \to U(5) \times U(4) \times U(1)/U(4) \times U(1) = M^{25},$$

где вложение $U(4) \times U(1) \to U(5) \times U(4) \times U(1)$ диагонально ($g \mapsto (g, g) \in U(5) \times (U(4) \times U(1))$).

Пусть $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_5)$ *такой набор целых положительных чисел, что для всех подстановок* $\sigma \in S_5$ *выполняются следующие условия:*

a) $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} - p_{\sigma(3)} - p_{\sigma(4)}$ *взаимно просто с* $p_{\sigma(5)}$,

b) $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} + p_{\sigma(3)} > p_{\sigma(4)} + p_{\sigma(5)}$,

c) $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} + p_{\sigma(3)} + p_{\sigma(4)} > 3p_{\sigma(5)}$,

d) $3(p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)}) > p_{\sigma(3)} + p_{\sigma(4)} + p_{\sigma(5)}$.

Пусть $M_{\bar{p}}$ *— фактор-многообразие, полученное из* M^{25} *относительно факторизации по действию группы* $S^1 \times (\ Sp(2) \times S^1)$ *вида*

$$(z_1, (A, z_2)) : X \to \ diag\big(z_1^{p_1}, z_1^{p_2}, z_1^{p_3}, z_1^{p_4}, z_1^{p_5}\big) \cdot X \cdot \left(\begin{array}{c|c} A^* \bar{z}_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right),$$

где $X \in M^{25}$, $z_1, z_2 \in S^1$, $A \in \ Sp(2)$. *Тогда* $M_{\bar{p}}$, *оснащенное метрикой, индуцированной факторизацией* $M^{25} \to M_{\bar{p}}$, *обладает следующими свойствами:*

1) пространство $M_{\bar{p}}$ *односвязно и* $\dim M_{\bar{p}} = 13$*;*

2) пространство $M_{\bar{p}}$ *имеет положительную секционную кривизну;*

3) пространство $M_{\bar{p}}$ *имеет группы когомологий*

$$H^i = \begin{cases} \mathbf{Z} & n\ i = 0, 2, 4, 9, 11, 13, \\ 0 & n\ i = 1, 3, 5, 7, 10, 12; \end{cases}$$

группы H^6 *и* H^8 *конечны и их порядок равен* $\left|\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3\right|$, *где* σ_k *— значение элементарного симметрического полинома* k*-й степени от пяти переменных в точке* $(p_1, \ldots, p_5)$.

Условия a)–d) выполняются, например, при $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = q^n$, где q — простое число. В этом случае порядок группы $H^6(M_{\bar{p}})$ равен $r(q,n) = 8q^{2n} - 4q^n + 1$ и $r(q,n) \to \infty$ при $q \to \infty$ или $n \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что существует бесконечно много попарно негомеоморфных замкнутых односвязных 13-мерных римановых многообразий вида $M_{\bar{p}}$ положительной секционной кривизны.

Существуют и другие серии, простейшую конструкцию которых указал нам У. Абреш. А именно, возьмем пятерку чисел, для которых выполняется условие a) теоремы A (заметим, что под взаимной простотой мы понимаем равенство единице наибольшего общего делителя) и ни одно из чисел $|p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} - p_{\sigma(3)} - p_{\sigma(4)}|$ не равно нулю, и будем добавлять ко всем числам $p_1, \ldots, p_5$ натуральное число $a_n = n \cdot \prod\limits_{\sigma \in S_5} |p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} - p_{\sigma(3)} - p_{\sigma(4)}|$. Как легко заметить, существует такое достаточно большое число N, что при всех $n > N$ пятерки $(p_1 + a_n, \ldots, p_5 + a_n)$ удовлетворяют условиям b)–d) и они всегда удовлетворяют условию a). Например, в качестве начальной пятерки можно взять $(1, 1, 1, 2q, 4q)$, q — любое натуральное число.

Можно заметить, что при $p_1 = p_2 = \ldots = p_5 = 1$ мы получаем пространство, диффеоморфное 13-мерному примеру Берже. Однако метрика нашего пространства при $p_i = 1$, $i = 1, \ldots, 5$ хотя и является однородной, все же существенно "лучше"нормально однородной метрики Берже. В работе [10] Путтманн посчитал защемленность 1-параметрического семейства метрик на пространстве Берже: построенная в предлагаемой работе метрика имеет защемленность $1/64$, в то время как защемленность метрики Берже посчитана Хайнтцем в [11] и равна $16/(29 \cdot 37)$. Отметим здесь же, что максимальная защемленность рассмотренного Путтманном семейства равна $1/37$.

В связи с этим кругом вопросов стоит отметить связь между пространством Алоффа-Уоллаха $N_{1,1}$ и пространством Берже, найденную Таймановым в [12]. Он описал вполне геодезическое вложение пространства $N_{1,1}$ в пространство Берже, при котором максимальное и минимальное значения секционных кривизн пространства Берже достигаются на двумерных площадках, касательных к вложенному подмногообразию. Это объяснило совпадение защемленностей пространства Берже и пространства $N_{1,1}$ (защемленность последнего пространства была посчитана Хуангом в [13]). В свете конструкции Тайманова вычисления Путтманна показывают существование однородной метрики на $N_{1,1}$ с защемленностью $1/37$.

Структура Главы 1 следующая. В параграфе 1.1 строится однородная метрика на $U(5)$ (отличная от двусторонне инвариантной) и определяется свободное изометрическое действие группы $S^1 \times (Sp(2) \times S^1)$. В целом, при построении метрики мы следуем методам, предложенным в [8]. При этом основным инструментом построения метрик выступает риманова субмерсия, впервые описанная и изученная О'Нилом в [14]. В параграфе 1.2 исследуется знак секционной кривизны построенных пространств $M_{\bar{p}}$. Основную роль здесь играет формула О'Нила [14], ввиду которой достаточно проконтролировать площадки нулевой секционной кривизны в $U(5)$. Отметим, что при доказательстве положительности кривизны способ, предложенный в [8], связан с определенными трудностями, которые преодолеваются с помощью леммы 8. Наконец, в параграфе 1.3 исследуется топология построенных пространств: устанавливается односвязность и вычисляются группы когомологий. Основным инструментом вычислений здесь выступает спектральная последовательность расслоения.

В рамках изучения геометрических свойств пространств положительной секционной кривизны в Главе 2 диссертации исследована интегрируемость геодезического потока на двойных частных групп Ли.

Сначала дадим краткий обзор по этому вопросу. Пусть M — риманово многообразие размерности n. Геодезический поток на T^*M *вполне интегрируем*, если существуют n первых интегралов $f_1, \ldots, f_n : T^*M \to \mathbf{R}$, которые независимы почти всюду в T^*M и находятся в инволюции, то есть $\{f_i, f_j\} = 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$, относительно стандартной симплектической структуры на T^*M.

Новый метод интегрирования геодезического потока на однородных пространствах был найден Тиммом [15], успешно применившим его к комплексным и вещественным грассмановым многообразиям. Опишем суть метода Тимма. Если группа Ли G с алгеброй Ли $\mathbf{g}$ действует на многообразии M изометриями, то возникает отображение момента $\Phi : TM \to \mathbf{g}^*$. Тогда любая $Ad(G)$-инвариантная функция f на $\mathbf{g}^*$ дает первый интеграл $f \circ \Phi$ геодезического потока на M, причем все такие интегралы будут находится в инволюции. Тимм предложил рассмотреть цепочку вложенных подгрупп $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n = G$ и рассматривать первые интегралы, получающиеся из $Ad(G_i)$-инвариантных полиномов на $\mathbf{g}_i^*$. Все такие интегралы будут находиться в инволюции. Однако доказательство функциональной независимости в методе Тимма явилось очень непростой задачей, которая не была разрешена в его работе в общей ситуации.

В [16] Патернайн и Спатцир применили метод Тимма к пространствам Эшенбурга $M_{1,-1,2m,2m}$ и к сфере Громолла-Майера Σ^7, которые не являются однородными, а получаются как двойные частные групп Ли (для пространств Эшенбурга $G = SU(3), U = U(1)$, для сферы Громолла-Майера $G = Sp(2), U = Sp(1)$). Патернайн и Спатцир для построения первых интегралов геодезического потока на двойных частных $SU(3)/U(1)$ и $Sp(2)/Sp(1)$ сначала применили метод Тимма к $SU(3)$ и $Sp(2)$, а затем использовали римановы субмерсии $SU(3) \to M_{1,-1,2m,2m}$ и $Sp(2) \to \Sigma^7$.

Отметим, что в [16] была показана интегрируемость геодезического потока на пространствах, диффеоморфных пространствам Эшенбурга, но не изометричных им. В частности, на пространствах, рассмотренных в [16] секционная кривизна не является положительной.

В главе 2 предпринято исследование интегрируемости геодезического потока на двойных частных групп Ли общего вида $H\backslash G/K$, причем основной трудностью явилось определение числа функционально независимых интегралов, возникающих из метода Тимма. Для этого в диссертации введено понятие *ранга цепочки вложенных подалгебр* , которое описано ниже.

Пусть $\mathbf{g}$ — алгебра Ли, $X \in \mathbf{g}$. Положим

$$N_{\mathbf{g}}(X) = Z(\ \mathrm{Ker}(\ \mathrm{ad}(X)))$$

(через $Z(\mathbf{h})$ мы обозначаем центр алгебры Ли $\mathbf{h}$). Роль подалгебры $N_{\mathbf{g}}(X)$ раскрывается в Лемме 17 , которая является узловым моментом в Главе 2: подалгебра $N_{\mathbf{g}}$ оказывается пространством градиентов в точке X всех $Ad(G)$-инвариантных полиномов на $\mathbf{g}$.

Пусть имеется пара алгебр Ли $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$, $\mathbf{h} \subset \mathbf{g}$. Пусть $\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{p}$ — ортогональное разложение относительно $Ad(G)$-инвариантной метрики на $\mathbf{g}$. Предположим, что имеется векторное подпространство $\mathbf{v} \subset \mathbf{g}$. Положим

$$rank((\mathbf{g}, \mathbf{h}), \mathbf{v}) = \max_{X \in \mathbf{v}} \dim(pr_{\mathbf{p}}(N_{\mathbf{g}}(X))),$$

где $pr_{\mathbf{p}} : \mathbf{g} \to \mathbf{p}$ — ортогональная проекция. Число $rank((\mathbf{g}, \mathbf{h}), \mathbf{v})$ назовем рангом пары $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ относительно пространства $\mathbf{v}$.

Пусть, теперь, дана цепочка вложенных подалгебр Ли

$$\mathbf{g}_0 \subset \mathbf{g}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{g}_n,$$

и подпространство $\mathbf{v} \subset \mathbf{g}_n$. Обозначим через $pr_i : \mathbf{g}_n \to \mathbf{g}_i$ ортогональную проекцию.

Число

$$rank(\{\mathbf{g}_i\}_{i=0}^n, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{n-1} rank((\mathbf{g}_{i+1}, \mathbf{g}_i), pr_{i+1}(\mathbf{v}))$$

будем называть рангом цепочки $\{\mathbf{g}_i\}_i$ вложенных подалгебр.

Основным результатом второй главы является следующая теорема (содержащаяся в Главе 2 как Теорема 4):

Теорема Б.

Рассмотрим $M = H \backslash G/K$ — двойное частное группы G. Положим

$$\mathbf{v} = (\mathbf{h} + \mathbf{k})^{\perp} \subset \mathbf{g},$$

где $\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{k}$ — алгебры Ли групп G, H, K и ортогональное дополнение берется относительно двусторонне инвариантной метрики на G.

Пусть существуют цепочки вложенных алгебр Ли:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \subset \ldots \subset \mathbf{h}_l = \mathbf{g},$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 \subset \ldots \subset \mathbf{k}_m = \mathbf{g},$$

и $r_1 = rank(\{\mathbf{h}_i\}_i, \mathbf{v})$, $r_2 = rank(\{\mathbf{k}_i\}_i, \mathbf{v})$, $r_3 = rank(G)$.

Тогда для геодезического потока на M существует по крайней мере $r_1 + r_2 - r_3$ функционально независимых первых интегралов, находящихся в инволюции.

В качестве приложения этой теоремы мы доказываем интегрируемость геодезического потока на пространствах Эшенбурга положительной кривизны, построенных в [8] и на 13-мерных пространствах положительной кривизны, построенных и изученных в Главе 1.

Опишем структуру Главы 2. В параграфе 2.1 описан собственно метод Тимма. В параграфе 2.2 введено пространство $N_{\mathbf{g}}(X)$ и доказана упомянутая выше Лемма 17. При ее доказательстве существенную роль играют факты из теории полиномов, инвариантных относительно групп, порожденных отражениями. Основной работой в этом направлении явилась для нас статья Шевалле [17]. Однако для наших целей потребовалось некоторое усиление результатов Шевалле, которое мы проделали в Приложении А (теорема о функциональной независимости в регулярных точках базиса инвариантных полиномов). В параграфе 2.3 вводится определение ранга цепочки вложенных подалгебр и устанавливаются некоторые оценки снизу на ранг, достаточные для приложений. В параграфе 2.4 доказывается основная теорема о числе независимых интегралов на двойных частных групп Ли (Теорема 4). Наконец, в параграфе 2.5 рассмотрены наши основные два примера в качестве приложения: 7-мерные пространства Эшенбурга и 13-мерные пространства автора, построенные в Главе 1. На всех этих пространствах показана интегрируемость геодезического потока по отношению к метрикам положительной кривизны.

Обсудим теперь другое направление исследований — изучение свойств фундаментальной группы многообразия положительной секционной кривизны. Теорема Синга, из которой следует, что фундаментальная группа четномерного многообразия положительной кривизны либо единичная, либо $\mathbf{Z}_2$, а также Теорема Майерса, гарантирующая конечность фундаментальной группы пространства положительной кривизны, наводят на мысль, что положительная кривизна накладывает сильные ограничения на фундаментальную группу. Известная гипотеза Чженя [18] состоит в следующем:

верно ли, что у замкнутого многообразия положительной секционной кривизны все абелевы подгруппы фундаментальной группы цикличны?

По-видимому, гипотеза основывалась на том, что это верно для групп изометрий сфер и фундаментальных групп многообразий отрицательной кривизны.

Шанкар, в работе [19], определил свободное изометрическое действие группы Ли $SO(3)$ на пространстве Алофф-Уоллаха $N_{1,1}$ уже не раз упоминавшемся выше. При этом Шанкаром была рассмотрена нормально однородная метрика, найденная Вилкингом. Следовательно, любая конечная подгруппа в $SO(3)$ может быть реализована как фундаментальная группа некоторого 7-мерного многообразия положительной секционной кривизны. Подгруппа диагональных матриц в $SO(3)$, изоморфная $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ явилась первым контрпримером к гипотезе Чженя. Однако других подгрупп вида $\mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p$ в группе $SO(3)$ нет, поэтому вопрос о реализуемости группы $\mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p$ как подгруппы фундаментальной группы многообразия положительной секционной кривизны оставался до сих пор неясным, и Шанкаром в его работе была выдвинута гипотеза о несуществовании таких подгрупп.

В Главе 3 предлагаемой диссертации описывается свободное изометрическое действие группы $\mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$ на 7 -мерном пространстве Алоффа-Уоллаха $N_{1,1}$ (в представлении Вилкинга) положительной секционной кривизны (Теорема 5).

Отсюда, опровергая предположение Шанкара, следует

Теорема B. *Существует замкнутое риманово многообразие положительной секционной кривизны с фундаментальной группой* $\mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$. [1]

Автор благодарит научного руководителя И. А. Тайманова за постановку задачи и полезные советы.

1 Неоднородные 13-мерные пространства положительной секционной кривизны.

1.1 Построение пространств $M_{\bar{p}}$

1. Риманова субмерсия и ее свойства. Пусть M, N — римановы многообразия, $f : M \to N$ — гладкое отображение. Отображение f называется *субмерсией*, если f сюръективно (т. е. $f(M) = N$) и для каждой точки $x \in M$ отображение $d_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ является эпиморфизмом. Тогда в каждой точке касательное пространство к M каноническим образом разлагается в прямую сумму двух подпространств $T_xM = (T_xM)^v \oplus (T_xM)^h$, где

$$(T_xM)^v = T_xK, \quad K = f^{-1}(f(x)),$$

а $(T_xM)^h$ — ортогональное дополнение к $(T_xM)^v$. Эти подпространства называются соответственно вертикальным и горизонтальным. Очевидно, что $d_xf|_{(T_xM)^h} : (T_xM)^h \to T_{f(x)}N$ — изоморфизм. Если этот изоморфизм сохраняет метрику, то отображение f называется *римановой субмерсией.*

Следующая лемма дает основную конструкцию, доставляющую примеры римановых субмерсий.

Лемма 1 *Пусть G — группа изометрий, свободно действующая с замкнутыми орбитами на римановом многообразии M. Тогда на пространстве орбит N можно ввести структуру риманова многообразия такую, что естественная проекция $\pi : M \to N$ будет римановой субмерсией.*

В случае римановых субмерсий кривизны многообразий M и N связаны соотношением, найденным в работе [14]. Мы ограничимся лишь его следствием, необходимым нам в дальнейшем.

Лемма 2 *Пусть $\pi : M \to N$ — риманова субмерсия. Рассмотрим $x \in M$, $y \in N$, $\pi(x) = y$. Если σ^* — двумерная горизонтальная плоскость в T_xM и $\sigma = d_x\pi(\sigma^*)$, то*

$$K(\sigma) \geq K(\sigma^*).$$

Доказательство следующей леммы можно найти, например, в [20].

[1] Как стало известно автору, это многообразие было независимо построено Грове и Шанкаром

Лемма 3 *Пусть G — группа Ли с двусторонне инвариантной метрикой $\langle\,,\rangle$, $\mathbf{g}$ — касательное пространство в единице, наделенное структурой алгебры Ли. Тогда для всех $X, Y \in \mathbf{g}$ секционная кривизна в направлении $Span(X, Y)$ равна*

$$K(X,Y) = \frac{1}{4}\langle [X,Y], [X,Y]\rangle.$$

2. Нормальная однородная метрика на $U(5)$. В этом пункте мы строим риманову метрику на группе $U(5)$, а в следующем определяем свободные действия группы $S^1 \times (\mathrm{Sp}(2) \times S^1)/Z_2$ на $U(5)$, изометричные относительно этой метрики. Сама конструкция данной вспомогательной метрики на $U(5)$ дает нам пример римановой субмерсии. Более того, искомые метрики на пространствах орбит действий $S^1 \times (\mathrm{Sp}(2) \times S^1)/Z_2$ на $U(5)$ будут построены по данной с помощью леммы 1. В этих построениях мы следуем статье [8].

Пусть G — группа Ли $U(5)$, $K = U(4) \times U(1)$ — стандартно вложенная подгруппа Ли в G. Рассмотрим на группе G обычную двусторонне инвариантную риманову метрику $\langle\ ,\ \rangle_0$:

$$\langle X, Y\rangle_0 = \ \mathrm{Re}\ \ \mathrm{trace}(XY^*) \text{ для } X, Y \in \mathbf{u}(5).$$

Она каноническим образом индуцируется на K и на $G \times K$. Полученные метрики мы также будем обозначать через $\langle\,,\rangle_0$.

