ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л.Соболева
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

На правах рукописи

Ефимов
Дмитрий Иванович

Магнитный геодезический поток на однородном симплектическом многообразии

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

научный руководитель —
доктор физико-математических
наук И. А. Тайманов

Новосибирск — 2004

Содержание

0 Введение

Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие. Обозначим через $\{\cdot, \cdot\}$ скобки Пуассона на M, соответствующие симплектической форме ω. *Гамильтоновой системой* с функцией Гамильтона H на симплектическом многообразии (M, ω) называется поток задаваемый системой уравнений

$$\dot{x} = \mathrm{sgrad} H(x),$$

где $\mathrm{sgrad} H$ — гамильтоново векторное поле функции H, определяемое по правилу

$$dH(x)Y = \omega(Y, \mathrm{sgrad} H(x)), \ Y \in TM.$$

Пространство гладких функций $C^\infty(M)$ образует алгебру Ли относительно скобки Пуассона

$$\{f, g\} = \omega(\mathrm{sgrad} g, \mathrm{sgrad} f).$$

Функция f называется *интегралом* гамильтоновой системы, если она коммутирует с функцией Гамильтона относительно скобки Пуассона

$$\{f, H\} \equiv 0.$$

Гамильтонова система на (M, ω) называется *интегрируемой по Лиувиллю*, если она обладает попарно коммутирующими интегралами $f_1, \ldots, f_n$ ($2n = \dim M$), которые почти всюду функционально независимы, то есть их дифференциалы линейно независимы почти всюду на M. Про функции $f_1, \ldots, f_n$ говорят, что они находятся в инволюции и называют *полным инволютивным (или коммутативным) набором интегралов* на M.

Вопрос нахождения интегрируемых гамильтоновых систем всегда представлял большой интерес как для математиков, так и для физиков. Задачи классической механики описываемые интегрируемыми гамильтоновыми системами достаточно долго оставались единственными проблемами, которые можно было успешно решать. Основанием для этого была классическая теорема Лиувилля по которой, если гамильтонова система обладает полным коммутативным набором независимых интегралов, то уравнения Гамильтона могут быть решены (локально) в явном виде (или еще говорят , что система "интегрируема в квадратурах"). При этом неособые компактные совместные поверхности уровня интегралов системы диффеоморфны торам (торам Лиувилля), а движение на этих торах, задаваемое фазовым потоком, является условно-периодическим. Сформулируем теорему Лиувилля (см. [1])

Теорема. *Пусть* $M_f = \{f_1 = c_1, \ldots, f_n = c_n\}$ *— совместная поверхность уровня первых интегралов гамильтоновой системы. Предположим, что эта поверхность компактная, связная и неособая (то есть дифференциалы функций* $f_1, \ldots, f_n$ *линейно независимы всюду на ней). Тогда*

1. M_f *диффеоморфна* n*-мерному тору*

$$T^n = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \,\mathrm{modd}\, 2\pi\};$$

2. *фазовый поток определяет на* M_f *условно-периодическое движение, то есть в угловых координатах* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *уравнения движения становятся линейными*

$$\varphi_1(t) = w_1(c)t, \ldots, \varphi_n(t) = w_n(c)t,$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n)$.

Мищенко А.С. и Фоменко А.Т. предложили метод некоммутативной интегрируемости гамильтоновых систем в работе [2] (см. также [3],[4]). Этот метод удобен в случае, когда система обладает избыточным набором первых интегралов, которые не коммутируют между собой. Тогда при определенных дополнительных условиях компактные совместные поверхности уровня первых интегралов являются торами размерности меньше чем половина размерности фазового пространства, при этом движение задаваемое потоком является условно-периодическим.