Пусть $\triangle K = \{(k,k) \mid k \in K\}$ — подгруппа в $G \times K$. Рассмотрим действие $\triangle K$ на $G \times K$ правыми сдвигами:

$$((g,k),k') \longmapsto (gk', kk') \ \text{ для } \ g \in G,\ k, k' \in K.$$

Очевидно, что это свободное действие изометриями. По лемме 1 существует метрика на пространстве орбит $(G \times K)/\triangle K$ такая, что естественная проекция

$$\pi : G \times K \to (G \times K)/\triangle K$$

будет римановой субмерсией. Можно увидеть, что соответствие $(g,k) \to gk^{-1}$ устанавливает диффеоморфизм между $(G \times K)/\triangle K$ и G. Перенеся с помощью этого диффеоморфизма риманову метрику с пространства орбит $(G \times K)/\triangle K$ на пространство G, мы получим метрику $\langle\ ,\ \rangle$ на G. При этом отображение

$$\pi : G \times K \to G : (g,k) \longmapsto gk^{-1}$$

является римановой субмерсией.

Рассмотрим в группе $G \times K$ левый сдвиг на элемент (g, k^{-1}), где $g \in G$, $k \in K$. Так как метрика $\langle\ ,\ \rangle_0$ двусторонне инвариантна, это отображение будет изометрией. Кроме того, левый сдвиг сохраняет слои субмерсии π, поэтому на G индуцируется отображение

$$g' \longmapsto gg'k : G \to G,$$

которое является изометрией. Итак, *метрика $\langle\,,\rangle$ левоинвариантна относительно G и правоинвариантна относительно K.*

Пусть $\mathbf{k} = \mathbf{u}(4) \oplus \mathbf{u}(1)$ и $\mathbf{g} = \mathbf{u}(5)$ — касательные алгебры групп G и K. Обозначим через $\mathbf{p}$ ортогональное дополнение $\mathbf{k}$ в $\mathbf{g}$ относительно метрики $\langle\ ,\ \rangle_0$. Тогда разложение $\mathbf{g} = \mathbf{k} \oplus \mathbf{p}$ инвариантно относительно $\mathrm{Ad}(K)$. Кроме того, G/K — симметрическое пространство CP^4, поэтому

$$[\mathbf{k}, \mathbf{k}] \subset \mathbf{k}, \quad [\mathbf{p}, \mathbf{p}] \subset \mathbf{k}, \quad [\mathbf{k}, \mathbf{p}] \subset \mathbf{p}. \tag{1}$$

Вертикальное подпространство субмерсии π в точке (e, e) — это

$$V = \{(Z, Z) \mid Z \in \mathbf{k}\} = \triangle\mathbf{k}.$$

Поэтому $(X, Y) \in \mathbf{g} \oplus \mathbf{k}$ лежит в горизонтальном подпространстве H, если

$$\langle (X, Y), (Z, Z) \rangle_0 = 0 \ \text{ для всех } Z \in \mathbf{k},$$

что влечет выполнение следующих условий:

$$\langle X, Z \rangle_0 + \langle Y, Z \rangle_0 = 0, \quad \langle X + Y, Z \rangle_0 = 0 \ \text{ для всех } Z \in \mathbf{k}.$$

Заметим, что в этом случае $X + Y \in \mathbf{p}$, т. е. $X_k + Y_k = 0$ и $Y = Y_k = -X_k$. Отсюда выводим, что

$$H = \{(X_k + X_p, -X_k) \mid X_k \in \mathbf{k},\ X_p \in \mathbf{p}\}$$

и $d_{(e,e)}\pi|_H : H \to \mathbf{g}$ — изометрия.

Так как $d_{(e,e)}\pi(X, Y) = X - Y$, то для всех $X \in \mathbf{g}$ выполняется соотношение

$$(d_{(e,e)}\pi|_H)^{-1}(X) = \left(\frac{1}{2}X_k + X_p, -\frac{1}{2}X_k\right). \tag{2}$$

Лемма 4 *Если $X \in \mathbf{g}$ и $Y \in \mathbf{k}$, то $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}\langle X, Y \rangle_0$.*

Доказательство. В силу (2)

$$\langle X, Y \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2}X_k + X_p, -\frac{1}{2}X_k\right), \left(\frac{1}{2}Y_k + Y_p, -\frac{1}{2}Y_k\right) \right\rangle_0 =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2}X_k + X_p, \frac{1}{2}Y \right\rangle_0 + \left\langle -\frac{1}{2}X_k, -\frac{1}{2}Y \right\rangle_0 =$$

$$= \left\langle X_k + X_p, \frac{1}{2}Y \right\rangle_0 = \frac{1}{2}\langle X, Y \rangle_0.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем, говоря о кривизне пространства G, мы будем иметь в виду метрику $\langle\ ,\ \rangle$.

Лемма 5 *Пусть σ — двумерная плоскость в $\mathbf{g}$, $K(\sigma) = 0$. Тогда $\sigma = Span(X, Y)$, где $X \in \mathbf{g}$, $Y \in \mathbf{k}$ и*

$$[X_p, Y] = [X_k, Y] = 0.$$

Доказательство. Пусть $\sigma = \operatorname{Span}(X, Y)$, где $X, Y \in \mathbf{g}$. Пусть $\sigma^* = \operatorname{Span}\big(\big(\frac{1}{2}X_k + X_p, -\frac{1}{2}X_p\big), \big(\frac{1}{2}Y_k + Y_p, -\frac{1}{2}Y_k\big)\big)$ лежит в горизонтальном подпространстве субмерсии π. Имеем $d_e\pi(\sigma^*) = \sigma$. По леммам 2 и 3 $0 \le K(\sigma^*) \le K(\sigma) = 0$. Отсюда $K(\sigma^*) = 0$.

Из леммы 3 следует, что

$$\left[\left(\frac{1}{2}X_k + X_p, -\frac{1}{2}X_k\right), \left(\frac{1}{2}Y_k + Y_p, -\frac{1}{2}Y_k\right)\right] = 0,$$

$$\left(\left[\frac{1}{2}X_k + X_p, \frac{1}{2}Y_k + Y_p\right], \left[-\frac{1}{2}X_k, -\frac{1}{2}Y_k\right]\right) = 0.$$

Таким образом,

$$[X_k, Y_k] = 0, \quad \frac{1}{2}[X_k, Y_p] + \frac{1}{2}[X_p, Y_k] + [X_p, Y_p] = 0.$$

Согласно (1) $[X_p, Y_p] \in \mathbf{k}$ и $[X_k, Y_p] + [X_p, Y_k] \in \mathbf{p}$, т. е.

$$[X_p, Y_p] = 0, \quad [X_k, Y_p] + [X_p, Y_k] = 0.$$

Далее, $X_p, Y_p \in \mathbf{p}$ — векторы касательного пространства к CP^4, которое имеет положительную кривизну. Так как кривизна CP^4 в направлении $\operatorname{Span}(X_p, Y_p)$ равна нулю, то X_p, Y_p линейно зависимы. Поэтому мы можем считать, что $\sigma = \operatorname{Span}(X, Y)$, где $Y \in \mathbf{k}$. Тогда

$$[X_k, Y] = [X_p, Y] = 0.$$

Лемма доказана.

3. Свободное действие на $U(5)$ и построение пространств $M_{\bar{p}}$. Пусть p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 — целые числа. Обозначим $P' = S^1 \times (\operatorname{Sp}(2) \times S^1)$, где $\operatorname{Sp}(2)$ считаем стандартно вложенной в $SU(4)$.

Рассмотрим действие группы P' на $G = U(5)$:

$$(z_1, (A, z_2)) : X \mapsto \operatorname{diag}\big(z_1^{p_1}, z_1^{p_2}, z_1^{p_3}, z_1^{p_4}, z_1^{p_5}\big) \cdot X \cdot \left(\begin{array}{c|c} A^*\bar{z}_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

где $X \in G$, $z_1, z_2 \in S^1$, $A \in \operatorname{Sp}(2)$.

Лемма 6 *Пусть $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} - p_{\sigma(3)} - p_{\sigma(4)}$ взаимно просто с $p_{\sigma(5)}$ для любой подстановки $\sigma \in S_5$. Тогда рассмотренное действие имеет ядро $Z_2 = (1, \pm(E, 1))$ и, следовательно, индуцирует свободное действие на G группы*

$$P = S^1 \times \frac{Sp(2) \times S^1}{\pm(E, 1)} =: P_1 \times P_2.$$

Доказательство. Допустим, что

$$X = \operatorname{diag}\big(z_1^{p_1}, z_1^{p_2}, z_1^{p_3}, z_1^{p_4}, z_1^{p_5}\big) \cdot X \cdot \left(\begin{array}{c|c} A^*\bar{z}_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\operatorname{diag}\left(\bar z_1^{p_1}, \bar z_1^{p_2}, \bar z_1^{p_3}, \bar z_1^{p_4}, \bar z_1^{p_5}\right) = X \left(\begin{array}{c|c} A^* \bar z_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) X^{-1}.$$

В $\mathrm{Sp}(2)$ рассмотрим максимальный тор

$$T^2 = \{ \operatorname{diag}(u, v, \bar u, \bar v) \mid u, v \in S^1 \}.$$

Тогда существует такой элемент $Y \in \mathrm{Sp}(2)$, что $A^* = Y \times$ $\times \operatorname{diag}(u, v, \bar u, \bar v) Y^{-1}$ при некоторых $u, v \in S^1$. Итак,

$$\operatorname{diag}\left(\bar z_1^{p_1}, \bar z_1^{p_2}, \bar z_1^{p_3}, \bar z_1^{p_4}, \bar z_1^{p_5}\right) =$$

$$= \left(X \left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) \right) \operatorname{diag}(u\bar z_2, v\bar z_2, \bar u \bar z_2, \bar v \bar z_2, 1) \left(X \left(\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) \right)^{-1}.$$

Значит, существуют $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ такие, что

$$\bar z_1^{p_{i_1}} = u \bar z_2, \quad \bar z_1^{p_{i_2}} = v \bar z_2, \quad \bar z_1^{p_{i_3}} = \bar u \bar z_2, \quad \bar z_1^{p_{i_4}} = \bar v \bar z_2, \quad \bar z_1^{p_{i_5}} = 1.$$

Из первых четырех равенств вытекает, что

$$\bar z_1^{p_{i_1} + p_{i_3} - p_{i_2} - p_{i_4}} = 1.$$

По условию леммы p_{i_5} взаимно просто с $p_{i_1} + p_{i_3} - p_{i_2} - p_{i_4}$, поэтому $\bar z_1 = 1$, т. е. $z_1 = 1$. Тогда $\bar z_2^2 = 1$, $z_2 = \pm 1$.

1. Если $z_2 = 1$, то $u = v = 1, A^* = YEY^{-1} = E$, т. е. $A = E$.

2. Если $z_2 = -1$, то $u = v = -1, A = -E$.

Итак, ядро действия равно $Z_2 = (1, \pm(E, 1))$. Лемма доказана.

Группа P действует на G изометриями. Поэтому согласно лемме 1 на пространстве орбит $M_{\bar p}$ можно ввести структуру риманова многообразия таким образом, что естественная проекция

$$\bar \pi : G \to M_{\bar p}$$

будет римановой субмерсией.

1.2 Кривизна пространств $M_{\bar p}$

В этом параграфе мы найдем условия на $\bar p$, при выполнении которых секционная кривизна пространства $M_{\bar p}$ положительна.

Следующая лемма была доказана в [8], но мы для полноты изложения приведем ее вместе с доказательством.

Лемма 7 *Пусть G — компактная группа Ли с двусторонне-инвариантной метрикой $\langle \, , \, \rangle_0$, $\mathbf{t} \subset \mathbf{g}$ — максимальная абелева подалгебра в касательной алгебре к G и $H \in \mathbf{t}$. Пусть $M = Ad(G)A$, где $A \in \mathbf{g}$. Функция*

$$f_H : M \to R : X \mapsto \langle H, X \rangle_0$$

достигает экстремальных значений на $M \cap \mathbf{t}$.

Доказательство. Предположим сначала, что H — регулярный элемент в $\mathbf{t}$, т. е. H не лежит более ни в какой максимальной подалгебре.

Пусть $X \in M$ — критическая точка для f_H. Значит, $d_X f_H = \langle H, - \rangle_0 = 0$. Так как $M = \mathrm{Ad}(G)X$, то $T_X M = \mathrm{ad}(\mathbf{g})X$. Следовательно,

$$\langle \mathrm{ad}(\mathbf{g})X, H \rangle_0 = 0,$$

$$\langle [Z, X], H \rangle_0 = \langle Z, [X, H] \rangle_0 = 0$$

для всех $Z \in \mathbf{g}$. Значит, $[X, H] = 0$, и в силу регулярности H заключаем, что $X \in \mathbf{t}$.

Допустим, теперь, что H — сингулярный элемент $\mathbf{t}$. Пусть X — точка экстремума и $X \in \mathbf{g} \backslash \mathbf{t}$. Тогда при достаточно малом изменении H станет регулярным, а X останется в $\mathbf{g} \backslash \mathbf{t}$ — противоречие с вышедоказанным. Лемма доказана.

Лемма 8 *Пусть F — подалгебра в $\mathbf{su}(4)$ размерности 10, $\mathbf{t}$ — максимальная абелева подалгебра диагональных матриц в $\mathbf{su}(4)$. Допустим, что $H \in \mathbf{t}$ и $\langle H, F \rangle_0 = 0$. Тогда с точностью до перестановки существуют лишь две возможности:*

$$H = i \cdot t \cdot \ diag(1, 1, -1, -1) \text{ или } H = i \cdot t \cdot \ diag(1, 1, 1, -3),$$

где $t \in R$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование

$$ad(H) : \mathbf{su}(4) \to \mathbf{su}(4) : X \mapsto [H, X].$$

Возьмем $X, Y \in F$. Тогда $[X, Y] \in F$, т. е. $\langle H, [X, Y] \rangle_0 = 0$. Следовательно, $\langle [H, Y], X \rangle_0 = \langle H, [X, Y] \rangle_0 = 0$. Итак,

$$\langle F, \ \mathrm{ad}\ H(F) \rangle_0 = 0.$$

Кроме того, $\langle [H, X], H \rangle_0 = \langle [H, H], X \rangle_0 = 0$ для всех $X \in F$, т. е.

$$\langle \ \mathrm{ad}\ H(F), H \rangle_0 = 0.$$

Тогда

$$\dim(\ \mathrm{ad} H(F)) \le \dim \mathbf{su}(4) - \dim F - 1 = 4.$$

Значит,

$$\dim(\ \mathrm{Ker}(\ \mathrm{ad} H) \cap F) \ge 10 - 4 = 6.$$

Так как $H \in \mathrm{Ker}(\ \mathrm{ad} H)$, но H не лежит в F, то

$$\dim(\ \mathrm{Ker}(\ \mathrm{ad} H)) \ge \dim(\ \mathrm{Ker}(\ \mathrm{ad} H) \cap F) + 1 \ge 7.$$

Рассмотрим $\mathrm{ad} H$-инвариантное разложение на корневые подпространства

$$\mathbf{su}(4) = V_0 \oplus \bigoplus_{\substack{i, j = 1 \\ i < j}}^{4} V_{i,j},$$

где $V_0 = \mathbf{t}$, $\dim V_{i,j} = 2$. Тогда

$$\mathrm{ad}H(V_0) = 0,$$

$$\mathrm{ad}H(V_{i,j}) = \theta_{i,j}(H)V_{i,j},$$

где $\theta_{i,j}$ — корни $\mathbf{su}(4)$, т. е. $\theta_{i,j}(i \cdot \ \mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_i - x_j$. Из условия на размерность ядра $\mathrm{ad}H$ вытекает, что по крайней мере два корня обращаются в нуль на H. Лемма доказана.

Лемма 9 *Пусть для некоторого $m \in M_{\bar{p}}$ существует двумерная плоскость $\sigma \subset T_m M_{\bar{p}}, K(\sigma) = 0$. Тогда существуют такие $g \in G,\ X, Y \in \mathbf{u}(5)$, что X, Y линейно независимы, $K(X, Y) = 0$ и X, Y ортогональны подпространству*

$$D_g = \left\{ Ad(g^{-1}) \cdot i \cdot t \cdot \ diag(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) - i \cdot s \cdot \ diag(1, 1, 1, 1, 0) \right.$$

$$\left. - \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \mid t, s \in \mathbf{R}, A \in \mathbf{sp}(2) \right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим риманову субмерсию $\bar{\pi} : G \to M_{\bar{p}}$. Допустим, что $\bar{\pi}(g) = m$, где $g \in G$. Тогда $T_g G = V \oplus H$, где V — вертикальное, H — горизонтальное подпространство и $d_g\pi|_H$ — изометрия. Имеем

$$V = T_g P = \{d_e R_g(X) - d_e L_g(Y) \mid (X, Y) \in T_e P\},$$

где R_g, L_g — правый и левый сдвиги на g. Тогда $H = V^{\perp}$ — ортогональное дополнение. Значит, существует такое $\sigma^* \in H$, что $d_g\bar{\pi}(\sigma^*) = \sigma$. По леммам 2 и 3 $0 \le K(\sigma^*) \le K(\sigma)$, поэтому $K(\sigma^*) = 0$. Левый сдвиг $L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$ — изометрия. Пусть $d_g L_{g^{-1}}(\sigma^*) = \ \mathrm{Span}(X, Y)$, где $X, Y \in T_e G = \mathbf{u}(5)$. Тогда $K(X, Y) = 0$ и $0 = \langle V, \sigma^* \rangle = \langle d_g L_{g^{-1}}(V),\ \mathrm{Span}(X, Y) \rangle$.

Таким образом, X, Y ортогональны подпространству

$$D_g = d_g L_{g^{-1}}(V) = \{(d_g L_g)^{-1}(d_g R_g)(X) - Y \mid (X, Y) \in T_e P\}$$

$$= \{d_e(L_{g^{-1}} \circ R_g)(X) - Y \mid (X, Y) \in T_e P\}$$

$$= \{Ad(g^{-1})X - Y \mid X \in T_e S^1, Y \in T_e(\ \mathrm{Sp}(2) \times S^1)\}$$

$$= \left\{ \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot i \cdot t \cdot \ \mathrm{diag}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) - i \cdot s \cdot \ \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, 0) \right.$$

$$\left. - \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \mid t, s \in \mathbf{R}, A \in \mathbf{sp}(2) \right\}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1 *Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ для всех подстановок $\sigma \in S_5$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} - p_{\sigma(3)} - p_{\sigma(4)}$ взаимно просто с $p_{\sigma(5)}$;

2) $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 > 0$;

3) $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} + p_{\sigma(3)} > p_{\sigma(4)} + p_{\sigma(5)}$;

4) $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} + p_{\sigma(3)} + p_{\sigma(4)} > 3p_{\sigma(5)}$;

5) $3(p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)}) > p_{\sigma(3)} + p_{\sigma(4)} + p_{\sigma(5)}$.

Тогда $M_{\bar{p}}$ имеет строго положительную секционную кривизну.

Доказательство. Допустим, что утверждаемое теоремой неверно. Тогда согласно лемме 9 найдутся $g \in G$ и $X, Y \in \mathbf{u}(5)$ такие, что X, Y линейно независимы, ортогональны D_g и $K(X, Y) = 0$. Ввиду леммы 5 можно считать, что $Y \in \mathbf{k} = \mathbf{u}(4) \oplus \mathbf{u}(1)$ и

$$[X_p, Y] = [X_k, Y] = 0.$$

Рассмотрим два возникающих случая.

Случай 1: $X \in \mathbf{k}$. Тогда

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_1 & 0 \\ \hline 0 & it \end{array}\right), \quad Y = \left(\begin{array}{c|c} Y_1 & 0 \\ \hline 0 & is \end{array}\right),$$

где $X_1, Y_1 \in \mathbf{u}(4)$, $t, s \in R$. Условие $[X, Y] = 0$ означает, что $[X_1, Y_1] = 0$. Из условия ортогональности D_g вытекает, что

$$\left\langle X, \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \right\rangle = \left\langle Y, \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \right\rangle = 0 \quad \forall A \in \mathbf{sp}(2),$$

$$\langle X, i \cdot \operatorname{diag}(1,1,1,1,0)\rangle = \langle Y, i \cdot \operatorname{diag}(1,1,1,1,0)\rangle = 0,$$

$$\langle X, \operatorname{Ad}(g^{-1}) \cdot i \cdot \operatorname{diag}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)\rangle =$$

$$\langle Y, \operatorname{Ad}(g^{-1}) \cdot i \cdot \operatorname{diag}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)\rangle = 0.$$

Поскольку $X, Y \in \mathbf{k}$, согласно лемме 4 последние соотношения верны и для метрики $\langle\, ,\, \rangle_0$. Поэтому X_1, Y_1 ортогональны элементу $i \cdot \operatorname{diag}(1,1,1,1)$, а это означает, что $X_1, Y_1 \in \mathbf{su}(4)$ и

$$\langle X_1, \mathbf{sp}(2)\rangle_0 = \langle Y_1, \mathbf{sp}(2)\rangle_0 = 0,$$

где $\mathbf{sp}(2)$ стандартно вложено в $\mathbf{su}(4)$.

Известно, что $SU(4)/\operatorname{Sp}(2)$ — симметрическое пространство ранга 1, а именно S^5, имеющее строго положительную кривизну. Поэтому X_1, Y_1 линейно зависимы. Следовательно, не меняя $\operatorname{Span}(X, Y)$, можно считать, что $X_1 = 0$.

Итак, можем считать, что

$$X = i \cdot \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \text{ причем } \langle X, Ad(g^{-1}) \cdot i \cdot \operatorname{diag}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)\rangle_0 = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f_X: \ \mathrm{Ad}(G)\cdot i\cdot \ \mathrm{diag}(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)\to \mathbf{R}: Z\mapsto \langle Z,X\rangle_0.$$

Согласно лемме 7 f_X достигает экстремальных значений в точках из $\mathrm{Ad}(G)\cdot i\cdot \ \mathrm{diag}(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)\cap\{$диагональные матрицы$\}$. Поскольку две сопряженные диагональные матрицы совпадают с точностью до перестановки, экстремальные значения функции f_X содержатся среди $\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}\subset(0,\infty)$ — противоречие.

Случай 2: X не лежит в $\mathbf{k}$. Тогда

$$X_p=\left(\begin{array}{c|c} 0 & x \\ \hline -x^* & 0\end{array}\right),\quad Y=\left(\begin{array}{c|c} Y_1 & 0 \\ \hline 0 & it\end{array}\right),$$

где $t\in\mathbf{R}, Y_1\in\mathbf{u}(4), x\in\mathbf{C}^4\backslash 0$. При этом $[X_p,Y]=0$, т. е.

$$[X_p,Y]=\left(\begin{array}{c|c} -x^*Y_1 & 0 \\ \hline 0 & it\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c|c} 0 & Y_1x \\ \hline -itx^* & 0\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c} 0 & itx-Y_1x \\ \hline tx^*-x^*Y_1 & 0\end{array}\right)=0.$$

Значит,

$$Y_1x=itx.$$

Так как $\langle Y,i\cdot \ \mathrm{diag}(1,1,1,1,0)\rangle=0$, то $\langle Y,i\cdot \ \mathrm{diag}(1,1,1,1,0)\rangle_0=0$ и, следовательно,

$$Y_1\in\mathbf{su}(4).$$

Так как $Y_1x=itx$, то существует $h_1\in SU(4)$ такой, что $h_1Y_1h_1^{-1}=i\cdot \ \mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3,t)$, где $s_1+s_2+s_3+t=0$. Обозначим

$$h=\left(\begin{array}{c|c} h_1 & 0 \\ \hline 1 & 0\end{array}\right)\in SU(5),$$

тогда

$$Y=h^{-1}\cdot i\cdot \ \mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3,t,t)\cdot h.$$

Пусть

$$H_1=i\cdot \ \mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3,t)\in\mathbf{su}(4),\quad H=i\cdot \ \mathrm{diag}(s_1,s_2,s_3,t,t)\in\mathbf{u}(5).$$

Условие

$$\left\langle Y,\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle Y,\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\right\rangle_0=0$$

означает, что

$$\langle Y_1,A\rangle_0=0\quad\forall A\in\mathbf{sp}(2).$$

Используя двустороннюю инвариантность метрики $\langle\, ,\, \rangle_0$, получаем, что

$$\langle H_1, h_1 \mathbf{sp}(2) h_1^{-1} \rangle_0 = 0.$$

Из леммы 8 немедленно вытекает, что с точностью до перестановки есть лишь две возможности для H_1:

$$H_1 = i \cdot t \cdot \ \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1) \text{ или } H_1 = i \cdot t \cdot \ \mathrm{diag}(1, 1, 1, -3), \ \text{ где } t \in \mathbf{R}.$$

Поэтому можно считать, что H удовлетворяет одной из трех возможностей:

$$H = i \cdot \ \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1, -1), \ H = i \cdot \ \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, -3),$$

$$H = i \cdot \ \mathrm{diag}(3, 3, -1, -1, -1).$$

Осталось рассмотреть условие

$$\begin{aligned} 0 &= 2\langle Y, \ \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot i \cdot \ \mathrm{diag}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \rangle \\ &= \langle Y, \ \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot i \cdot \ \mathrm{diag}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \rangle_0 \\ &= \langle h^{-1} H h, \ \mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot i \cdot \ \mathrm{diag}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \rangle_0 \\ &= \langle H, \ \mathrm{Ad}(g') \cdot i \cdot \ \mathrm{diag}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \rangle_0, \end{aligned}$$

где $g' = hg^{-1} \in G$.

Рассмотрим функцию

$$f_H : \ \mathrm{Ad}(G) \cdot i \cdot \ \mathrm{diag}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \to R : X \mapsto \langle X, H \rangle_0.$$

По лемме 7 ее экстремальные значения лежат в множестве

$$\{p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3} - p_{i_4} - p_{i_5}, 3(p_{i_1} + p_{i_2}) - p_{i_3} - p_{i_4} - p_{i_5},$$

$$p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3} + p_{i_4} - 3p_{i_5} \mid \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}\},$$

которое содержится в $(0, \infty)$ по условию теоремы. И в этом случае приходим к противоречию.

Теорема доказана.

Легко видеть, что все условия теоремы выполнены для $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = q^n$, где q — простое, а n — целое неотрицательное числа.

1.3 Топология пространств $M_{\bar{p}}$

Обозначим через $\sigma_i(\bar{p})$ i-ю элементарную симметрическую функцию от чисел p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.

Лемма 10 ($Sp(2) \times S^1)/ \pm (E, 1)$ *диффеоморфно* $Sp(2) \times S^1$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\phi' : \ \mathrm{Sp}(2) \times S^1 \to \ \mathrm{Sp}(2) \times S^1 : (A, z) \mapsto (A \cdot \ \mathrm{diag}(z, z, \bar{z}, \bar{z}), z^2).$$

Пусть $\phi'(A, z) = (B, w)$. Тогда $z^2 = w$, $z = \pm\sqrt{w}$, т. е.

$$(A, z) = \pm(B \cdot \ \mathrm{diag}(\sqrt{\overline{w}}, \sqrt{\overline{w}}, \sqrt{w}, \sqrt{w}), \sqrt{w}).$$

Таким образом, ϕ' индуцирует биекцию

$$\phi : \frac{\mathrm{Sp}(2) \times S^1}{\pm(E, 1)} \to \ \mathrm{Sp}(2) \times S^1,$$

которая, очевидно, является диффеоморфизмом. Лемма доказана.

Теорема 2 *Пусть $p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} - p_{\sigma(3)} - p_{\sigma(4)}$ взаимно просто с $p_{\sigma(5)}$ для всех подстановок $\sigma \in S_5$. Тогда пространство $M_{\bar{p}}$ односвязно.*

Доказательство. Рассмотрим фрагмент точной гомотопической последовательности расслоения $\bar{\pi} : G \to M_{\bar{p}}$ со слоем $P = S^1 \times (\ \mathrm{Sp}(2) \times S^1)/\pm(E, 1)$:

$$\pi_1\left(S^1 \times \frac{\mathrm{Sp}(2) \times S^1}{\pm(E, 1)}\right) \stackrel{i_*}{\to} \pi_1(U(5)) \stackrel{\bar{\pi}_*}{\to} \pi_1(M_{\bar{p}}) \to 0,$$

где i — вложение P как слоя над элементом $E \in U(5)$. Используя диффеоморфизм ϕ, получаем

$$\pi_1(S^1 \times \ \mathrm{Sp}(2) \times S^1) \stackrel{j_*}{\to} \pi_1(U(5)) \stackrel{\bar{\pi}_*}{\to} \pi_1(M_{\bar{p}}) \to 0,$$

где $j = i \circ (\ \mathrm{id} \times \phi^{-1})$. Итак, имеем следующую точную последовательность:

$$Z \oplus Z \stackrel{j_*}{\to} Z \stackrel{\bar{\pi}_*}{\to} \pi_1(M_{\bar{p}}) \to 0.$$

Вычислим j_*. Выберем в группе $Z \oplus Z = \pi_1(S^1 \times \ \mathrm{Sp}(2) \times S^1)$ образующие $(1, 0)$ и $(0, 1)$, порожденные петлями

$$\xi_1(t) = (e^{2\pi it}, (E, 1)), \quad \xi_2(t) = (1, (E, e^{2\pi it})), \quad 0 \le t \le 1.$$

В качестве образующего элемента группы $Z = \pi_1(U(5))$ возьмем класс гомотопий, заданный обмоткой тора

$$\xi(t) = \ \mathrm{diag}(e^{2\pi i x_1 t}, e^{2\pi i x_2 t}, e^{2\pi i x_3 t}, e^{2\pi i x_4 t}, e^{2\pi i x_5 t}),$$

$$0 \le t \le 1, \ x_k \in Z, \ \sum_{k=1}^{5} x_k = 1.$$

Петля ξ_1 переходит в петлю

$$j(\xi_1(t)) = i(e^{2\pi it}, \pm(E, 1)) =$$

$$\mathrm{diag}(e^{2\pi i p_1 t}, e^{2\pi i p_2 t}, e^{2\pi i p_3 t}, e^{2\pi i p_4 t}, e^{2\pi i p_5 t}),\ 0 \le t \le 1,$$

а петля ξ_2 — в петлю

$$j(\xi_2(t)) = i(1, \pm(\ \mathrm{diag}(e^{-\pi i t}, e^{-\pi i t}, e^{\pi i t}, e^{\pi i t}), e^{\pi i t}))$$
$$=\ \mathrm{diag}(1, 1, e^{2\pi i t}, e^{2\pi i t}, 1),\ 0 \le t \le 1.$$

Получаем, что

$$j_*(1,0) = \sigma_1(\bar{p}) \cdot 1, \quad j_*(0,1) = 2 \cdot 1.$$

Из условий теоремы следует, в частности, что 2 взаимно просто с $\sigma_1(\bar{p})$, поэтому j_* — эпиморфизм. Из написанной выше точной последовательности немедленно следует, что $M_{\bar{p}}$ односвязно.

Теорема доказана.

Итак, у нас $G = U(5)$, $P = S^1 \times (\ \mathrm{Sp}(2) \times S^1)/Z_2 \subset G \times G$, $M = M_{\bar{p}} = G/P$ — пространство орбит, $\bar{\pi} : G \to M$ — главное расслоение со структурной группой P. Пусть $\pi_G : E_G \to B_G$ и $\pi_P : E_P \to B_P$ — универсальные расслоения для групп G и P, где пространства расслоений E_G и E_P стягиваемы. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} G & \stackrel{p_2}{\longleftarrow} & E_P \times G & \stackrel{p_1}{\longrightarrow} & E_P \\ {\scriptstyle \pi_G}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \pi_P} \\ M & \stackrel{\bar{p}_2}{\longleftarrow} & G//P & \stackrel{\bar{p}_1}{\longrightarrow} & B_P \end{array}.$$

Здесь p_1 и p_2 — естественные проекции на первый и второй сомножители, $G//P$ — пространство орбит $E_P \times G$ относительно очевидного действия P. Слоем $\bar{p}_2$ является стягиваемое пространство E_P, поэтому $\bar{p}_2^*$ — изоморфизм $H^*(M)$ на $H^*(G//P)$. Рассмотрим спектральную последовательность расслоения $p = \bar{p}_1 : G//P \to B_P$ со слоем G. Так как $H^*(G)$ не имеет кручения, то начальный член равен $E_2 = H^*(B_P) \otimes H^*(G)$. Член E_∞ присоединен к $H^*(M)$. Посчитаем дифференциалы в этой спектральной последовательности.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{cccccccc} G//P = & (E_{G^2} \times G)/P & \stackrel{\hat{\rho}}{\longrightarrow} & (E_{G^2} \times G)/G^2 & \stackrel{f}{\longleftarrow} & B_G & = E_{G^2}/\delta G \\ & {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle p'} & & \downarrow {\scriptstyle \triangle} & \\ & B_P & \stackrel{\rho}{\longrightarrow} & B_{G^2} & \stackrel{\mathrm{id}}{\longleftarrow} & B_{G^2} & \end{array}$$

Здесь $E_P = E_{G^2}$, $B_P = E_{G^2}/P$, $B_{G^2} = E_{G^2}/G^2, \rho : B_P \to B_{G^2}$ и $\triangle : B_G \to B_{G^2}$ — естественные проекции; $\delta : G \to G^2$ — диагональное вложение, $\hat{\rho}$ — послойное отображение, являющееся гомеоморфизмом на слоях; $f : (\delta G)e \mapsto G^2(e, 1)$ — изоморфизм расслоений $\triangle$ и p'.

Вычислим дифференциалы спектральной последовательности расслоения $\triangle$. Кольцо когомологий $H^*(G)$ отождествим с внешней алгеброй с образующими $z_1, z_3, \ldots, z_9$. Тогда $H^*(B_G) = Z[\bar{z}_1, \bar{z}_3, \ldots \ldots, \bar{z}_9]$, где $\bar{z}_i$ — образ элемента z_i при трансгрессии в расслоении π_G. Так как можно взять $B_{G^2} = B_G \times B_G$, то $H^*(B_{G^2}) = H^*(B_G) \otimes H^*(B_G) = Z[\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \ldots, \bar{x}_9, \bar{y}_9]$, где $\bar{x}_i = \bar{z}_i \otimes 1$, $\bar{y}_i = 1 \otimes \bar{z}_i$.

Начальный член равен $E_2 = H^*(B_{G^2}) \otimes H^*(G)$. Обозначим через $k_i : H^*(B_{G^2}) \to E_i^{*,0}$ естественную проекцию. Тогда, как известно,

$$\triangle^* = k_\infty : H^*(B_{G^2}) \to E_\infty^{*,0} \subset H^* B_G.$$

Лемма 11 (i) $d_j(1 \otimes z_i) = 0$ *при* $j \leq i$, $i = 3, 5, 7$.

(ii) $d_{i+1}(1 \otimes z_i) = \pm k_{i+1}(\bar{x}_i - \bar{y}_i)$, $i = 1, 3, 5, 7$.

Доказательство. Рассмотрим член E_2 спектральной последовательности расслоения $B_G \to B_{G^2}$:

z_7	0	$*$	0	$*$	0	$*$
$z_1 z_5$	0	$z_1 z_5 \bar{x}_1, z_1 z_5 \bar{y}_1$	0	$*$	0	$*$
z_5	0	$*$	0	$*$	0	$*$
$z_1 z_3$	0	$z_1 z_3 \bar{x}_1, z_1 z_3 \bar{y}_1$	0	$z_1 z_3 \otimes E_2^{4,0}$	0	$*$
z_3	0	$z_3 \bar{x}_1, z_3 \bar{y}_1$	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	0	0	0
z_1	0	$z_1 \bar{x}_1, z_1 \bar{y}_1$	0	$z_1 \bar{x}_1^2, z_1 \bar{x}_1 \bar{y}_1, z_1 \bar{y}_1^2$ $z_1 \bar{x}_3, z_1 \bar{y}_3$	0	$*$
1	0	$\bar{x}_1, \bar{y}_1$	0	$\bar{x}_1^2, \bar{x}_1 \bar{y}_1, \bar{y}_1^2$ $\bar{x}_3, \bar{y}_3$	0	$\bar{x}_1^3, \bar{x}_1^2 \bar{y}_1, \bar{x}_1 \bar{y}_1^2, \bar{y}_1^3$ $\bar{x}_1 \bar{x}_3, \bar{x}_1 \bar{y}_3, \bar{y}_1 \bar{x}_3, \bar{y}_1 \bar{y}_3$ $\bar{x}_5, \bar{y}_5$

Для всех $u \in H^*(B_G)$ имеем

$$\triangle^*(1 \otimes u) = \triangle^*(u \otimes 1) = u.$$

Ядро $\triangle^2$ совпадает с $d_2(Z(z_1))$, поэтому $d_2(Z(z_1)) = Z(\bar{x}_1 - \bar{y}_1)$. Значит,

$$d_2(z_1) = \pm(\bar{x}_1 - \bar{y}_1) = \pm k_2(\bar{x}_1 - \bar{y}_1).$$

Таким образом, установлено (ii) при $i = 1$.

Далее, имеем

$$d_2(z_1 z_3 \bar{x}_1) = z_3 \bar{x}_1^2 - z_3 \bar{x}_1 \bar{y}_1, \quad d_2(z_1 z_3 \bar{y}_1) = z_3 \bar{x}_1 \bar{y}_1 - z_3 \bar{y}_1^2.$$

Тем самым $\operatorname{Ker}(d_2^{2,4}) = 0$, и поэтому $d_2^{0,5} = 0$. Совершенно аналогично, $\operatorname{Ker}(d_2^{2,6}) = 0$, $\operatorname{Ker}(d_2^{4,4}) = 0$ и, следовательно, $d_2^{0,7} = d_4^{0,7} = 0$. Тривиальность остальных дифференциалов из (i) сразу следует из соображений размерности. Итак, осталось доказать (ii) для $i = 3, 5, 7$. Легко видеть, что

$$\operatorname{Ker}\triangle^4 = Z(\bar{x}_3 - \bar{y}_3) \oplus Z\big(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 \bar{y}_1, \bar{x}_1 \bar{y}_1 - \bar{y}_1^2\big)$$

и, с другой стороны,

$$\operatorname{Ker}\triangle^4 = \Im\big(d_2^{2,1}\big) \oplus \Im\big(d_4^{0,3}\big).$$

Поскольку $\Im\big(d_2^{2,1}\big) = Z\big(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1\bar{y}_1, \bar{x}_1\bar{y}_1 - \bar{y}_1^2\big)$, то $d_4(z_3) = \pm k_4(\bar{x}_3 - \bar{y}_3)$. Совершенно аналогично

$$\mathrm{Ker}\triangle^6 = Z(\bar{x}_5 - \bar{y}_5) \oplus Z\big(\bar{x}_1^3 - \bar{x}_1^2\bar{y}_1, \bar{x}_1^2\bar{y}_1 - \bar{x}_1\bar{y}_1^2, \bar{x}_1\bar{y}_1^2 - \bar{y}_1^3\big)$$

$$\oplus Z(\bar{x}_1\bar{x}_3 - \bar{y}_1\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{y}_3 - \bar{y}_1\bar{y}_3, \bar{x}_1\bar{x}_3 - \bar{x}_1\bar{y}_3),$$

и при этом $\mathrm{Ker}\triangle^6 = \Im\big(d_2^{4,1}\big) \oplus \Im\big(d_4^{2,4}\big) \oplus \Im\big(d_6^{0,5}\big)$. Учитывая, что первые два слагаемых в последнем выражении, по доказанному, дают последние два слагаемых в предыдущем выражении, получаем

$$d_6(z_5) = \pm k_6(\bar{x}_5 - \bar{y}_5).$$

Таким же способом устанавливается, что $d_8(z_7) = \pm k_8(\bar{x}_7 - \bar{y}_7)$. Лемма доказана.