Пусть $\mathcal{F}$ пространство первых интегралов гамильтоновой системы, которое образует алгебру Ли относительно скобки Пуассона. Для каждой точки $x \in M$ определим два подпространства в T_x^*M: $F_x \subset T_x^*M$ – пространство, порожденное дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}$, и $K_x \subset F_x$ – ядро ограничения пуассоновой структуры на F_x:

$$F_x = \{df(x),\ f \in \mathcal{F}\},$$
$$K_x = \ker\{\cdot, \cdot\}|_{F_x}.$$

Если имеется открытое всюду плотное подмножество $U \subset M$ такое, что для всех $x \in U$ величины $\mathrm{dim} F_x$ и $\mathrm{dim} K_x$ постоянны и равны соответственно l и r, и кроме того выполняется соотношение

$$\mathrm{dim} F_x + \mathrm{dim} K_x = l + r = \mathrm{dim} M,$$

то гамильтонова система называется *интегрируемой в некоммутативном смысле.* В этом случае число $\mathrm{dim} F_x = l$ называется *дифференциальной размерностью* алгебры интегралов $\mathcal{F}$ и обозначается $\mathrm{ddim}\mathcal{F}$, а $\mathrm{dim} K_x = r$ – *дифференциальным индексом* и обозначается $\mathrm{dind}\mathcal{F}$.

Поясним смысл этого определения. Фактически, $\mathrm{ddim}\mathcal{F} = l$ является размерностью алгебры интегралов, а $\mathrm{dind}\mathcal{F} = r$ — размерностью максимальной коммутативной подалгебры. Если $l + r$ равно размерности фазового пространства $\mathrm{dim} M$, то инвариантные торы алгебры интегралов имеют размерность $r = \mathrm{dim} M - l$. Тогда максимальная коммутативная подалгебра (в силу своей коммутативности) задает на инвариантных торах транзитивное действие коммутативной группы $\mathbb{R}^r$. Поэтому если тор компактен, то он диффеоморфен r-мерному тору. В случае некоммутативной интегрируемости имеет место аналог теоремы Лиувилля (см. [2],[3],[4]).

Среди всех гамильтоновых систем особый интерес представляют геодезические потоки римановых метрик. Напомним, определение геодезического потока.

Пусть M — кокасательное расслоение некоторого риманова многообразия (N, g), g — риманова метрика, с естественной симплектической структурой $\omega = dp_i \wedge dx^i$. *Геодезическим поток* называется гамильтонова система на (M, ω) с функцией Гамильтона

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij}(x) p_i p_j, \tag{1}$$

где $p = (p_1, \ldots, p_n) \in T_x^* N$.

Известны некоторые топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков, из-за которых невозможно их существование на многообразиях с достаточно сложной топологией (см. [5]-[10]). Например, в работах И.А. Тайманова [7, 8] указаны топологические препятствия к интегрируемости в терминах фундаментальной группы многообразия: фундаментальная группа многообразия допускающего интегрируемый геодезический поток (в аналитическом случае) должна быть почти коммутативной.

С другой стороны, есть несколько серий многообразий, на которых известны примеры римановых метрик с интегрируемыми геодезическими потоками (см. [4],[11]-[23]). Почти все эти многообразия топологически являются однородными пространствами. А.В. Болсинов и Б. Йованович показали интегрируемость геодезических потоков биинвариантных метрик на двойных частных компактных групп Ли [24]. Классическими примерами римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками являются

— 2-мерные поверхности с метриками Лиувилля,

— поверхности вращения (интегралы Клеро),

— n-мерные эллипсоиды (Якоби),

— плоские торы,

— группа Ли $SO(3)$ с левоинвариантной метрикой (Эйлер).

Мищенко А.С. и Фоменко А.Т. показали интегрируемость некоторых левоинвариантных метрик на компактных группах Ли [17],[2]. Метрики с интегрируемыми геодезическими потоками на симметрических пространствах в своих работах описали Тимм А. [16], Мищенко А.С. [18],[19], Микитюк И.В. [21] и Браилова А.В. [20],[4]. В работе [13]

Болсинов А.В., Йованович Б. доказали некоммутативную интегрируемость геодезического потока биинвариантной метрики на любых однородных пространствах вида G/H, где G — компактная связная группа Ли. Также известны примеры двойных частных групп Ли (естественные обобщения однородных пространств) с интегрируемыми геодезическими потоками, найденные в работах Базайкина Я.В. [15] и Г. Патернайна, Р. Спатцера [23].

Пусть на римановом многообразии (N, g) есть некоторая замкнутая 2-форма

$$F = F_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Дифференциальная форма

$$\tilde{\omega} = \omega + F,$$

где $\omega = dp_i \wedge dx^i$ — естественная симплектическая форма на кокасательном расслоении, является замкнутой невырожденной 2-формой, и таким образом задает симплектическую структуру на кокасательном расслоении риманова многообразия. Если теперь рассматривать на $M = T^*N$ симплектическую структуру задаваемую формой $\tilde{\omega}$, то это влечет деформацию скобок Пуассона, а деформация скобок Пуассона в свою очередь влечет изменение гамильтоновых векторных полей и соответственно уравнений движения.

Определение. Гамильтонова система на $(T^*N, \tilde{\omega})$ с функцией Гамильтона (1) называется *магнитным геодезическим потоком* задаваемым формой F.

Согласно уравнениям Максвелла, включение магнитного поля задается замкнутой 2-формой. Таким образом включение магнитного поля не меняет гамильтониан геодезического потока, а состоит в деформации скобок Пуассона (см. [25]).

Основными объектами изучения в данной диссертации являются магнитные геодезические потоки, задаваемые замкнутой невырожденной формой, на однородных симплектических многообразиях.

В первой главе доказана теорема

Теорема. *Магнитный геодезический поток на $T\mathbb{C}P^n$, задаваемый формой Фубини-Штуди, допускает полный коммутативный набор независимых интегралов, то есть он интегрируем.*

В теореме рассматривается комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ с римановой метрикой (метрика Фубини-Штуди) индуцированной стандартным эрмитовым скалярным произведением на $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum \xi^k \bar{\eta}^k.$$

В качестве формы деформирующей скобки Пуассона берется форма Фубини-Штуди (мнимая часть эрмитова скалярного произведения).

Известно, что геодезические потоки метрики Фубини-Штуди интегрируемы (см., например, [16]). Для доказательства интегрируемости магнитного геодезического потока используются интегралы геодезического потока. Сформулируем теорему.

Теорема (Нетер)**.** *Пусть риманова метрика g на многообразии N допускает однопараметрическую группу изометрий $A^t : N \to N$. Тогда геодезический поток этой метрики имеет линейный первый интеграл вида*

$$f_\xi(x, p) = p(\xi(x)),$$

где $\xi(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} A^t(x)$.

То есть компонента импульса вдоль векторного поля ассоциированного с однопараметрической группой постоянна на траекториях потока. В случае комплексного проективного пространства унитарные преобразования являются изометриями, поэтому однопараметрическим группам унитарных преобразований соответствуют линейные интегралы геодезического потока.

Сначала доказывается, что все линейные интегралы геодезического потока, соответствующие однопараметрическим группам унитарных преобразований, можно превратить в интегралы магнитного потока с помощью небольшой поправки. В разделе 1.3 приведен вид этой поправки. Полученные линейные интегралы магнитного потока используются в разделе 1.4 для коррекции отображения момента

$$P : T\mathbb{C}P^n \to \mathfrak{u}(n+1).$$

Подкорректированное отображение момента постоянно на траекториях магнитного потока, и следовательно любые функции вида $f \circ P$, где f — произвольные функции на алгебре $\mathfrak{u}(n+1)$, являются интегралами магнитного потока. Причем, если рассматривать инвариантные функции f на алгебре $\mathfrak{u}(n+1)$, то можно получить достаточно большое семейство интегралов в инволюции. Далее используется метод вложенных цепочек подалгебр для построения полного инволютивного набора независимых интегралов. Основная трудность заключается в доказательстве независимости полученного набора интегралов. Для доказательства независимости полученного семейства интегралов используется приведенный в разделе 1.4 явный вид гамильтоновых векторных полей интегралов и специальный вид вложенных подалгебр (раздел 1.5). В последнем разделе главы подробно разобран пример магнитного геодезического потока на комплексной проективной прямой.