Лемма 12 *В спектральной последовательности расслоения $p : G//P \to B_P$*

$$d_j(1 \otimes z_i) = 0, \quad j \le i, \quad i = 3, 5, 7,$$

$$d_{i+1}(1 \otimes z_i) = \pm k_{i+1}\rho^*(\bar{x}_i - \bar{y}_i), \quad i = 1, 3, 5, 7,$$

где $\rho : B_P \to B_{G^2}$ индуцировано вложением $P \subset G^2$.

Доказательство. Рассмотрим вторую диаграмму. Послойное отображение $(\hat{\rho}, \rho)$ порождает гомоморфизм спектральных последовательностей $\rho^\sharp$, причем $\rho_2^\sharp = \rho^* \otimes i : H^*B_{G^2} \otimes H^*G \to H^*B_P \otimes H^*G$, где i — изоморфизм. Будем считать, что $i(1 \otimes z_i) = 1 \otimes z_i$. Тогда

$$d_j(1 \otimes z_i) = \rho^\sharp\big(d'_j(1 \otimes z_i)\big) = \rho^\sharp(0) = 0, \quad j \le i,$$

$$d_{i+1}(1 \otimes z_i) = \rho^\sharp\big(d'_{i+1}(1 \otimes z_i)\big) = \pm\rho^\sharp\big(k'_{i+1}(\bar{x}_i - \bar{y}_i)\big) = \pm k_{i+1}(\rho^*(\bar{x}_i - \bar{y}_i)).$$

Лемма доказана.

Пусть G — группа Ли, T^n — максимальный тор в G, $i : T^n \to G$ — вложение, $j : B_{T^n} \to B_G$ — естественная проекция. Обозначим через $a_1, \dots, a_n$ образующие H^1T^n. Тогда $H^*B_{T^n} = Z[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$. Пусть I_G — полиномы из $H^*B_{T^n}$, инвариантные относительно группы Вейля $W(G)$.

Теорема (Борель, [21]). *Если H^*G и $H^*(G/T^n)$ не имеют кручения, то $j^* : H^*B_G \to H^*B_{T^n}$ — мономорфизм, причем его образ совпадает с I_G.*

Как показано в [21], условия теоремы выполнены для всех классических групп. У нас $G = U(5)$, $\bar{z}_1 = \sigma_1(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_5)$, $\bar{z}_3 = \sigma_2(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_5), \dots, \bar{z}_9 = \sigma_5(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_5)$, где $d_1, \dots, d_5$ — коциклы, сопряженные к циклам $D_1, \dots, D_5; D_i(t) = \mathrm{diag}(1, \dots, e^{2\pi i t}, \dots, 1)$, $0 \le t \le 1$.

Рассмотрим $P \subset G^2$,

$$P = S^1 \times \frac{\mathrm{Sp}(2) \times S^1}{Z_2} \simeq S^1 \times S^1 \times \mathrm{Sp}(2).$$

Кольцо когомологий H^*P не имеет кручения. Далее, пусть T^3 — максимальный тор в $\mathrm{Sp}(2)\times S^1$. Тогда T^3/Z_2 — максимальный тор в $(\mathrm{Sp}(2)\times S^1)/Z_2$, т. е.

$$\frac{S^1\times \mathrm{Sp}(2)}{Z_2}\Big/\frac{T^3}{Z_2}\simeq\frac{S^1\times \mathrm{Sp}(2)}{T^3}$$

не имеет кручения. Таким образом, для P выполнены условия теоремы.

Пусть T — тор в G^2, S — тор в P; $i: S\to T$ — вложение, $j: B_S\to B_T$ — естественная проекция. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
H^*B_S & \xleftarrow{j^*} & H^*B_T\\
j_S^*\uparrow & & \uparrow j_T^*\\
H^*B_P & \xleftarrow{\rho^*} & H^*B_{G^2}
\end{array}$$

Пусть $A_1,\dots,A_5,B_1,\dots,B_5$ — базисные циклы в $H_1(T)$:

$$A_i(t)=(1,\ \mathrm{diag}(1,\dots,e^{2\pi it},\dots,1)),$$

$$B_i(t)=(\ \mathrm{diag}(1,\dots,e^{2\pi it},\dots,1),1),$$

$0\le t\le 1$; $a_1,\dots,a_5,b_1,\dots,b_5$ — сопряженные к ним коциклы из $H^1(T)$. Пусть $C_1,\dots,C_4$ — базисные циклы в $H_1(S)$,

$$C_1(t)=(e^{2\pi it},\pm(E,1)),$$

$$C_2(t)=(1,\pm(\ \mathrm{diag}(e^{\pi it},e^{\pi it},e^{-\pi it},e^{-\pi it}),e^{\pi it})),$$
$$C_3(t)=(1,\pm(\ \mathrm{diag}(e^{2\pi it},1,e^{-2\pi it},1),1)),$$
$$C_4(t)=(1,\pm(\ \mathrm{diag}(1,e^{2\pi it},1,e^{-2\pi it}),1)),$$

$0\le t\le 1$; c_1,c_2,c_3,c_4 — сопряженные к ним коциклы из $H^1(S)$. Тогда

$$i_*(C_1)=p_1B_1+p_2B_2+p_3B_3+p_4B_4+p_5B_5,$$

$$i_*(C_2)=A_1+A_2,\quad i_*(C_3)=A_1-A_3,\quad i_*(C_4)=A_2-A_4.$$

Следовательно,

$$i^*(a_1)=c_2+c_3,\quad i^*(a_2)=c_2+c_4,\quad i^*(a_3)=-c_3,\quad i^*(a_4)=-c_4,$$

$$i^*(a_5)=0,\quad i^*(b_1)=p_1c_1,\quad i^*(b_2)=p_2c_1,\quad i^*(b_3)=p_3c_1,$$
$$i^*(b_4)=p_4c_1,\quad i^*(b_5)=p_5c_1.$$

В силу естественности трансгрессии

$$j^*(\bar a_i)=\overline{i^*(a_i)},\quad j^*(\bar b_i)=\overline{i^*(b_i)}.$$

Согласно написанной выше диаграмме ρ^* есть ограничение j^* на I_{G^2}.

Мы отождествили $H^*B_{G^2}$ с подалгеброй H^*B_T, порожденной

$$\sigma_i(\bar a_1,\dots,\bar a_5),\quad \sigma_i(\bar b_1,\dots,\bar b_5),\quad i=1,2,\dots,5.$$

Кольцо когомологий H^*B_P отождествляем с подалгеброй в H^*B_S, инвариантной относительно $W(P)$. Заметим, что в наших обозначениях

$$a_i = 1 \otimes d_i, \quad b_i = d_i \otimes 1.$$

Вычислим $W(P)$. Элементы из $W(P)$ индуцируются элементами из $W(S^1 \times S^1 \times \mathrm{Sp}(2))$. Следовательно, образующие ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 группы $W(P)$ так действуют на гомологиях S:

$$\begin{array}{llllll}
\phi_1: & C_1 \mapsto C_1 & \phi_2: & C_1 \mapsto C_1 & \phi_3: & C_1 \mapsto C_1 \\
 & C_2 \mapsto C_2 - C_3 & & C_2 \mapsto C_2 - C_4 & & C_2 \mapsto C_2 \\
 & C_3 \mapsto -C_3 & & C_3 \mapsto C_3 & & C_3 \mapsto C_4 \\
 & C_4 \mapsto C_4, & & C_4 \mapsto -C_4, & & C_4 \mapsto C_3,
\end{array}$$

значит, на когомологиях S

$$\begin{array}{llllll}
\phi_1: & c_1 \mapsto c_1 & \phi_2: & c_1 \mapsto c_1 & \phi_3: & c_1 \mapsto c_1 \\
 & c_2 \mapsto c_2 & & c_2 \mapsto c_2 & & c_2 \mapsto c_2 \\
 & c_3 \mapsto -c_2 - c_3 & & c_3 \mapsto c_3 & & c_3 \mapsto c_4 \\
 & c_4 \mapsto c_4, & & c_4 \mapsto -c_2 - c_4, & & c_4 \mapsto c_3.
\end{array}$$

Итак, H^*B_P — подалгебра в $\mathbf{Z}[\bar{c}_1, \bar{c}_2]$, инвариантная относительно $W(P)$. Найдем мультипликативные образующие H^*B_P.

Лемма 13 *Пусть*

$$\bar{f} = \left(\bar{c}_3^2 + \bar{c}_4^2\right) + \bar{c}_2(\bar{c}_3 + \bar{c}_4), \quad \bar{g} = \bar{c}_3^2\bar{c}_4^2 + \bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4(\bar{c}_3 + \bar{c}_4) + \bar{c}_2^2\bar{c}_3\bar{c}_4.$$

Тогда $H^*B_P = \mathbf{Z}[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{f}, \bar{g}]$.

Доказательство. Рассмотрим естественное вложение $H^*B_S = \mathbf{Z}[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4] \subset \mathbf{R}[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4]$. В алгебре $\mathbf{R}[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4]$ рассмотрим подалгебру A_R, инвариантную относительно $W(P)$. Тогда $H^*B_P = A_Z = A_R \cap \mathbf{Z}[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4]$.

Зададим изоморфизм алгебр $\tau : \mathbf{R}[x_1, x_2, x_3, x_4] \to \mathbf{R}[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4]$ следующим образом:

$$x_1 \mapsto \bar{c}_1, \quad x_2 \mapsto \bar{c}_2, \quad x_3 \mapsto \bar{c}_3 + \frac{1}{2}\bar{c}_2, \quad x_4 \mapsto \bar{c}_4 + \frac{1}{2}\bar{c}_2.$$

Группа $W(P)$ переносится изоморфизмом τ на $\mathbf{R}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ и порождает группу W' с образующими

$$\begin{array}{llllll}
\phi_1': & x_1 \mapsto x_1 & \phi_2': & x_1 \mapsto x_1 & \phi_3': & x_1 \mapsto x_1 \\
 & x_2 \mapsto x_2 & & x_2 \mapsto x_2 & & x_2 \mapsto x_2 \\
 & x_3 \mapsto x_4 & & x_3 \mapsto -x_3 & & x_3 \mapsto x_3 \\
 & x_4 \mapsto x_3, & & x_4 \mapsto x_4, & & x_4 \mapsto -x_4.
\end{array}$$

Таким образом, W' – это группа Вейля группы $S^1 \times S^1 \times \mathrm{Sp}(2)$, и совершенно очевидно, что подалгеброй в $\mathbf{R}[x_1, x_2, x_3, x_4]$, инвариантной относительно W', является $A_R' = \mathbf{R}\left[x_1, x_2, x_3^2 + x_4^2, x_3^2x_4^2\right]$. Следовательно, $A_R =$

$\mathbf{R}\big[\tau(x_1),\tau(x_2),\tau\big(x_3^2+x_4^2\big),\tau\big(x_3^2x_4^2\big)\big]$. Несложные вычисления показывают, что

$$\tau(x_1)=\bar c_1,\quad \tau(x_2)=\bar c_2,\quad \tau\big(x_3^2+x_4^2\big)=\big(\bar c_3^2+\bar c_4^2\big)+\bar c_2(\bar c_3+\bar c_4)+\frac{1}{2}\bar c_2^2,$$

$$\tau(x_3^2x_4^2)=\bar c_3^2\bar c_4^2+\bar c_2\bar c_3\bar c_4(\bar c_3+\bar c_4)+\bar c_2^2\bar c_3\bar c_4+$$
$$+\frac{1}{4}\bar c_2^2\left(\big(\bar c_3^2+\bar c_4^2\big)+\bar c_2(\bar c_3+\bar c_4)+\frac{1}{4}\bar c_2^2\right).$$

Таким образом,

$$A_R=\mathbf{R}\big[\bar c_1,\bar c_2,\big(\bar c_3^2+\bar c_4^2\big)+\bar c_2(\bar c_3+\bar c_4),\bar c_3^2\bar c_4^2+\bar c_2\bar c_3\bar c_4(\bar c_3+\bar c_4)+\bar c_2^2\bar c_3\bar c_4\big]=$$
$$=\mathbf{R}[\bar c_1,\bar c_2,\bar f,\bar g].$$

Так как образующие A_R лежат в $\mathbf{Z}[\bar c_1,\bar c_2,\bar c_3,\bar c_4]$, имеем

$$A_Z=\mathbf{Z}[\bar c_1,\bar c_2,\bar f,\bar g].$$

Лемма доказана.

Теорема 3 *Пространство $M_{\bar p}$ имеет следующие группы когомологий:*

1) $H^i=\begin{cases}\mathbf{Z} & \textit{при } i=0,2,4,9,11,13,\\ 0 & \textit{при } i=1,3,5,7,10,12;\end{cases}$

2) группы $H^6(M_{\bar p})$ и $H^8(M_{\bar p})$ конечны, и их порядки равны $r=|\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+8\sigma_3|$.

Доказательство. Обозначим $\sigma_i=\sigma_i(p_1,\dots,p_5)$. Рассмотрим член E_2 спектральной последовательности расслоения $G//P\to B_P$:

z_7	0	$*$	0	$*$	0	$*$	0	$*$
z_1z_5	0	$z_1z_5\bar c_1, z_1z_5\bar c_2$	0	$*$	0	$*$	0	$*$
z_5	0	$z_5\bar c_1, z_5\bar c_2$	0	$*$	0	$*$	0	$*$
z_1z_3	0	$z_1z_3\bar c_1, z_1z_3\bar c_2$	0	$z_1z_3\bar c_1^2, z_1z_3\bar c_1\bar c_2,$ $z_1z_3\bar c_2^2, z_1z_3\bar f$	0	$*$	0	$*$
z_3	0	$z_3\bar c_1, z_3\bar c_2$	0	$z_3\bar c_1^2, z_3\bar c_1\bar c_2,$ $z_3\bar c_2^2, z_3\bar f$	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
z_1	0	$z_1\bar c_1, z_1\bar c_2$	0	$z_1\bar c_1^2, z_1\bar c_1\bar c_2,$ $z_1\bar c_2^2, z_1\bar f$	0	$z_1\bar c_1^3, z_1\bar c_1^2\bar c_2,$ $z_1\bar c_1\bar c_2^2, z_1\bar c_2^3,$ $z_1\bar c_1\bar f, z_1\bar c_2\bar f$	0	$*$
1	0	$\bar c_1, \bar c_2$	0	$\bar c_1^2, \bar c_1\bar c_2$ $\bar c_2^2, \bar f$	0	$\bar c_1^3, \bar c_1^2\bar c_2, \bar c_1\bar c_2^2,$ $\bar c_2^3, \bar c_1\bar f, \bar c_2\bar f$	0	$\bar c_1^3\bar c_2, \bar c_1^2\bar c_2^2, \bar c_1\bar c_2^3,$ $\bar c_2^4, \bar c_1^2\bar f, \bar c_1\bar c_2\bar f,$ $\bar c_2^2\bar f, \bar f^2, \bar g, \bar c_1^4$

Имеем

$$d_2 z_1 = \pm\rho^*(\bar{x}_1 - \bar{y}_1) = \rho^*(\sigma_1(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_5) - \sigma_1(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_5)) = \sigma_1 \cdot \bar{c}_1 - 2 \cdot \bar{c}_2.$$

Пусть $n \in Z$ таково, что $\sigma_1 + 2n = 1$. Тогда

$$\frac{Z(\bar{c}_1, \bar{c}_2)}{Z(\sigma_1 \cdot \bar{c}_1 - 2 \cdot \bar{c}_2)} = Z(n \cdot \bar{c}_1 + \bar{c}_2).$$

Обозначим через F_2 образ $d_2^{2,1}$; F_2 порождается элементами

$$d_2(z_1\bar{c}_1) = \sigma_1\bar{c}_1^2 - 2\bar{c}_1\bar{c}_2, \quad d_2(z_1\bar{c}_2) = \sigma_1\bar{c}_1\bar{c}_2 - 2\bar{c}_2^2.$$

Тогда $\mathbf{Z}\big(\bar{c}_1^2, \bar{c}_1\bar{c}_2, \bar{c}_2^2, \bar{f}\big)/F_2 = \mathbf{Z}\big((n-n^2)\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2, \bar{f}\big)$. Обозначим через F_4 образ $d_2^{4,1}$; F_4 порождается элементами

$$d_2\big(z_1\bar{c}_1^2\big) = \sigma_1 \cdot \bar{c}_1^3 - 2 \cdot \bar{c}_1^2\bar{c}_2, \quad d_2(z_1\bar{c}_1\bar{c}_2) = \sigma_1 \cdot \bar{c}_1^2\bar{c}_2 - 2 \cdot \bar{c}_1\bar{c}_2^2,$$

$$d_2\big(z_1\bar{c}_2^2\big) = \sigma_1 \cdot \bar{c}_1\bar{c}_2^2 - 2 \cdot \bar{c}_2^3, \quad d_2(z_1\bar{f}) = \sigma_1 \cdot \bar{c}_1\bar{f} - 2 \cdot \bar{c}_2\bar{f}.$$

Наконец, пусть F_6 — образ $d_2^{6,1}$; он порождается элементами

$$d_2\big(z_1\bar{c}_1^3\big) = \sigma_1\bar{c}_1^4 - 2\bar{c}_1^3\bar{c}_2, \quad d_2\big(z_1\bar{c}_2^3\big) = \sigma_1\bar{c}_1\bar{c}_2^3 - 2\bar{c}_2^4,$$

$$d_2\big(z_1\bar{c}_1^2\bar{c}_2\big) = \sigma_1\bar{c}_1^3\bar{c}_2 - 2\bar{c}_1^2\bar{c}_2^2, \quad d_2\big(z_1\bar{c}_1\bar{f}\big) = \sigma_1\bar{c}_1^2\bar{f} - 2\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{f},$$

$$d_2\big(z_1\bar{c}_1\bar{c}_2^2\big) = \sigma_1\bar{c}_1^2\bar{c}_2^2 - 2\bar{c}_1\bar{c}_2^3, \quad d_2\big(z_1\bar{c}_2\bar{f}\big) = \sigma_1\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{f} - 2\bar{c}_2^2\bar{f}.$$

Переходим к члену $E_3 = E_4$. Имеем

z_7	0	$*$	0	$*$	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	$*$	0	$*$	0	$*$
z_5	0	$nz_5\bar{c}_1 + z_5\bar{c}_2$	0	$*$	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	0	0	$*$	0	$*$
z_3	0	$nz_3\bar{c}_1 + z_3\bar{c}_2$	0	$\mathbf{Z}^4/z_3F_2$	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$*$
1	0	Z	0	$\mathbf{Z}^4/F_2$	0	$\mathbf{Z}^6/F_4$	0	$\mathbf{Z}^{10}/F_6$

Кроме того,

$$d_4(z_3) = \rho^*(\bar{x}_3 - \bar{y}_3) = \rho^*(\sigma_2(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_5) - \sigma_2(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_5))$$

$$= \sigma_2 \cdot \bar{c}_1^2 - \sigma_2(\bar{c}_2 + \bar{c}_3, \bar{c}_2 + \bar{c}_4, -\bar{c}_3, -\bar{c}_4)$$

$$= \sigma_2 \cdot \bar{c}_1^2 - \bar{c}_2^2 + \bar{c}_3^2 + \bar{c}_4^2 + (\bar{c}_3 + \bar{c}_4)\bar{c}_2 = \sigma_2 \cdot \bar{c}_1^2 - \bar{c}_2^2 + \bar{f}.$$

Следовательно,

$$Z^4/(F_2 \oplus Z(d_4(z_3))) = Z\big(\bar{f}, (n-n^2)\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2\big)/Z(d_4(z_3)) =$$
$$= Z\big((n-n^2)\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2\big).$$

Далее,

$$d_4(nz_3\bar{c}_1 + z_3\bar{c}_2) = \big(\sigma_2 \cdot \bar{c}_1^2 - \bar{c}_2^2 + \bar{f}\big)(n\bar{c}_1 + \bar{c}_2)$$
$$= n\sigma_2 \cdot \bar{c}_1^3 + \sigma_2 \cdot \bar{c}_1^2\bar{c}_2 - n \cdot \bar{c}_1\bar{c}_2^2 - \bar{c}_2^3 + n \cdot \bar{c}_1\bar{f} + \bar{c}_2\bar{f}.$$

Можно заметить, что последний элемент ненулевой в $\mathbf{Z}^6/F_4$. Пусть этот элемент порождает подгруппу F_1 в H^6B_P. Обозначим через F_2' образ $d_4^{4,3}$; F_2' порождается элементами $d_4(z_3\bar{f})$ и $d_4\big((n-n^2)z_3\bar{c}_1^2 + z_3\bar{c}_2^2\big)$. Несложные вычисления показывают, что $\operatorname{Ker}\big(d_4^{4,3}\big) = 0$. Рассмотрим $E_5 = E_6$:

z_7	0	$*$	0	$*$	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	$*$	0	$*$	0	$*$
z_5	0	$nz_5\bar{c}_1 + z_5\bar{c}_2$	0	$*$	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	0	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	0	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$*$
1	0	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}^6/(F_4 \oplus F_1)$	0	$\mathbf{Z}^{10}/\big(F_6 \oplus F_2'\big)$

Кроме того,

$$d_6(z_5) = \rho^*(\bar{x}_5 - \bar{y}_5) = \rho^*(\sigma_3(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_5) - \sigma_3(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_5))$$
$$= \sigma_3 \cdot \bar{c}_1^3 - \sigma_3(\bar{c}_2 + \bar{c}_3, \bar{c}_2 + \bar{c}_4, -\bar{c}_3, -\bar{c}_4)$$
$$= \sigma_3 \cdot \bar{c}_1^3 + (\bar{c}_2+\bar{c}_3)(\bar{c}_2+\bar{c}_4)\bar{c}_3 + (\bar{c}_2+\bar{c}_3)(\bar{c}_2+\bar{c}_4)\bar{c}_4 - (\bar{c}_2+\bar{c}_3)\bar{c}_3\bar{c}_4 - (\bar{c}_2+\bar{c}_4)\bar{c}_3\bar{c}_4$$
$$= \sigma_3 \cdot \bar{c}_1^3 + (\bar{c}_3 + \bar{c}_4)\bar{c}_2^2 + \big(\bar{c}_3^2 + \bar{c}_4^2\big)\bar{c}_2 = \sigma_3 \cdot \bar{c}_1^3 + \bar{f}\bar{c}_2.$$

Пусть этот элемент порождает подгруппу F_1' в H^6B_P. Далее, пусть F_1'' порождается элементом $d_6(nz_5\bar{c}_1 + z_5\bar{c}_2)$. Простые вычисления, которые мы опускаем, показывают, что F_1' и F_1'' ненулевые в группах $\mathbf{Z^6}/(F_4 \oplus F_1)$ и

$\mathbf{Z^{10}}/(F_6 \oplus F_2')$. Наконец, рассмотрим E_7:

z_7	0	$*$	0	$*$	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	$*$	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	$*$	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	0	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	0	0	$*$	0	$*$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$*$
1	0	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}$	0	$Z^6/(F_4 \oplus F_1 \oplus F_1')$	0	$\mathbf{Z}/(F_6 \oplus F_2' \oplus F_1'')$

Так как $d_8(z_7) = \sigma_4 \bar{c}_1^4 - \bar{g}$, то элемент z_7 в следующих размерностях не выживает. Итак,

$$H^1 = H^3 = H^5 = H^7 = 0, \quad H^2 = H^4 = \mathbf{Z}, \quad H^6(M_{\bar{p}}) = \frac{Z^6}{F_4 \oplus F_1 \oplus F_1'}.$$

Найдем r, равное порядку группы H^6:

$$r = \left| \det \begin{pmatrix} \sigma_1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & -2 \\ n\sigma_2 & \sigma_2 & -n & -1 & n & 1 \\ \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|,$$

где, напомним, $n = (1 - \sigma_1)/2$. После несложных вычислений, которые мы опускаем, получим, что

$$r = \left| \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3 \right|.$$

Теорема доказана.

2 Двойные частные групп Ли с интегрируемым геодезическим потоком.

2.1 Метод Тимма.

Все группы Ли и алгебры Ли в статье подразумеваются компактными, и аналитическими; для групп Ли G, H, $K \ldots$ их алгебры Ли будем обозначать $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{k}$ $\ldots$. Будем считать, что на группе Ли задана двусторонне инвариантная метрика.

Пусть M — риманово многообразие. На кокасательном расслоении T^*M существует естественная симплектическая структура. Напомним ее определение. Сначала определим дифференциальную 1-форму α на T^*M. Пусть

$\pi' : T^*M \to M$ — каноническая проекция. Рассмотрим элемент $(q,p) \in T^*M$, где $q \in M, p \in T_q^*M$. Тогда возникает отображение $d\pi' : T_{(q,p)}T^*M \to T_qM$, и мы полагаем $\alpha(\xi) = p(d\pi'(\xi))$ для $\xi \in T_{(q,p)}T^*M$. Наконец, 2-форма $\omega = d\alpha$ на T^*M задает симплектическую структуру на T^*M. Функция Гамильтона H на T^*M определяется следующим образом:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\langle p,p \rangle,$$

где $(q,p) \in T^*M$. Тогда геодезический поток на T^*M задается системой уравнений Гамильтона $\dot{q} = \mathrm{sgrad}(H(q))$. В координатах это выписывается достаточно просто. Пусть U — координатная окрестность на многообразии M, а $(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ — координаты в U. Рассмотрим окрестность U' в T^*M, состоящую из ковекторов, приложенных в точках из U. Тогда функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ на U' относят ковектору набор его значений на базисных векторах $\frac{\partial}{\partial q^1}, \frac{\partial}{\partial q^2}, \ldots,$
$\frac{\partial}{\partial q^n}$, и набор $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ задает координаты в U'. В этих координатах $\alpha = p_i dq^i$ и $\omega = dp_i \wedge dq^i$.

Следуя традиции работ [15], [16] мы будем действовать в касательном расслоении, которое технически более удобно при рассмотрении римановых субмерсий. Риманова метрика позволяет отождествить T^*M с TM, таким образом симплектическая структура переносится на TM. Этот изоморфизм задается формулой $v^i = g^{ij}(q)p_j$, где $v \in T_qM$. При этом форма $\omega = d(g_{ij}v^i) \wedge dq^j$ задает симплектическую структуру на TM.

Пусть, теперь, группа Ли G действует на M изометриями. Тогда G действует на T^*M и TM дифференцированиями, которые сохраняют симплектическую форму. Далее, действие группы G на M определяет гомоморфизм группы G в группу $Iso(M)$ изометрий многообразия M. Следовательно, дифференциал этого гомоморфизма представляет собой гомоморфизм алгебры Ли $\mathbf{g}$ в алгебру Ли киллинговых векторных полей на M. Таким образом, каждый вектор $X \in \mathbf{g}$ определяет векторное поле на M, которое мы тоже будем обозначать через X. Непосредственное выражение для поля X, заданного вектором $X \in \mathbf{g}$, следующее:

$$X(q) = \frac{d}{dt}(exp(tX) \cdot q)|_{t=0},$$

где $q \in M$.

Рассмотрим отображение момента

$$\Phi : TM \to \mathbf{g}^*,$$

которое определяется следующей формулой:

$$\Phi(q,v)(X) = \langle v, X(q) \rangle_q,$$

где $(q,v) \in TM$ и $X \in \mathbf{g}$.

На алгебре Ли $\mathbf{g}$ задана $Ad(G)$-инвариантная метрика, которая определяет изоморфизм между $\mathbf{g}^*$ и $\mathbf{g}$. Соответственно, возникает отображение

$$\Phi' : TM \to \mathbf{g},$$

которое мы тоже будем называть отображением момента.

Лемма 14 *Отображение момента Φ постоянно на траекториях геодезического потока в TM.*

В частности, функции вида $f \circ \Phi$, $f \in C^\infty(\mathbf{g}^*)$ являются первыми интегралами потока.

Доказательство.

Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита на M. Рассмотрим траекторию $(q(t), v(t))$ геодезического потока в TM, то есть $q(t)$ — геодезическая в M и $v(t) = \dot{q}(t)$. Продолжим $v(t)$ до векторного поля V на M. Пусть $X \in \mathbf{g}$, то есть определено киллингово поле, которые мы тоже обозначаем X. Тогда

$$\frac{d}{dt}(\Phi(q(t), v(t))(X)) = \frac{d}{dt}\langle v(t), X(q(t))\rangle_{q(t)} = V\langle V, X\rangle_{q(t)} =$$

$$= \langle \nabla_V V, X\rangle_{q(t)} + \langle V, \nabla_V X\rangle_{q(t)} = 0$$

для всех t (здесь $\nabla_V V = 0$, так как $q(t)$ — геодезическая, и $\langle V, \nabla_V X\rangle = 0$, поскольку X — киллингово).

Лемма 14 доказана.

Обозначим через $\mathcal{F}(\mathbf{g}^*)$ — пространство полиномиальных функций на $\mathbf{g}^*$. Оно наделяется скобками Пуассона $\{\ ,\ \}_{\mathbf{g}^*} = \{\ ,\ \}$ следующим образом.

Пусть $x \in \mathbf{g}^*$. Рассмотрим орбиту коприсоединенного представления $\mathcal{O} = Ad(G)x$. Тогда очевидно, что $T_x\mathcal{O} = \{ad(Y)x | Y \in \mathbf{g}\}$. На $\mathcal{O}$ можно завести симплектическую структуру. Рассмотрим $y, z \in T_x\mathcal{O}$. Тогда найдутся $Y, Z \in \mathbf{g}$ такие, что $y = ad(Y)x$ и $z = ad(Z)x$. Положим $\omega(y, z) = x([Y, Z])$. Возникшие скобки Пуассона $\{\ ,\ \}_\mathcal{O}$ называют скобками Ли-Пуассона.

Пусть, теперь, f, g гладкие функции на $\mathbf{g}^*$. В прежних обозначениях, положим

$$\{f, g\}(x) = \{f|_\mathcal{O}, g|_\mathcal{O}\}_\mathcal{O}(x).$$

Скобки Пуассона $\{\ ,\ \}$ в $\mathbf{g}^*$ можно описать и по иному. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — базис в $\mathbf{g}$, и C_{ij}^k — структурные константы, то есть $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$. Пусть $e^1, e^2, \ldots, e^m$ — двойственный базис в $\mathbf{g}^*$. Тогда для любых гладких функций f, g на $\mathbf{g}^*$ и любого $x = x_k e^k \in \mathbf{g}^*$

$$\{f, g\}(x) = -C_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x).$$

Пусть $\mathcal{F}(TM)$ — пространство гладких функций на TM, обладающее скобкой Пуассона $\{\ ,\ \}_{TM}$, возникшими из симплектической структуры на TM. Следующая лемма доказана в [15].

Лемма 15 *В вышеописанных условиях, отображение*

$$\Phi^* : \mathcal{F}(\mathbf{g}^*) \to \mathcal{F}(TM) : f \mapsto f \circ \Phi$$

согласовано со скобками Пуассона, то есть

$$\Phi^*(\{f, g\}) = \{\Phi^*(f), \Phi^*(g)\}_{TM},$$

для $f, g \in \mathcal{F}(\mathbf{g}^*)$.

Из определения скобок Пуассона на $\mathbf{g}^*$ немедленно вытекает, что если f — $Ad(G)$-инвариантная функция из $\mathcal{F}(\mathbf{g}^*)$, то $\{f, g\} = 0$ для любой гладкой функции g. На этом обстоятельстве основывается метод Тимма ([15]), описываемый следующей леммой.

Лемма 16 *В вышеописанных условиях, рассмотрим цепочку вложенных подгрупп* $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$. *Пусть* $pr_i : \mathbf{g}^* \to \mathbf{g}_i^*$ — *естественная проекция. Положим*

$$\mathcal{F}_i = \{p \circ pr_i | p - Ad(G_i)\text{-}\textit{инвариантный полином на } \mathbf{g}_i^* \},$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{L}(\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{F}_i)$$

(здесь через $\mathcal{L}(\ldots)$ *обозначена линейная оболочка соответствующего множества).*

Тогда любые две функции из пространства $\mathcal{F}$, *а, следовательно, и любые две функции из пространства* $\Phi^*(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}(TM)$ *находятся в инволюции.*

Доказательство.

Индукция по n.

n=0. Тогда $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ — пространство всех $Ad(G)$-инвариантных полиномов на $\mathbf{g}^*$, очевидно находящихся попарно в инволюции.

n → n+1. Пусть $f, g \in \mathcal{F}$. Заметим, что $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{F}_i) + \mathcal{F}_{n+1}$. Первое пространство в этой сумме соответствует цепочке групп $G_0 \subset \ldots \subset G_n$ и, по предположению индукции, состоит из функций, находящихся в инволюции. Значит, если $f, g \in \mathcal{L}(\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{F}_i)$, то $\{f, g\} = 0$; если одна из функций, например f, лежит в $\mathcal{F}_{n+1}$, то $\{f, g\} = 0$ в силу $Ad(G_{n+1})$-инвариантности функции f.

Лемма 16 доказана.

Таким образом, основная задача, возникающая при использовании метода Тимма — это подсчет "ранга"пространства $\mathcal{F}$, поскольку между функциями из этого пространства априори могут существовать нетривиальные зависимости.

2.2 Основная лемма о градиентах инвариантных полиномов

Пусть $\mathbf{g}$ — алгебра Ли с двусторонне инвариантной метрикой $\langle\ ,\ \rangle$. Для алгебры Ли $\mathbf{h}$ обозначим через $Z(\mathbf{h})$ ее центр:

$$Z(\mathbf{h}) = \{X \in \mathbf{h} | [X, Y] = 0,\ \forall Y \in \mathbf{h}\}.$$

Пусть $X \in \mathbf{g}$. Обозначим

$$N_{\mathbf{g}}(X) = Z(Ker(ad(X))).$$

Лемма 17 *Пусть $\mathcal{F}$ — пространство $Ad(G)$-инвариантных полиномов на $\mathbf{g}$.*
Тогда $N_{\mathbf{g}}(X) = \{\nabla_X(p) | p \in \mathcal{F}\}$.

Доказательство.
Итак, пусть $X \in \mathbf{g}$, возьмем $Ad(G)$-инвариантный полином p на $\mathbf{g}$. Обозначим, ради краткости, $\nabla_X(p) = \nabla$. Тогда, для любого $Y \in \mathbf{g}$ мы имеем

$$0 = \frac{d}{dt} p(X)|_{t=0} = \frac{d}{dt} p(Ad(exp(tY))X)|_{t=0} = \frac{d}{dt} p(X + t[Y, X])|_{t=0} =$$

$$= \langle \nabla, [Y, X] \rangle = \langle [X, \nabla], Y \rangle.$$

В силу произвольности $Y \in \mathbf{g}$ заключаем, что $[\nabla, X] = 0$. Рассмотрим произвольную картановскую подалгебру $\mathbf{t}$, содержащую элемент X и элемент ∇. Пусть W — группа Вейля группы Ли G. Для любого $w \in W$, который оставляет неподвижным X, и любого $Y \in \mathbf{t}$ имеем:

$$\langle \nabla, Y \rangle = \frac{d}{dt} p(X + tY)|_{t=0} = \frac{d}{dt} p(X + tAd(w)Y)|_{t=0} =$$

$$= \langle \nabla, Ad(w)Y \rangle = \langle Ad(w^{-1})\nabla, Y \rangle.$$

В силу произвольности Y, заключаем, что $Ad(w)\nabla = \nabla$. Итак, те элементы из группы Вейля, которые стабилизируют X будут стабилизировать и ∇. Рассмотрим систему корней на $\mathbf{t}$. Тогда корни, обращающиеся в нуль на X будут обращаться в нуль и на ∇. Но тогда, если $Y \in \mathbf{g}$ коммутирует с X, то при разложении по корневым подпространствам элемента Y будут получаться ненулевые координаты в точности в тех корневых подпространствах, которые соответствуют корням, обращающимся в нуль на элементе X. Но эти же корни будут обращаться в нуль и на элементе ∇, то есть $[\nabla, Y] = 0$. Значит, $\nabla \in Z(Ker(ad(X))) = N_{\mathbf{g}}(X)$.

Обратно, пусть $\nabla \in N_{\mathbf{g}}(X) = \mathbf{u}$. Рассмотрим картановскую подалгебру $\mathbf{t}$, содержащую $\mathbf{u}$ и, как и выше, группу Вейля W. Пусть $W_0 \subset W$ — подгруппа, оставляющая элементы из $\mathbf{u}$ неподвижными. Тогда факторгруппа $W' = W/W_0$ действует на $\mathbf{u}$ и порождается отражениями (отражения относительно гиперплоскостей, заданных корнями, нетривиальными на $\mathbf{u}$).

Заметим, что X — регулярный элемент $\mathbf{u}$, так как ни один нетривиальный на $\mathbf{u}$ корень уже не обращается на X в нуль.

По теореме Шевалле ([17]), существуют инвариантные относительно W' и независимые полиномы $p_1, p_2, \ldots, p_k$, где $k = \dim \mathbf{u}$. Так как X — регулярен, то можно показать, что градиенты этих полиномов в точке X образуют базис $\mathbf{u}$ (это является усилением результата Шевалле в [17], и доказано в Приложении A). Следовательно, их подходящая линейная комбинация p будет иметь градиент, равный ∇. Итак, p — инвариантен относительно W' и $\nabla_X(p) = \nabla$. Теперь продолжим p на все $\mathbf{t}$ инвариантным по W образом (при этом градиент в точках $\mathbf{u}$ останется прежним). Далее, продолжаем p с картановской подалгебры на всю $\mathbf{g}$, получая $Ad(G)$-инвариантный полином с искомым градиентом в точке X.

Лемма 17 доказана.

2.3 Определение и свойства ранга цепочки вложенных подалгебр Ли.

Пусть имеется пара алгебр Ли $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$, $\mathbf{h} \subset \mathbf{g}$. Пусть $\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{p}$ — ортогональное разложение относительно $Ad(G)$-инвариантной метрики на $\mathbf{g}$. Предположим, что имеется векторное подпространство $\mathbf{v} \subset \mathbf{g}$. Положим

$$rank((\mathbf{g}, \mathbf{h}), \mathbf{v}) = \max_{X \in \mathbf{v}} \dim(pr_{\mathbf{p}}(N_{\mathbf{g}}(X))),$$

где $pr_{\mathbf{p}} : \mathbf{g} \to \mathbf{p}$ — ортогональная проекция. Число $rank((\mathbf{g}, \mathbf{h}), \mathbf{v})$ назовем рангом пары $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ относительно пространства $\mathbf{v}$.