Во второй главе доказана теорема

Теорема. *Пусть $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ — односвязное однородное симплектическое многообразие, где $\mathbf{G}$ — компактная полупростая группа Ли. Тогда существует риманова метрика на M такая, что магнитный геодезический поток, задаваемый симплектической формой, интегрируем в некоммутативном смысле.*

Согласно результатам Костанта [26], любое односвязное однородное симплектическое многообразие из теоремы симплектоморфно орбите присоединенного представления группы $\mathbf{G}$ в алгебре $\mathfrak{g}$, где симплектическая структура на орбите задается формой Кириллова [27]. Таким образом достаточно доказать существование римановой метрики на орбите, для которой магнитный геодезический поток задаваемый формой Кириллова интегрируем в некоммутативном смысле. Все сводится к доказательству следующей теоремы.

Теорема. *Рассмотрим орбиту присоединенного представления компактной полупростой группы Ли* $\mathbf{G}$ *и риманову метрику* g *индуцированную формой Киллинга на алгебре Ли группы* $\mathbf{G}$. *На орбите существует стандартная симплектическая структура* Ω *(форма Кириллова). Тогда магнитный геодезический поток, задаваемый формой* Ω, *интегрируем в некоммутативном смысле.*

Как и в первой главе сначала рассматриваются линейные интегралы порожденные однопараметрическими группами изометрий (однопараметрические подгруппы группы $\mathbf{G}$) римановой метрики на орбите. Такие линейные интегралы будут интегралами любого потока с $\mathbf{G}$-инвариантной функцией Гамильтона. Для этих интегралов строится поправка, необходимая для того, чтобы они были интегралами магнитного потока. Далее, в разделе 2.3 с помощью линейных интегралов строится отображение момента $P : TM \to \mathfrak{g}$, где M — орбита, которое постоянно на траекториях любого потока задаваемого $\mathbf{G}$-инвариантным гамильтонианом.

$\mathbf{G}$-инвариантные функции и функции вида $f \circ P$, где f — функция на алгебре, являются интегралами геодезического потока римановой метрики, полученной ограничением формы Киллинга с алгебры на орбиту. В разделе 2.3 приведен явный вид гамильтоновых полей таких функций. Обозначим через $\mathcal{F}_1$ семейство функций на орбите вида $f \circ P$, через $\mathcal{F}_2$ семейство $\mathbf{G}$-инвариантных функций. Функции из $\mathcal{F}_1$ являются интегралами любого потока с гамильтонианом из второго семейства в силу инвариантности отображения момента, поэтому любые две функции из разных семейств коммутируют. В этом же разделе доказано, что эти семейства функций замкнуты относительно скобок Пуассона.

В разделе 2.4 доказано, что алгебра интегралов $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ удовлетворяет всем условиям некоммутативной интегрируемости. При доказательстве использовалась схема предложенная в работе [13].

Автор благодарит научного руководителя И.А. Тайманова за постановку задач и полезные обсуждения, и Я.В. Базайкина за полезные обсуждения.

1 Магнитный геодезический поток в однородном поле на комплексном проективном пространстве

1.1 Основные определения

Пусть M^n — многообразие с римановой метрикой g_{ij}, которая задает изоморфизм касательного и кокасательного расслоений (преобразование Лежандра)

$$\xi \in T_x M^n \to p \in T_x^* M^n$$

по формуле

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \to p = (p_1, \dots, p_n), \quad p_k = g_{ki}\xi^i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Кокасательное расслоение T^*M^n является симплектическим многообразием с естественной симплектической структурой $\omega = dp_i \wedge dx^i$, которое обозначим парой (T^*M^n, ω). Симплектическая форма ω задает на пространстве гладких функций на кокасательном расслоении $C^\infty(T^*M^n)$ скобки Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right).$$