Пусть дана цепочка вложенных подалгебр Ли

$$\mathbf{g}_0 \subset \mathbf{g}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{g}_n,$$

и подпространство $\mathbf{v} \subset \mathbf{g}_n$. Обозначим через $pr_i : \mathbf{g}_n \to \mathbf{g}_i$ ортогональную проекцию.

Число

$$rank(\{\mathbf{g}_i\}_{i=0}^n, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{n-1} rank((\mathbf{g}_{i+1}, \mathbf{g}_i), pr_{i+1}(\mathbf{v}))$$

будем называть рангом цепочки $\{\mathbf{g}_i\}_i$ вложенных подалгебр.

Понятие ранга цепочки играет важную роль при определении числа независимых интегралов (Теорема 4) и его нужно уметь эффективно вычислять. Оставшаяся часть параграфа посвящена получению некоторых оценок снизу на ранг, позволяющих во многих приложениях доказывать полную интегрируемость.

Итак, пусть дана цепочка подалгебр $\{\mathbf{g}_i\}_{i=0}^n$ и подпространство $\mathbf{v} \subset \mathbf{g}_n$, как описано выше. Пусть $\mathbf{g}_{i+1} = \mathbf{g}_i \oplus \mathbf{p}_i$ — ортогональное разложение.

Для каждого $i = 0, \ldots, n$ рассмотрим максимальный тор T_i в G_i и картановскую подалгебру $\mathbf{t}_i$, касательную к T_i. Тогда T_i действует на $\mathbf{p}_i$ присоединенным образом:

$$Ad(t) : \mathbf{p}_i \to \mathbf{p}_i,$$

для $t \in T_i$.

Следовательно (см. например, [22]), пространство $\mathbf{p}_i$ раскладывается на сумму инвариантных подпространств:

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=0}^{m_i} \mathbf{p}_i^j.$$

Здесь $\mathbf{p}_i^0$ — слагаемое, на котором действие тривиально, а $\mathbf{p}_i^j$ при $j \neq 0$ — неприводимые слагаемые, каждое размерности 2. В каждом слагаемом $\mathbf{p}_i^j$, $j \neq 0$ можно выбрать два ортонормированных вектора $\{1, i\}$ (вещественную и мнимую единицы), так что каждое нетривиальное слагаемое будем считать одномерным комплексным подпространством. При этом действие тора будет задаваться следующим образом:

$$Ad(exp(Y))V = e^{i\alpha_i^j(Y)}V,$$

где $V \in \mathbf{p}_i^j$, $j \neq 0$ и α_i^j — нетривиальные линейные функции на $\mathbf{t}$ — корни действия T_i на $\mathbf{p}_i$. Кроме того, положив $\alpha_i^0 = 0$, можно придать смысл последней формуле и при $V \in \mathbf{p}_i^0$.

В дальнейшем, мы потребуем, чтобы множество корней $\{\alpha_i^j\}_{j=0}^{m_i}$ было независимым (в частности, это подразумевает $\mathbf{p}_i^0 = 0$). Легко видеть, что подобное условие не зависит от выбора максимального тора T_i.

Определим наборы чисел $\{a_i\}_{i=0}^{n-1}$, $\{b_i\}_{i=0}^{n-1}$ и $\{h_i\}_{i=0}^{n-1}$ следующим образом. Положим

$$h_i = rank(\mathbf{g}_i),$$

$$a_i = \max_{X \in \mathbf{v}} \dim(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(\mathrm{pr}_{i+1}(X))),$$

$$b_i = \max_{X \in \mathbf{v}} rank\{pr_{\mathbf{p}_i}(X), -i[pr_i(X), pr_{\mathbf{p}_i}(X)],$$

$$-[pr_i(X), [pr_i(X), pr_{\mathbf{p}_i}(X)]], \ldots, (-i)^k (ad(pr_i(X)))^k (pr_{\mathbf{p}_i}(X)), \ldots\}.$$

Отметим, что величины h_i, a_i, b_i элементарно вычисляются в каждой конкретной ситуации, несмотря на кажущуюся громоздкость определения (это будет продемонстрировано в конце статьи).

Лемма 18 *В вышеописанных условиях, пусть действие некоторого максимального тора в G_i на $\mathbf{p}_i$ имеет независимые нетривиальные корни. Тогда верна следующая оценка.*

$$rank((\mathbf{g}_{i+1}, \mathbf{g}_i), pr_{i+1}(\mathbf{v})) \geq a_i - h_i + b_i.$$

Доказательство.

Пусть U — открытое всюду плотное множество в $\mathbf{v}$, на котором достигаются максимумы в определении чисел a_i и b_i.

Обозначим оцениваемый ранг через r. По определению,

$$r = \max_{X \in \mathbf{v}} \dim(pr_{\mathbf{p}_i}(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X))).$$

Пусть $X \in U$, $X = X_1 + X_2$, где $X_1 \in \mathbf{g}_i, X_2 \in \mathbf{p}_i$. Тогда

$$r \geq \dim(pr_{\mathbf{p}_i}(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X))) = \dim(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X)) - \dim(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i) =$$

$$= a_i - rank(N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i).$$

Пусть $Y \in N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i = Z(Ker(ad(X))) \cap \mathbf{g}_i$. Так как $X \in Ker(ad(X))$, то $[Y, X] = 0$, то есть $[Y, X_1] = [Y, X_2] = 0$. Таким образом, мы показали, что подалгебра $N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i$ коммутирует с $X_1 \in \mathbf{g}_i$ и с $X_2 \in \mathbf{p}_i$. Следовательно, можно найти максимальный тор T в G_i, касательная алгебра $\mathbf{t}$ которого будет являться картановской подалгеброй в $\mathbf{g}_i$ и будет содержать подалгебру $N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i$ и элемент X_1. Рассмотрим следующую подалгебру в $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{h} = \{Y \in \mathbf{t} | [Y, X_2] = 0\}.$$

По вышеизложенному, $N_{\mathbf{g}_{i+1}}(X) \cap \mathbf{g}_i \subset \mathbf{h}$. Следовательно, $r \geq a_i - rank(\mathbf{h})$.

Далее, тор T действует на $\mathbf{p}_i$ присоединенным образом, и для него можно найти разложение

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^{m_i} \mathbf{p}^j,$$

аналогичное тому, которое проделывалось перед формулировкой леммы (напомним, что из условия следует, что нет тривиального слагаемого). То есть

$$Ad(exp(Y))V = e^{i\alpha^j(Y)}V,$$

где $V \in \mathbf{p}^j$ и α^j — корни на $\mathbf{t}$, которые по условию независимы.

Следовательно,

$$[Y, V] = i\alpha^j(Y)V,$$

для $V \in \mathbf{p}^j$.

Пусть $X_2 = \sum_{j=0}^{m_i} V_j$. Тогда $(-i)^k(ad(X_1))^k X_2 = (\alpha(X_1))^k V_j$. По условию, $rank\{X_2, -i[X_1, X_2], \ldots, (-i)^k(ad(X_1))^k X_2, \ldots\} = b_i$. Значит, среди векторов $\{V_j\}_{j=1}^{m_i}$ найдется b_i штук ненулевых. Пусть, для определенности, это векторы $V_1, V_2, \ldots, V_{b_i}$. Тогда подалгебра $\mathbf{h}$ выделяется из $\mathbf{t}$ условием $\alpha^1 = \alpha^2 = \ldots = \alpha^{b_i} = 0$. Учитывая линейную независимость корней α^j, $j \neq 0$, заключаем, что $rank(\mathbf{h}) \leq rank(\mathbf{t}) - b_i = h_i - b_i$. Значит, $r \geq a_i - h_i + b_i$.

Лемма 18 доказана.

2.4 Основная теорема о числе независимых интегралов.

Пусть G — компактная группа Ли, как и ранее, снабженная двусторонне инвариантной метрикой $\langle\ ,\ \rangle$, Определим изометрическое действие группы $G \times G$ на G следующим образом:

$$(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1},$$

для g_1, g_2 и $g \in G$. Пусть H и K — подгруппы Ли в G. Тогда $H \times K$ как подгруппа в $G \times G$ действует на G. Предположим, что рассмотренное действие группы $H \times K$ свободно. Тогда фактор-пространство $M = H \backslash G / K$ каноническим образом наделяется структурой риманова многообразия и называется *двойным частным* группы Ли G.

Основной целью данного параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 4 *Рассмотрим $M = H \backslash G / K$ — двойное частное группы G. Положим*

$$\mathbf{v} = (\mathbf{h} + \mathbf{k})^{\perp} \subset \mathbf{g}.$$

Пусть существуют цепочки вложенных алгебр Ли:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \subset \ldots \subset \mathbf{h}_l = \mathbf{g},$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 \subset \ldots \subset \mathbf{k}_m = \mathbf{g},$$

и $r_1 = rank(\{\mathbf{h}_i\}_i, \mathbf{v})$, $r_2 = rank(\{\mathbf{k}_i\}_i, \mathbf{v})$, $r_3 = rank(G)$.

Тогда для геодезического потока на M существует по крайней мере $r_1 + r_2 - r_3$ функционально независимых первых интегралов, находящихся в инволюции.

Доказательство.

Поскольку $G \times G$ действует на G, то определено отображение момента

$$\Phi' : TG \to \mathbf{g} \oplus \mathbf{g}.$$

Воспользуемся методом Тимма по отношению к цепочкам $\{H_i\}_i$ и $\{K_j\}_j$. То есть, для каждого $i = 1, \ldots, l$ и $j = 1, \ldots, m$ определим семейства полиномов $\mathcal{F}_{1i}$ и $\mathcal{F}_{2j}$ на $\mathbf{g}$ следующим образом:

$$\mathcal{F}_{1i} = \{p \circ pr_{\mathbf{h}_i} | p - Ad(H_i)\text{-инвариантный полином на } \mathbf{h}_i\ \},$$

$$\mathcal{F}_{2j} = \{p \circ pr_{\mathbf{k}_j} | p - Ad(K_j)\text{-инвариантный полином на } \mathbf{k}_j\ \},$$

и положим $\mathcal{F}_1 = \mathcal{L}(\cup_{i=1}^{l} \mathcal{F}_{1i})$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{L}(\cup_{j=1}^{m} \mathcal{F}_{2j})$. Лемма 16 утверждает, что пространства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ образованы полиномами на $\mathbf{g}$, находящимися попарно в инволюции.

Положим

$$\mathcal{F} = \{p \circ pr_1 | p \in \mathcal{F}_1\} + \{p \circ pr_2 | p \in \mathcal{F}_2\} \subset \mathcal{F}(\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}),$$

где pr_1 и pr_2 — проекции, соответственно, на первое и второе слагаемое в $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$. Поскольку элементы из $\mathbf{g} \oplus 0$ коммутируют с элементами из $0 \oplus \mathbf{g}$, то $\mathcal{F}$ состоит из полиномов на $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$, находящихся попарно в инволюции. Следовательно, пространство $\Phi'^*(\mathcal{F})$ состоит из функций на TG, находящихся в инволюции.

Лемма 19 *Для любых* $(g_1, g_2) \in G \times G$ *и* $v \in TG$

$$\Phi'((g_1, g_2) \cdot v) = Ad(g_1, g_2)\Phi'(v).$$

Доказательство.

Для $g \in G$ обозначим через L_g и R_g левый и правый сдвиги, то есть $L_g(h) = gh$, $R_g(h) = hg$. Тогда любой касательный вектор к G в точке g можно записать как $v = d_1 L_g(X) = dL_g(X)$, где $X \in \mathbf{g}$. Пусть $dL_g(X) \in TG$, $(Y, Z) \in \mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$. Несложные выкладки показывают:

$$\Phi(dL_g(X))(Y, Z) = \langle dL_g(X), (Y, Z) \cdot g\rangle = \langle dL_g(X), dR_g(Y) - dL_g(Z)\rangle =$$
$$= \langle dR_{g^{-1}} \circ dL_g(X), Y\rangle + \langle -X, Z\rangle = \langle Ad(g)X, Y\rangle + \langle -X, Z\rangle.$$

Значит

$$\Phi'(dL_g(X)) = (Ad(g)X, -X).$$

Тогда

$$\Phi'((g_1, g_2) \cdot v) = \Phi'(dL_{g_1} \circ dR_{g_2^{-1}} \circ dL_g(X)) =$$
$$= \Phi'(dL_{g_1 g g_2^{-1}}(Ad(g_2)X)) = (Ad(g_1 g g_2^{-1})(Ad(g_2)X), -Ad(g_2)X) =$$
$$= (Ad(g_1 g)X, -Ad(g_2)X) = Ad(g_1, g_2)(Ad(g)X, -X) =$$
$$= Ad(g_1, g_2)\Phi'(v).$$

Лемма 19 доказана.

Рассмотрим риманову субмерсию $\phi : G \to M$ (определение и свойства римановой субмерсии можно найти в [14]), канонически определяемую свободным действием $H \times K$ на G. Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}$ — пространства вертикальных и горизонтальных векторов этой субмерсии, соответственно. Очевидно, что действие группы $H \times K$ ограничивается на $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}$, и что $\mathcal{H}/H \times K = TM$. Пусть $\psi = d\phi|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to TM$ — возникающая субмерсия. Очевидно, что ψ сохраняет симплектическую структуру.

Пусть p — $Ad(H_i)$-инвариантный полином на $\mathbf{h}_i$. Рассмотрим функцию $f = p \circ pr_{\mathbf{h}_i} \circ pr_1 \circ \Phi' \in \Phi'^*(\mathcal{F})$. Лемма 19 показывает, что для $(h, k) \in H \times K$ и $v \in TG$,

$$f((h,k)\cdot v) = p\circ pr_{\mathbf{h}_i}\circ pr_1(Ad(h,k)\Phi'(v)) =$$

$$= p\circ pr_{\mathbf{h}_i}(Ad(h)(pr_1\circ\Phi'(v))) = p(Ad(h)(pr_{\mathbf{h}_i}\circ pr_1\circ\Phi'(v))) = f(v)$$

(здесь мы пользуемся $Ad(H_i)$-инвариантностью проекции $pr_{\mathbf{h}_i}$ и тем, что $h \in H \subset H_i$). То же самое остается верным, если полином p заменить $Ad(K_i)$-инвариантным полиномом на $\mathbf{k}_i$. Но тогда, уже для всех $f \in \Phi'^*(\mathcal{F})$, мы имеем $f((h,k)\cdot v) = f(v)$. Следовательно, все функции из $\Phi'^*(\mathcal{F})$ опускаются на TM.

Отметим, что субмерсия ϕ проектирует горизонтальные геодезические на G в геодезические на M (см. [14]), поэтому если отображение Φ' инвариантно относительно геодезического потока на TG, то при опускании функций из $\Phi'^*(\mathcal{F})$ на TM мы получим функции, постоянные на геодезическом потоке. То что Φ' постоянно на геодезическом потоке следует из Леммы 14.

Лемма 20 *Пусть $f, g : \mathcal{H} \to \mathbf{R}$ — две гладкие $H\times K$-инвариантные функции и $\tilde f, \tilde g : TM \to \mathbf{R}$ — индуцированные функции. Тогда*

$$\{f,g\}_{TG}|_{\mathcal{H}} = \{\tilde f, \tilde g\}_{TM}\circ\psi.$$

Кроме того, если дано семейство $H\times K$-инвариантных функций $f_1,\ldots,f_n : \mathcal{H} \to \mathbf{R}$, независимых почти всюду в $\mathcal{H}$, то индуцированные функции $\tilde f_1,\ldots,\tilde f_n : TM \to \mathbf{R}$ независимы почти всюду в TM.

Доказательство.

По условию, $f = \psi\circ\tilde f$ и $g = \psi\circ\tilde g$. Без труда проверяется, что $d\psi(\,\mathrm{sgrad}(f)) = \mathrm{sgrad}(\tilde f)$, поэтому

$$\{f,g\}_{TG}|_{\mathcal{H}} = dg(\,\mathrm{sgrad}(f)) = d\tilde g(d\psi(\,\mathrm{sgrad}(f))) =$$

$$= d\tilde g(\,\mathrm{sgrad}(\tilde f)) = \{\tilde f,\tilde g\}_{TM}.$$

Второе утверждение леммы совершенно очевидно.

Лемма 20 доказана.

Таким образом, чтобы доказать теорему, надо найти $r = r_1 + r_2 - r_3$ функций из $\Phi'^*(\mathcal{F})$, независимых почти всюду в $\mathcal{H}$. В силу аналитичности, достаточно установить независимость в одной точке.

Положим $\mathbf{w} = (\mathbf{h}\oplus\mathbf{k})^\perp$ — векторное подпространство в $\mathbf{g}\oplus\mathbf{g}$. Обозначим $\mathcal{R} = \{(X,-Y)|\exists g\in\mathbf{g}, Ad(g)X = Y\} \subset \mathbf{g}\oplus\mathbf{g}$.

Лемма 21 *Во введенных выше обозначениях,*

$$\Phi'(\mathcal{H}) = \mathcal{R}\cap\mathbf{w}.$$

Далее, пусть $v = X \in \mathbf{g}$ — горизонтальный касательный вектор в единице группы G. Тогда $d\Phi'(T_v\mathcal{H})$ является векторным подпространством в $\mathbf{g}\oplus\mathbf{g}$ и равно $(\Delta Ker(ad(X)))^\perp\cap\mathbf{w}$, где

$$\Delta Ker(ad(X)) = \{(Y,Y)|[Y,X]=0\}.$$

Доказательство.

Пусть $v = dL_g(X) \in \mathcal{H}$, где $g \in G, X \in \mathbf{g}$. Как было показано при доказательстве Леммы 19,

$$\Phi'(v) = \Phi'(dL_g(X)) = (Ad(g)X, -X) \in \mathcal{R}.$$

Далее, вертикальное пространство субмерсии ϕ в точке g равно

$$V_g = \{dR_g(Y) - dL_g(Z) | (Y, Z) \in \mathbf{h} \oplus \mathbf{k}\}.$$

Следовательно, горизонтальность вектора v означает, что для любых $Y \in \mathbf{h}, Z \in \mathbf{k}$,

$$0 = \langle dL_g(X), dR_g(Y) - dL_g(Z)\rangle = \langle Ad(g)X, Y\rangle - \langle X, Z\rangle.$$

Таким образом, $Ad(g)X \in \mathbf{h}^\perp$ и $X \in \mathbf{k}^\perp$. Это и значит, что $\Phi'(v) \in \mathbf{w}$.

Обратно, если $(X, Y) \in \mathcal{R} \cap \mathbf{w}$, то $X = -Ad(g)Y$ для некоторого $g \in G$ и аналогичными выкладками проверяется, что $dL_g(Y)$ горизонтален, то есть лежит в $\mathcal{H}$.

Далее, пусть $v = X \in \mathbf{g}$ — горизонтальный касательный вектор в единице группы G. Искомое подпространство $d\Phi'(T_v\mathcal{H})$ вложено в подпространство $d\Phi'(T_vTG)$. Используя непосредственное выражение для Φ', мы находим:

$$d\Phi'(T_vTG) = \{([Y, X] + Z, -Z) | Y, Z \in \mathbf{g}\}.$$

Тогда вектор (V, W) принадлежит $(d\Phi'(T_vTG))^\perp$ тогда, и только тогда, когда для любых $Y, Z \in \mathbf{g}$

$$0 = \langle([Y, X] + Z, -Z), (V, W)\rangle = \langle [Y, X], V\rangle + \langle Z, V\rangle - \langle Z, W\rangle =$$

$$= \langle Y, [X, V]\rangle + \langle Z, V - W\rangle.$$

Значит, $V - W = [X, V] = 0$. Таким образом, $(d\Phi'(T_vTG))^\perp = \Delta Ker(ad(X))$. Учитывая, что $d\Phi'(T_v\mathcal{H}) = d\Phi'(T_vTG) \cap \mathbf{w}$, получаем, что

$$d\Phi'(T_v\mathcal{H}) = (\Delta Ker(ad(X)))^\perp \cap \mathbf{w}.$$

Лемма 21 доказана.