При этом пространство функций становится алгеброй Ли со скобками Пуассона в качестве коммутатора. Говорят, что функции f, g находятся в инволюции, если их скобка Пуассона тождественно равна нулю

$$\{f, g\} \equiv 0.$$

Определение. Гамильтоновой системой с функцией Гамильтона (гамильтонианом) $H : T^*M^n \to \mathbb{R}$ на симплектическом многообразии (T^*M^n, ω) называется поток, который задается уравнением

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\},$$

задающим изменение любой гладкой функции вдоль потока.

Геодезическим потоком называется гамильтонова система на кокасательном расслоении T^*M^n риманова многообразия M^n с функцией Гамильтона

$$H(x, p) = \tfrac{1}{2} g^{ij}(x) p_i p_j, \tag{2}$$

где g_{ij} — риманова метрика на M^n и $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. Геодезический поток описывает движение частицы по инерции с кинетической энергией $|\dot{x}|^2/2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j/2$. Траекториями этого потока являются геодезические римановой метрики.

Определение. Функции, которые инвариантны относительно потока

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \equiv 0,$$

называются первыми интегралами или интегралами движения потока.

Скобка Пуассона двух первых интегралов гамильтоновой системы является первым интегралом в силу тождества Якоби, таким образом совокупность интегралов гамильтоновой системы образует алгебру Ли относительно скобки Пуассона.

Определение. Гамильтонова система называется интегрируемой (в коммутативном смысле)[1], если она имеет n первых интегралов в инволюции, градиенты которых независимы почти всюду на T^*M^n. Такое семейство первых интегралов называется полным коммутативным набором независимых интегралов.

Включение магнитного поля, которое, согласно уравнениям Максвелла, задается замкнутой 2-формой

$$F = F_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

состоит в деформации скобок Пуассона путем добавления формы F к симплектической форме ω. Действительно, если форма F замкнута, то форма $\tilde{\omega} = \omega + F$ также задает на кокасательном расслоении симплектическую структуру. Скобки Пуассона соответствующие форме $\tilde{\omega}$ принимают вид

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i} \right) + \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j} \qquad (3)$$

(см. [25]).

[1]В литературе такие системы называются также *вполне интегрируемыми* или *интегрируемыми по Лиувиллю.*

Определение. Гамильтонова система на симплектическом многообразии $(T^*M^n, \tilde{\omega})$ с функцией Гамильтона (2) называется магнитным геодезическим потоком задаваемым формой F.

Таким образом гамильтониан магнитного геодезического потока совпадает с гамильтонианом геодезического потока, то есть включение магнитного поля не изменяет гамильтониан, а состоит в деформации скобок Пуассона в соответствии с выражением (3).

В то время как интегрируемость геодезических потоков на однородных пространствах достаточно хорошо изучена, аналогичная проблема для магнитных геодезических потоков вообще не рассматривалась.

Рассмотрим комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$, с римановой метрикой заданной вещественной частью индуцированного из $\mathbb{C}^{n+1}$ эрмитова скалярного произведения. Форма Фубини-Штуди, равная с точностью до коэффициента мнимой части индуцированного из $\mathbb{C}^{n+1}$ эрмитова скалярного произведения, является замкнутой невырожденной дифференциальной формой. Таким образом имеет смысл говорить о магнитном геодезическом потоке на $T\mathbb{C}P^n$, заданном формой Фубини-Штуди. Основным результатом этой главы является следующая теорема

Теорема 1. *Магнитный геодезический поток на $T\mathbb{C}P^n$, задаваемый формой Фубини-Штуди, допускает полный коммутативный набор независимых интегралов, то есть он интегрируем.*

В доказательстве теоремы существенно используется набор интегралов построенный Тиммом ([16]) для геодезического потока на $T\mathbb{C}P^n$.

1.2 Метрики Фубини–Штуди

Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ - это многообразие проходящих через точку 0 комплексных прямых в $n+1$-мерном комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$.

Стандартное эрмитово скалярное произведение на $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum \xi^k \bar{\eta}^k, \tag{4}$$

индуцирует на касательных пространствах к $\mathbb{C}P^n$ эрмитову структуру.

Пусть $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \to \mathbb{C}P^n$ — проекция, сопоставляющая точке $z \neq 0$ комплексную прямую, проходящую через 0 и z. Каждый вектор ζ, касательный к $\mathbb{C}P^n$ в точке $\pi(z)$ представляется (неоднозначно) в виде

$$\zeta = \pi_* \xi, \quad \xi \in T_z \mathbb{C}^{n+1}.$$

Следующая формула

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \frac{\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \langle z, z \rangle - \langle \xi_1, z \rangle \langle z, \xi_2 \rangle}{\langle z, z \rangle^2} \tag{5}$$

задает эрмитову метрику на касательных векторах к $\mathbb{C}P^n$.

Вещественная и мнимая части этой эрмитовой метрики задают, соответственно, риманову метрику на $\mathbb{C}P^n$ (метрику Фубини–Штуди) и невырожденную кососимметрическую форму

$$\Omega(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle. \tag{6}$$

Эта форма замкнута и, следовательно, задает на $\mathbb{C}P^n$ симплектическую структуру (форма Фубини-Штуди).

Линейные преобразования $\mathbb{C}^n$ сохраняющие эрмитово скалярное произведение (4) (унитарные преобразования) индуцируют преобразования $\mathbb{C}P^n$ сохраняющие эрмитову структуру (5).

Геодезические потоки метрики Фубини–Штуди интегрируемы. Мы будем рассматривать магнитные геодезические потоки, полученные включением магнитного поля

$$F = \Omega.$$

Функция Гамильтона остается первым интегралом деформированного фазового потока, что неверно для дополнительных первых интегралов. Дополнительные первые интегралы старой системы уравнений не будут интегралами новой, но в данной работе показано, что первые интегралы геодезического потока могут быть продеформированы в первые интегралы магнитного геодезического потока.

Линейные дополнительные интегралы геодезического потока обусловлены симметриями метрики Фубини–Штуди. Эти симметрии задаются унитарными преобразованиями $\mathbb{C}^n$. А именно, нужно взять поле Киллинга однопараметрической группы унитарных преобразований, тогда компонента импульса вдоль этого поля Киллинга будет первым интегралом (теорема Нетер). Оказывается, если подставить это поле Киллинга в форму (6), то получится точная 1-форма, то есть существует такая функция на $\mathbb{C}P^n$, что ее дифференциал равен получившейся 1-форме. Если добавить эту функцию к соответствующему интегралу геодезического потока, то получается интеграл деформированного фазового потока. Таким образом каждый линейный интеграл геодезического потока добавлением соответствующей функции может быть достроен до интеграла нового потока. Этот эффект был впервые обнаружен автором на примере магнитного геодезического потока, заданного формой Фубини-Штуди, на комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$, а также на примере аналогичного потока на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$. Эти потоки будут подробно разобраны в качестве примеров к первой и второй главам.

Для полной интегрируемости магнитного геодезического потока на $\mathbb{C}P^n$ одних линейных интегралов недостаточно, однако описанная конструкция понадобится нам для корректировки отображения момента. Перейдем к доказательству.