Положим $\mathbf{h}_{i+1} = \mathbf{h}_i \oplus \mathbf{p}_i$ и $\mathbf{k}_{i+1} = \mathbf{k}_i \oplus \mathbf{q}_i$. Пусть U — открытое всюду плотное множество в $\mathbf{v}$, состоящее из тех $X \in \mathbf{v}$, для которых

$$c_{i+1} = rank((\mathbf{h}_{i+1}, \mathbf{h}_i), pr_{i+1}(\mathbf{v})) = \dim(pr_{\mathbf{p}_i}(N_{\mathbf{h}_{i+1}}(X))),$$

$$d_{j+1} = rank((\mathbf{k}_{j+1}, \mathbf{k}_j), pr_{j+1}(\mathbf{v})) = \dim(pr_{\mathbf{q}_j}(N_{\mathbf{k}_{j+1}}(X)),$$

для $i = 0, \ldots, l-1$ и $j = 0, \ldots, m-1$.

Рассмотрим множество $\mathcal{F}_1 = \mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{l-1} \mathcal{F}_{1i}) + \mathcal{F}_{1l}$. По Лемме 17, градиенты функций из $\mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{l-1} \mathcal{F}_{1i})$ в точке $X \in U$ образуют векторное подпространство $N_{\mathbf{h}_1}(pr_1(X)) + N_{\mathbf{h}_2}(pr_2(X)) + \ldots + N_{\mathbf{h}_{l-1}}(pr_{l-1}(X))$ в $\mathbf{h}_{l-1}$. Следовательно, при проектировании в $\mathbf{p}_{l-1}$ все эти градиенты дадут нуль. С другой стороны, при проектировании в $\mathbf{p}_{l-1}$ градиенты функций из $\mathcal{F}_{1l}$ дадут подпространство $pr_{\mathbf{p}_{l-1}}(N_{\mathbf{h}_l}(X))$ размерности c_l. Значит можно выбрать c_l функций из $\mathcal{F}_{1l}$ таких, что проекции их градиентов в точке $X \in U$ в подпространство $\mathbf{p}_{l-1}$ независимы.

Применяя те же рассуждения к разложению $\mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{l-1} \mathcal{F}_{1i}) =$
$= \mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{l-2} \mathcal{F}_{1i}) + \mathcal{F}_{1l-1}$ и так далее $\ldots$, мы построим $c_1 + c_2 + \ldots + c_l = r_1$ функций $f_1, f_2, \ldots, f_{r_1}$ из $\mathcal{F}_1$, проекции градиентов которых в точках $X \in U$ в подпространство $\mathbf{p}_0 \oplus \mathbf{p}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{p}_{l-1} = (\mathbf{h})^\perp$ независимы.

Точно те же рассуждения позволяют найти $d_1 + \ldots + d_m = r_2$ функций $f_{r_1+1}, f_{r_1+2}, \ldots, f_{r_1+r_2}$ из $\mathcal{F}_2$, с независимыми при проекции в $(\mathbf{k})^\perp$ градиентами в точках $X \in U$. Теперь взяв композиции первых r_1 функций с проекцией pr_1 и композиции последних r_2 функций с pr_2, мы получим ровно r_1+r_2 функций из $\mathcal{F}$, проекции градиентов которых в точках $(X, -X), X \in U$ в подпространство $\mathbf{w} = (\mathbf{h} \oplus \mathbf{k})^\perp$ независимы. Снова обозначим найденные функции через $f_1, \ldots, f_{r_1+r_2}$.

Фиксируем $X \in U$. Пусть $\mathbf{u} = Ker(ad(X))$ — подалгебра, содержащая X, рассмотрим подпространство $\Delta\mathbf{u}$ в $\mathbf{g} \oplus \mathbf{g}$.

Лемма 22 *Во введенных обозначениях, пространство*

$$pr_{\mathbf{w}}(\{\nabla_X(f) | f \in \mathcal{F}\}) \cap \Delta\mathbf{u}$$

является коммутативной подалгеброй в $\Delta\mathbf{u}$.

Доказательство.

Докажем, сначала, что пространство $pr_{\mathbf{h}^\perp}(\{\nabla_X(f) | f \in \mathcal{F}_1\}) \cap \mathbf{u}$ представляет собой коммутативную подалгебру в $\mathbf{u}$. Поскольку

$$pr_{\mathbf{h}^\perp}(\{\nabla_X(h) | f \in \mathcal{F}_1\}) \cap \mathbf{u} = pr_{\mathbf{h}^\perp}(N_{\mathbf{h}_1}(pr_1(X))) \cap \mathbf{u} +$$

$$+ pr_{\mathbf{h}^\perp}(N_{\mathbf{h}_2}(pr_2(X))) \cap \mathbf{u} + \ldots + pr_{\mathbf{h}^\perp}(N_{\mathbf{h}_l}(pr_l(X))) \cap \mathbf{u},$$

то для этого надо показать, что элементы из $pr_{\mathbf{h}^\perp}(N_{\mathbf{h}_k}(pr_k(X))) \cap \mathbf{u}$ и из $pr_{\mathbf{h}^\perp}(N_{\mathbf{h}_{k+i}}(pr_{k+i}(X))) \cap \mathbf{u}$, $i \geq 0$ коммутируют между собой.

Итак, пусть $Y_1 + Y_2 \in N_{\mathbf{h}_k}(pr_k(X)))$, $Y_1 \in \mathbf{h}$, $Y_2 \in \mathbf{h}^\perp$, $Y_2 \in \mathbf{u}$ и $Z_1 + Z_2 \in N_{\mathbf{h}_{k+i}}(pr_{k+i}(X)))$, $Z_1 \in \mathbf{h}$, $Z_2 \in \mathbf{h}^\perp$, $Z_2 \in \mathbf{u}$. Наша задача, таким образом, показать, что $[Y_2, Z_2] = 0$. Так как $Z_2 \in \mathbf{u}$, то $[Z_2, X] = 0$. Но $Z_2 \in \mathbf{h}_{k+i}$, поэтому $[Z_2, pr_{k+i}(X)] = 0$. Далее, $Z_1 + Z_2 \in Z(Ker(ad(pr_{k+i}(X))))$, следовательно, $[Z_1 + Z_2, pr_{k+i}(X)] = 8$. Значит, $[Z_7, pr_{k+i}(X)] = 1$. Поскольку $Z_5 \in \mathbf{h} \subset \mathbf{h}_k$, мы заключаем, что $[Z_1, pr_k(X)] = 0$, то есть $Z_1 \in Ker(ad(pr_k(X)))$. У нас $Y_1 + Y_5 \in Z(Ker(ad(pr_k(X))))$, следовательно, $[Y_1 + Y_2, Z_9] = 0$. Из соображений размерности, $[Y_1, Z_1] = [Y_2, Z_1] = 0$.

Далее, $Y_2 \in \mathbf{u}$, значит $[Y_9, X] = 0$, откуда $[Y_2, pr_{k+i}(X)] = 0$. Но $Z_1 + Z_2 \in Z(Ker(ad(pr_{k+i}(X))))$, поэтому $[Z_1 + Z_2, Y_2] = 0$. Мы выше уже доказали, что $[Y_2, Z_1] = 0$, следовательно, $[Y_2, Z_2] = 0$.

Итак, мы показали коммутативность подалгебры $pr_{\mathbf{h}^\perp}(\{\nabla_X(f) | f \in \mathcal{F}_1\}) \cap \mathbf{u}$. Точно так же доказывается коммутативность подалгебры $pr_{\mathbf{k}^\perp}(\{\nabla_X(f) | f \in \mathcal{F}_2\}) \cap \mathbf{u}$. А это и влечет коммутативность подалгебры $pr_{\mathbf{w}}(\{\nabla_X(f) | f \in \mathcal{F}\}) \cap \Delta\mathbf{u}$ в $\Delta\mathbf{u}$.

Лемма 22 доказана.

Рассмотрим, теперь, найденные нами функции $f_1, \ldots, f_{r_1+r_2}$. Очевидно, что

$$\dim pr_{(\Delta\mathbf{u})^\perp\cap\mathbf{w}}\mathcal{L}\{\nabla_X(f_1), \ldots, \nabla_X(f_{r_1+r_2})\} =$$

$$= \dim pr_{\mathbf{w}}\mathcal{L}\{\nabla_X(f_1), \ldots, \nabla_X(f_{r_1+r_2})\} -$$

$$- \dim((pr_{\mathbf{w}}\mathcal{L}\{\nabla_X(f_1), \ldots, \nabla_X(f_{r_1+r_2})\}) \cap \Delta\mathbf{u}) =$$

$$= r_1 + r_2 - \dim((pr_{\mathbf{w}}\mathcal{L}\{\nabla_X(f_1), \ldots, \nabla_X(f_{r_1+r_2})\}) \cap \Delta\mathbf{u}).$$

Но из леммы 22 следует, что пространство $(pr_{\mathbf{w}}\mathcal{L}\{\nabla_X(f_1), \ldots$ $\ldots, \nabla_X(f_{r_1+r_2})\}) \cap \Delta\mathbf{u}$ содержится в коммутативной подалгебре алгебры $\Delta\mathbf{u}$, то есть его размерность не превышает ранга $\Delta\mathbf{u}$, который, в свою очередь, равен рангу $\mathbf{g}$, то есть r_3.

Итак, можно найти $r = r_1+r_2-r_3$ функций, скажем, $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}$ таких, что проекции их градиентов в точке $(X, -X)$ на подпространство $(\Delta\mathbf{u})^\perp\cap\mathbf{w}$ независимы. В соответствии с Леммой 21, $(\Delta\mathbf{u})^\perp \cap \mathbf{w} = d\Phi(T_X\mathcal{H})$, следовательно функции $\Phi'^*(f_1), \ldots, \Phi'^*(f_r)$ будут независимы в точке $X \in \mathcal{H}$. По аналитичности, заключаем независимость $\Phi'^*(f_1), \Phi'^*(f_2), \ldots, \Phi'^*(f_r) \in \Phi'^*(\mathcal{F})$ почти всюду в $\mathcal{H}$, что завершает доказательство Теоремы 4.

2.5 Приложения к некоторым неоднородным пространствам положительной секционной кривизны.

Пример 1.

Рассмотрим в качестве группы G группу $U(3) \times U(2) \times U(1)$, где $U(3)$ снабжена стандартной двусторонне инвариантной метрикой и $U(2) \times U(1)$ вложена в $U(3)$ в качестве блочных матриц с двумя блоками размера 2×2 и 1×1, то есть

$$G = \{(X, \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 3 & z \end{pmatrix})|X \in U(6), Y \in U(2), z \in U(1)\}.$$

Определим подгруппы $H, K \subset G$ следующим образом.

$$H = \{(X, X)|X \in U(7) \times U(1) \subset U(3)\},$$

$$K = \{(\begin{pmatrix} z & 0 & 7 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w^p & 0 & 0 \\ 5 & w^q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})|z, w \in U(1)\},$$

где p и q взаимно простые и положительные.

Без труда проверяется, что группа $H \times K$ действует на G свободно, то есть возникает двойное частное $M_{p,q} = H\backslash G/K$ размерности 7.

На самом деле легко увидеть, что определенные нами $M_{p,q}$ изометричны двойному частному группы $U(3)$ по подгруппе $K \subset U(3)\times U(3)$ относительно однородной метрики на $U(3)$ "масштабированной"вдоль векторов, касательных к подгруппе $U(2)\times U(3)$ (такая метрика на $U(3)$ уже не будет двусторонне инвариантной). Пространства $M_{p,q}$ были найдены Эшенбургом, который показал в [8], что их секционная кривизна строго положительна.

Зададим цепочки подгрупп.

$$H_0 = H, K_0 = K,$$
$$H_1 = \{(X,Y)|X,Y \in G(2)\times U(1) \subset U(0)\},$$
$$H_2 = G,$$
$$K_1 = \{(\begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 & 1 & 7 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{pmatrix})|z_1, z_2, z_3, w_1, w_5, w_3 \in U(1)\},$$
$$K_2 = \{(\begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix})|X \in U(2), z_1, z_2, z_3, w \in U(1)\},$$
$$K_3 = \{(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix})|X, Y \in U(2), z, w \in U(1)\},$$
$$K_4 = U.$$

Тогда

$$\mathbf{v} = (\mathbf{h}+\mathbf{k})^{\perp} =$$
$$= \{(\begin{pmatrix} iqt & \alpha & \beta \\ -\bar{\alpha} & -ipt & \gamma \\ -\bar{\beta} & -\bar{\gamma} & i(q-p)t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -iqt & -\alpha & 0 \\ \bar{\alpha} & ipt & 0 \\ 0 & 0 & -i(q-p)t \end{pmatrix})|$$
$$|t \in \mathbf{R}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}\}.$$

Указанным подгруппам соответствуют цепочки подалгебр. Посчитаем числа r_1, r_5 и r_3 из Теоремы 4.

Рассмотрим элемент $X_1 = (diag(iq, -ip, i(q-p)), diag(-iq, ip, i(p-q))) \in \mathbf{v}$. Очевидно, что X_6 — регулярен в $\mathbf{g}$. Поэтому $N_{\mathbf{g}}(X_1)$ совпадает с $\mathbf{k}_3$ (картановская подалгебра в $\mathbf{g}$), то есть состоит из элементов вида $(diag(ia_1, ia_2, ia_3)$,
$diag(ib_7, ib_2, ib_3)), a_i, b_i \in \mathbf{R}$. При проектировании, ортогонально подалгебре $\mathbf{k}_6 = \mathbf{k}$ немедленно получим пространство элементов вида $(dzag(i(a_1 - b_1), i(a_2-b_2), i(a_3-b_3)), diag(i(b_1-a_1), i(b_2-a_3), i(b_3-a_3)))$. Таким образом, $rank((\mathbf{h}_7, \mathbf{h}_0), \mathbf{v}) = 3$. Положим

$$X_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы собираемся посчитать числа a_i, b_i, h_i из Леммы 18. Имеем, $X_1 + (X_2, 0) \in \mathbf{v}$, $X_1 \in \mathbf{h}_1$ и $(X_4, 0) \in (\mathbf{h}_1)^\perp$. Непосредственно проверяем, что векторы $(X_2, 0)$ и $(-i) \cdot [X_1, (X_2, 7)]$ линейно независимы, то есть $b_1 = 2$ (здесь умножение на $-i$ следует понимать, конечно, в смысле комплексной структуры на корневых подпространствах) . Далее, $h_1 = a_1 = 6$. Учитывая, что корни действия K_5(это максимальный тор в G) на $(\mathbf{h}_1)^\perp$ независимы, применяем Лемму 16 и получаем, что $rank((\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1), \mathbf{v}) \geq a_2 + b_1 - h_1 = 2$. Суммируя, находим $r_1 = rank((\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1), \mathbf{v}) + rank((\mathbf{h}_4, \mathbf{h}_0), \mathbf{v}) \geq 5$.

Теперь посчитаем r_2. Заметим, что элемент $X_1 \in \mathbf{k}_1$ является регулярным элементом в $\mathbf{k}_1$, поэтому $N_{\mathbf{k}_1}(X_1) = \mathbf{k}_4$. Значит, $rank((\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0), \mathbf{v}) = \dim pr_{(\mathbf{k}_0)^\perp}(\mathbf{k}_1) = 6 - 2 = 1$. Далее мы собираемся применять Лемму 18, поэтому сразу заметим, что K_1 дVйствует на всех ортогональных дополнениях $(\mathbf{k}_i)^\perp$ в $\mathbf{k}_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$ с линейно независимыми корнями. Очевидно, что $h_1 = h_2 = h_3 = 6$ и $a_8 = a_2 = a_3 = 9$ (надо опять вспомнить про регулярный элемент X_1). Посчитаем b_i, $i = 1, 2, 3$. Положим

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X_1 + (X_3, -X_3) \in \mathbf{v}$, $pr_{\mathbf{k}_2}(X_1 + (X_3, -X_3)) = X_1 + (0, -X_3)$, причем $(0, -X_3) \in (\mathbf{k}_1)^\perp$. Значит, $b_1 = 1$. Аналогично, $X_1 + (X_3, -X_2) \in \mathbf{k}_3$, $(X_3, 0) \in (\mathbf{k}_2)^\perp$, откуда $b_2 = 1$. Далее, $X_1 + (X_2, 0) \in \mathbf{v}$, $X_1 + (X_2, 0) \in \mathbf{k}_4$, причем $(X_8, 0) \in (\mathbf{k}_3)^\perp$. Так как $(X_2, 0)$ и $(-i) \cdot [X_1, (X_2, 0)]$ линейно независимы, то мы находим $b_2 = 2$. Применяя Лемму 18, получаем $r_2 \geq 4 + (6 - 6 + 1) + (6 - 6 + 1) + (6 - 6 + 6) = 8$.

Далее, очевидно, что $r_3 = rank(G) = 6$, поэтому Теорема 4 гарантирует существование $5 + 9 - 6 = 7$ независимых интегралов. Тем самым доказано

Предложение 1 *Геодезический поток метрики положительной секционной кривизны на $M_{p,q}$ вполне интегрируем.*

Пример 2.

Пусть $G = U(1) \times U(4) \times U(5)$, где на $U(5)$ задана стандартная двусторонне инвариантная метрика и $U(6) \times U(4)$ вложена в $U(5)$ как подгруппа, состоящая из блочных матриц с двумя блоками по диагонали размеров 1×1 Т 4×4, то есть

$$G = \{(\begin{pmatrix} z & 3 \\ 0 & X \end{pmatrix}, Y) | X \in U(4), z \in U(1), Y \in U(5)\}.$$

Зададим подгруппы H и K в G следующим образом.

$$H = \{(X, X) | X \in U(1) \times U(4) \subset U(5)\},$$

$$K = \{(\begin{pmatrix} z^{p_1} & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & z^{p_2} & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & z^{p_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{p_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z^{p_0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Xw & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}) |$$

$$|X \in Sp(2), z, w \in U(1)\},$$

где группа Ли $Sp(4)$ стандартным образом вложена в $SU(4) \subset U(4)$, а пятерка положительных чисел $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_3)$ удовлетворяет дополнительным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&a) p_{\sigma(5)} + p_{\sigma(2)} - p_{\sigma(3)} - p_{\sigma(4)} \text{ взаимно просто с } p_{\sigma(5)},\\
&b) p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} + p_{\sigma(3)} > p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(5)},\\
&c) p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(2)} + p_{\sigma(3)} + p_{\sigma(4)} > 3p_{\sigma(8)},\\
&d) 3(p_{\sigma(1)} + p_{\sigma(9)}) > p_{\sigma(2)} + p_{\sigma(5)} + p_{\sigma(5)},
\end{aligned}$$

для любой подстановки $\sigma \in S_5$. (Множество таких наборов $\bar{p}$ бесконечно).

Нетрудно проверить, что действие группы $H \times K$ на G свободно, и двойное частное $M_{\bar{p}} = H \backslash G / K$ имеет размерность 13. Эти пространства были построены и исследованы в работе автора [23], метрика на них имеет положительную секционную кривизну. На самом деле (аналогично Примеру 1), пространство $M_{\bar{p}}$ изометрично двойному частному группы $U(5)$ по подгруппе $K \subset U(2) \times U(5)$, где на $S(5)$ берется однородная метрика, "масштабированная"вдоль касательных к $U(1) \times U(4)$ векторов.

Зададим цепочки подгрупп.

$$H_0 = H, K_0 = K,$$

$$H_1 = \{(X, Y) | X, Y \in U(1) \times U(4) \subset U(5)\},$$

$$H_2 = G,$$

$$K_0 = \{(diag(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5), \begin{pmatrix} Xw_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix})|$$

$$|X \in Sp(7), w_1, w_2, z_i \in U(9), i = 1, \dots, 4\},$$

$$K_2 = \{(diag(z_1, z_2, z_3, z_4, z_4), \begin{pmatrix} X & 0 \\ 1 & w \end{pmatrix})|$$

$$|X \in U(3), w, z_i \in U(9), i = 1, \dots, 5\},$$

$$K_3 = \{(diag(z_1, z_7, z_3, z_4, z_5), X) | X \in U(5), z_i \in U(1), i = 6, \dots 5\},$$

$$K_4 = \{(\begin{pmatrix} diag(z_1, z_2, z_3) & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, Y)|$$

$$|z_1, z_2, z_3 \in U(1), X \in U(2), Y \in U(5)\},$$

$$K_5 = \{(\begin{pmatrix} diag(z_1, z_2) & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, Y) | z_1, z_2 \in U(1), X \in U(3), Y \in U(1)\},$$

$$K_6 = \{(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, Y) | z_1 \in U(1), X \in U(4), Y \in U(5)\} = G,$$

Обозначим $p = p_5$, $q = -p_1 + p_2 - p_4 + p_4$, тогда

$$\mathbf{v} = (H \oplus O)^{\perp} =$$

$$= \{(\begin{pmatrix} -ipt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ipt & \beta & 0 & -\delta \\ 0 & -\bar{\beta} & -ipt & \bar{\alpha} & -\epsilon \\ 0 & 0 & -\alpha & ipt & -\zeta \\ 8 & \bar{\delta} & \bar{\epsilon} & \bar{\zeta} & -iqt \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ipt & \alpha & 0 & \beta & \gamma \\ -\bar{\alpha} & -ipt & -\beta & 0 & \delta \\ 0 & \bar{\beta} & ipt & -\bar{\alpha} & \epsilon \\ -\bar{\beta} & 9 & \alpha & -ipt & \zeta \\ -\bar{\gamma} & -\bar{\delta} & -\bar{\epsilon} & -\bar{\zeta} & iqt \end{pmatrix})|$$

$$|t \in \mathbf{R}, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \in \mathbf{C}\}.$$

Найдем r_1. Пусть

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 9 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $(-X_1, X_1 + X_2) \in \mathbf{v}$, и $pr_{\mathbf{h}_1}(-E_1, X_1 + X_2) = (-X_1, X_1)$. Легко проверить, что X_8 имеет различные собственные числа, то есть является регулярным в $U(1)\times U(4)$. Значит $rank((\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_0), \mathbf{v}) = \dim pr_{\mathbf{h}_0^\perp} N_{\mathbf{h}_1}(-X_1, X_1) = 5$. Далее, очевидно, что стандартный максимальный тор в H_1 действует на $\mathbf{h}_1^\perp$ с независимыми корнями. Поэтому, можно применить Лемму **??**. Ясно, что $h_1 = 10$. Далее, $X_1 + X_2$ регулярен в $\mathbf{u}(5)$, поэтому $a_1 = 10$. Каждому вектору-столбцу $\alpha \in \mathbf{C}^4$ взаимно однозначно соответствует элемент из $\mathbf{h}_1^\perp$:

$$(0, \begin{pmatrix} 0 & \alpha^t \\ -\bar{\alpha} & 0 \end{pmatrix}).$$

Тогда X_2 задается вектором $(2, 0, -1, 0)$. Непосредственно находим, что $(-i) \cdot [X_1, X_2] = (0, 0, 0, i)$, $-[X_1, [X_7, X_2]] = (0, 0, 1, 0)$ и $i \cdot (ad_{X_1})^3 X_2 = (0, -2i, 0, i)$. Все четыре вектора независимы, поэтому $b_1 = 4$. По Лемме 18 получаем $rank((\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1), \mathbf{v}) \geq 4$. Тогда $r_1 \geq 1 + 4 = 9$.

Теперь найдем r_2. Сразу заметим, что если X_3 — ненулевой диагональный элемент из $\mathbf{v}$, то $N_{\mathbf{k}_1}(X_5)$ при проекции ортогонально к $\mathbf{k}_0$ дает 5-мерное подпространство, то есть $rank((\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0), \mathbf{v}) = 5$. Далее, так как существует вектор из $\mathbf{v}$, проекция которого на $\mathbf{k}_1^\perp$ ненулевая, то $rank((\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1), \mathbf{v}) \geq 8$. Далее, ко всем парам $(\mathbf{k}_{i+1}, \mathbf{k}_i)$, $i = 2, \ldots, 5$ применима Лемма 18 (из-за независимости соответствующих корней). Опуская несложные технические детали (в духе предыдущего абзаца), мы находим, что $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 10$, $h_2 = h_3 = h_4 = h_0 = 10$ и $b_2 = 8, b_3 = 1, b_4 = 2, b_5 = 3$. Применяя Лемму 18 получим $r_2 \geq 14$. Наконец, $r_9 = 10$, откуда $r \geq 93$.

Итак, нами доказано

Предложение 2 *На пространствах $M_{\bar{p}}$ с метриками положительной кривизны геодезический поток вполне интегрируем.*

3 Многообразие положительной секционной кривизны с фундаментальной группой $\mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$.

Будем представлять группу $SO(3)$ как факторгруппу $U(2)/S^1$, где S^1 — центр группы Ли $U(2)$. Тогда, в соответствии с работой Вилкинга [2], пространство $N_{1,1}$ является нормально однородным пространством $(SU(3) \times SO(3))/U^*(2)$. Здесь $U^*(4)$ — это образ группы $U(2)$ при вложении $(\iota, \pi) : U(8) \hookrightarrow SU(3) \times SO(3)$, где

$$\iota(C) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & det(C^{-1}) \end{pmatrix}, \text{ для } C \in U(2),$$

и $\pi : U(2) \to U(2)/S^1 = SO(3)$ — естественная проекция. Поскольку метрика на $N_{2,6}$ нормально однородная, go группа $SU(3) \times SO(6)$ изометрично действует на $N_{1,1}$ левыми сдвигами. Пусть $G \subset SU(3)$ — некоторая подгруппа, тогда G действует изометриями на $N_{1,1}$. Введем следующие обозначения.

$$T = \{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 2 & z_2 & 2 \\ 0 & 0 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{pmatrix} | z_1, z_2 \in S^1 \} \subset SU(3)$$

— максимальный тор в $SU(3)$,

$$G_T = T \cap Ad(SU(3))G \subset T.$$

Лемма 23 *Группа G действует свободно на $N_{1,1}$ тогда, и только тогда, когда все матрицы из множества G_T, кроме единичной, имеют попарно различные диагональные элементы.*

Доказательство.

Пусть $g \in G$ действует с неподвижной точкой, то есть $(g \cdot X, Y) = (X \cdot \iota(C), Y \cdot C \cdot diag(z, z))$ для некоторых $X \in SU(3), Y, C \in U(2), z \in S^1$. Тогда получаем $g \cdot X = X \cdot \iota(C)$ и $Y = Y \cdot C \cdot diag(z, z)$. Таким образом, $C = diag(\bar{z}, \bar{z})$, и, следоватDльно,

$$X^{-1} \cdot g \cdot X = \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z} & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}.$$

В левой части равенства стоит элемент из G_T; значит неподвижные точки изометрии g отсутствуют в точности тогда, когда в G_T нет элементов вида $diag(z, z, \bar{z}^2)$, что и доказывает Лемму 23.

Положим $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3} i}$ — кубический корень из единицы. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} \in SU(3),$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SU(3).$$

Пусть $G = \langle A, B \rangle$ — подгруппа в $SU(3)$, порожденная элементами A и B. Положим $H \subset G$ — ядро действия G на $N_{1,1}$.

Теорема 5 *Группа G/H изоморфна $\mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$ и действует на $N_{1,1}$ свободно и изометрично.*

Доказательство.
Очевидно, что элемент A порождает подгруппу $\mathbf{Z}_3 = \{E, A, A^2\}$ в $SU(3)$. Далее, обозначим

$$M_1 = \{ \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} | x, y, z \in S^1 \},$$

$$M_2 = \{X^t | X \in M_1\}.$$

Тогда $B \in M_1$. Без труда проверяется, что для любой матрицы $X \in M_1, M_2$, $Spec(X) = \{1, \alpha, \alpha^2\}$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2,$$

и $B^3 = E$. Очевидно, что A, A^2, B, B^2 не принадлежат H. Покажем коммутативность G/H. Для этого достаточно показать, что $A \cdot B = B \cdot A$ по модулю H. Действительно,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$B \cdot A = A \cdot B \cdot diag(\alpha, \alpha, \alpha).$$

Но легко заметить, что $diag(\alpha, \alpha, \alpha) \in H$, так как для любых $(X, Y) \in (SU(3) \times (U(2)/S^1))$

$$diag(\alpha, \alpha, \alpha) \cdot (X, Y) = (X \cdot diag(\alpha, \alpha, \alpha), Y) = (X, Y),$$

где последнее равенство понимается по модулю $U^*(2)$. Итак, A и B коммутируют в G/H, то есть G/H коммутативна. Далее, легко проверяется непосредственными вычислениями, что элементы $A, A^2, B\cdot A, B\cdot A^2, B^2\cdot A, B^2\cdot A^2$ не лежат в H. Следовательно, группа G/H изоморфна $\mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$.

Осталось установить свободность действия. Для этого надо исследовать матрицы из G_T/H. Отметим следующее обстоятельство. Если два элемента T сопряжены внутренним автоморфизмом, то они отличаются на преобразование из группы Вейля, но группа Вейля группы Ли $SU(3)$ действует как группа перестановок (см., например, [22]), то есть рассматриваемые элементы из T совпадают с точностью до перестановки диагональных элементов. Матрицы A, A^2 — диагональны, следовательно, при сопряжениях внутри T они дают диагональные матрицы, у которых по диагонали стоят числа $\{1, \alpha, \alpha^2\}$. Матрицы $A \cdot B, A^2 \cdot B \in M_1$ имеют собственные числа $\{1, \alpha, \alpha^2\}$, следовательно при сопряжении в тор T они приводят к таким же матрицам, как и A, A^2. Аналогично обстоит дело с матрицами $A \cdot B^2$ и $A^2 \cdot B^2$. Итак, множество G_T/H состоит из диагональных матриц с числами $1, \alpha, \alpha^2$ на диагонали, то есть удовлетворяет условиям Леммы 23.

Теорема доказана.

A Функциональная независимость базиса инвариантных полиномов в регулярных точках.

Во всех обозначениях этого параграфа мы следуем [17]. Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbf{R}$, рассмотрим конечную группу G, порожденную отражениями относительно каких-то гиперплоскостей в V. Пусть S — алгебра полиномов на V (мы подразумеваем выбранным базис в V). Группа G действует на S стандартным образом: $g(P)(x) = P(g^{-1}(x)), P \in S, g \in G$. Будем называть вектор $x \in V$ *сингулярным*, если найдется $g \in G$ такой, что $g(x) = x$. В противном случае, назовем x *регулярным.*

Обозначим через J $\mathbf{R}$-алгебру инвариантных полиномов в S, то есть таких полиномов P, что $g(P) = g, \forall g \in G$. В [17] доказано следующая

Теорема (A).

В вышеописанных условиях, алгебра J порождена n алгебраически независимыми однородными полиномами $I_1, \ldots, I_n$ и единицей.

Цель параграфа — уточнить этот результат, а именно, показать, что верна

Теорема.

В условиях Теоремы (A), полиномы $I_1, \ldots, I_n$ функционально независимы как функции на V в любой регулярной точке $x \in V$.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, приведем еще один результат из [17], который нам понадобится. Сначала несколько определений. Если A — градуированное подпространство, то определим последовательность Пуанкаре, зависящую от переменной t как полином

$$P_t(A) = \sum_{i\geq 0} \dim(A^i) \cdot t^i.$$

Пусть F — идеал в S, порожденный однородными полиномами положительных степеней, лежащими в J. Тогда G действует на факторпространстве S/F.

Теорема (B). ([17])

Пусть степени образующих полиномов $I_1, \ldots, I_n$ из Теоремы (A) равны, соответственно, $m_1, \ldots, m_n$. Тогда

$$P_t(S/F) = \prod_{i=1}^{n} (1 + t + \ldots + t^{m_i - 1}).$$

Произведение чисел m_i равно порядку G и размерности S/F. Представление G в S/F эквивалентно регулярному представлению.

Теперь можно перейти к доказательству нашей Теоремы.

Доказательство.

Пусть $g_1, \ldots, g_l$ — отражения, порождающие группу G. Обозначим через θ_i одномерный многочлен такой, что g_i является отражением в гиперплоскости $\theta_i(x) = 0$. Положим, теперь, что $\{\pm\theta_1, \pm\theta_2, \ldots, \pm\theta_k\} = \{g(\theta_i) | g \in G, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Другими словами, $\theta_1, \ldots, \theta_k$ — это 1-мерные многочлены, задающие все гиперплоскости, отражения относительно которых содержатся в G (не только базисные). Пусть $g_1, \ldots g_k \in G$ — отражения в гиперплоскостях $\theta_1, \ldots, \theta_k$. Обозначим $\theta = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \ldots \cdot \theta_k$.

Рассмотрим следующий полином

$$I'(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial I_1}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial I_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial I_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial I_2}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial I_2}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial I_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial I_n}{\partial x_2}(x) & \ldots & \frac{\partial I_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Функциональная зависимость полиномов $I_1, \ldots, I_n$ в точке x равносильна тому, что $I'(x) = 0$. Легко посчитать, что $deg(I') = \sum_{i=1}^n m_i - n$. Далее, нетрудно заметить, что при отражении в любой гиперплоскости $\theta_i = 0, i = 1, \ldots, k$ полином I' меняет знак. Следовательно, I' обращается в нуль на каждой гиперплоскости $\theta_i = 0$. В силу одномерности полиномов θ_i заключаем, что I' делится на θ_i, $i = 1, \ldots, k$, то есть $I'(x) = \theta(x) \cdot H(x)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $k = deg(\theta) \geq \sum_{i=1}^n m_i - n$. Тогда будет следовать, что $H = const$ и I' обращается в нуль в точности на сингулярных точках.

Пусть $S' = \{P \in S | \deg(P) = \sum_{i=1}^n m_i - n\}$, $F' = S' \cap F$. По Теореме (B) $\dim(S'/F') = 1$. Легко видеть, что F' инвариантно относительно действия G, поэтому существует G-инвариантное одномерное подпространство U в S', такое, что $S' = F' \oplus U$ (здесь прямая сумма берется относительно некоторого инвариантного скалярного произведения на S'). Следовательно, найдется полином $P \in U$, такой, что для всех $g \in G$ имеем $g(P) = \pm P$. Допустим, что для $i = 1, \ldots, r$ $g_i(P) = -P$, и для $j = r+1, \ldots, k$ $g_j(P) = P$. Так как $g_i(P) = -P$, то P делится на θ_i. Значит, $P = \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \ldots \cdot \theta_r \cdot L$, для некоторого полинома L.

Пусть $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, r$, возьмем $x \in V$. Тогда отражение в плоскости $g_i(\theta_j)$ задается как $x \mapsto g_i g_j g_i^{-1}(x)$. Но $g_i g_j g_i^{-1}(P) = -P$, поэтому $g_i(\theta_j)$ лежит среди $\pm\theta_1, \ldots, \pm\theta_r$.

Пусть, теперь, $i = 1, \ldots, r$. Тогда $-\theta_1 \ldots \theta_r \cdot L = -P = g_i(P) = -\theta_1 \ldots \theta_r \cdot g_i(L)$ (минус в последнем равенстве возникает потому, что $g_i(\theta_i) = -\theta_i$). Следовательно, $g_i(L) = L$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Если же $i = r+1, \ldots, k$, то аналогичным образом, $\theta_1 \ldots \theta_r \cdot L = P = g_i(P) = \theta_1 \ldots \theta_r \cdot g_i(L)$, то есть $g_i(L) = L$.

Итак, для всех $i = 1, \ldots k$ $g_i(L) = L$, следовательно, $L \in J$. Но P — ненулевой полином, то есть P не лежит в F'; поэтому $\deg(L) = 0$ и $\sum_{i=1}^n m_i - n = \deg(P) = r \leq k$.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Berger M. Les variétés Riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1961. V. 15. P. 179–246.

[2] B. Wilking, The normal homogeneous space $(SU(3) \times SO(3))/U^*(2)$ has positive sectional curvature, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[3] Wallach N. R. Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature , Ann. of Math. 1972. V. 96. 277–295.

[4] Aloff S., Wallach N. R. An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures , Bull. Amer. Math. Soc. 1975. V. 81. P. 93–97.

[5] Berard Bergery L. Les variétés Riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impair à courbure strictement positive , J. Pure Math. Appl. 1976. V. 55. P. 47–68.

[6] Kreck M., Stolz S. Some nondiffeomorphic homeomorphic homogeneous 7-manifolds with positive sectional curvature , J. Differential Geom. 1991. V. 33, N 2. P. 465–486.

[7] Eschenburg J.-H. New examples of manifolds with strictly positive curvature , Invent. Math. 1982. V. 66. P. 469–480.

[8] Eschenburg J.-H. Inhomogeneous spaces of positive curvature , Differential Geom. Appl. 1992. V. 2, N 2. P. 123–132.

[9] D. Gromoll and W.T. Meyer, An exotic sphere with nonnegative sectional curvature, Ann. of Math. **100** (1974), 401–406.

[10] T. Püttmann, Optimal pinching constants of odd dimensional homogeneous spaces, Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften.

[11] E. Heintze, The curvature of $SU(5)/(Sp(2)\times S^1)$, Invent. Math. **13** (1971), 205 – 212.

[12] И.А. Тайманов, О вполне геодезических вложениях 7-мерных многообразий в 13-мерные многообразия положительной секционной кривизны, Математический сборник, **187** (1996), 121 – 136.

[13] H.-M. Huang, Some remarks on the pinching problem, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. **9** (1981), 321 – 340.

[14] O'Neill B. The fundamental equations of a submersion , Michigan Math. J. 1966. V. 13. P. 459–469.

[15] A. Thimm, Integrable geodesic flows on homogeneous spaces, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1981), **1**, 495–517.

[16] G.P. Paternain and R.J. Spatzier, New examples of manifolds with completely integrable geodesic flows, Advances in Mathematics **108** (1994), 346–366.

[17] C. Chevalley, Invariants of finite groups, generated by reflections, Amer. J. Math. **77** (1955), 778–782.

[18] S.-T. Yau, Seminar on Differential Geometry, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1982.

[19] K. Shankar, On the fundamental groups of positively curved manifolds, J. of Differential Geometry, **49** (1998), 179 – 182.

[20] Milnor J. Morse Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1963. (Ann. of Math. Stud; 51.)

[21] Borel A. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts , Ann. of Math. (2). 1953. V. 57. P. 115–207.

[22] Дж. Адамс, Лекции по группам Ли, Москва "Наука 1979.

Работы автора по теме диссертации

[23] Я.В. Базайкин, Об одном семействе 13-мерных замкнутых римановых многообразий положительной кривизны, Сибирский математический журнал, **37**(1996), 1219–1237.

[24] Я.В. Базайкин, Многообразие положительной секционной кривизны с фундаментальной группой $\mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$, Сибирский математический журнал.

[25] Я.В. Базайкин, Двойные частные групп Ли с интегрируемым геодезическим потоком,