1.3 Свойства формы Фубини-Штуди

Следуя статье Тимма [16], представим $\mathbb{C}P^n$ как

$$\mathbb{C}P^n = \mathbf{G}/\mathbf{H},$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{U}(n+1)$, $\mathbf{H} = \mathbf{U}(n) \times \mathbf{U}(1)$. На $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n+1)$ есть $\mathrm{Ad}(\mathbf{G})$-инвариантная невырожденная симметричная положительная билинейная форма

$$B(X, Y) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(X \cdot Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{7}$$

$\mathrm{Ad}(\mathbf{G})$-инвариантность следует из свойств следа матрицы

$$B(X,Y)=B(\mathrm{Ad}(g)X,\mathrm{Ad}(g)Y),\ \forall g\in\mathbf{G},$$

где $\mathrm{Ad}(g)X=gXg^{-1}$. Ортогональным дополнением $\mathfrak{h}=\mathfrak{u}(n)\times\mathfrak{u}(1)$ относительно формы B будет

$$\mathfrak{m}=\left\{\begin{pmatrix}0 & x\\ -\bar{x}^T & 0\end{pmatrix}: x\in \mathrm{M}(n,1;\mathbb{C})\right\},$$

где $\mathrm{M}(n,1;\mathbb{C})$ – пространство $n\times 1$-матриц над $\mathbb{C}$. То есть алгебра $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}.$$

Пространство $\mathfrak{m}$ отождествляется с касательным к $\mathbb{C}P^n=\mathbf{G}/\mathbf{H}$ в точке $\pi(e)$ пространством $T_{\pi(e)}\mathbb{C}P^n$ при помощи $\pi_*|_e$, где $\pi:\mathbf{G}\to\mathbf{G}/\mathbf{H}$ – каноническая проекция

$$\pi(g)=g\mathbf{H}.$$

Так как $\mathfrak{m}$ инвариантно относительно действия $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$ ($\mathrm{Ad}(\mathbf{H})\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$) и ограничение формы (7) на $\mathfrak{m}$ будет невырожденной положительной $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантной формой, то таким образом $B|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}}$ определяет на $\mathbb{C}P^n$ риманову $\mathbf{G}$-инвариантную метрику, которая совпадает с метрикой Фубини-Штуди (вещественная часть эрмитовой структуры (5)).

Далее с помощью (7) отождествляются $\mathfrak{u}(n+1)$ и $\mathfrak{u}^*(n+1)$, а также касательное и кокасательное расслоения $\mathbb{C}P^n$ с помощью $\mathbf{G}$-инвариантной римановой метрики соответствующей (7).

Форма Фубини-Штуди (6) также $\mathbf{G}$-инвариантна. На $\mathfrak{m}$ она определяется следующим образом

$$\Omega_0(X,Y)=-\tfrac{1}{\pi}B(J,[X,Y]),\tag{8}$$

$X,Y\in\mathfrak{m}$, а матрица J имеет вид

$$J=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix},\quad i=\sqrt{-1},$$

то есть все ее элементы нулевые, кроме одного. Для произвольных касательных векторов $gX, gY \in T_{\pi(g)}\mathbb{C}P^n$, $X, Y \in \mathfrak{m}$ положим

$$\Omega(gX, gY) = \Omega_0(X, Y) = -\tfrac{1}{\pi}\, B(J, [X, Y]).$$

Корректность этого определения следует из того, что форма B $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантна и матрица J инвариантна относительно присоединенного действия $\mathbf{H}$

$$J = \mathrm{Ad}(h)J,\ \forall h \in \mathbf{H}.$$

Пусть теперь A_φ – однопараметрическая подгруппа $\mathbf{G}$, она является однопараметрической группой преобразований $\mathbb{C}P^n$ и сохраняет метрику и форму Фубини-Штуди. Обозначим через $\tilde{g}_\varphi$ точку в которую переводит A_φ точку g (для малых φ эта точка близка к g в силу однопараметричности A_φ). Выпишем поле Киллинга

$$\tilde{g}_\varphi = A_\varphi g \ \Rightarrow\ \left.\frac{d\tilde{g}_\varphi}{d\varphi}\right|_0 = \left.\frac{dA_\varphi}{d\varphi}\right|_0 g = K \text{ – поле Киллинга,}$$

и так как A_φ фактически однопараметрическая группа унитарных матриц, то существует такая косоэрмитова матрица X, что A_φ будет ее матричной экспонентой $A_\varphi = \exp(X\varphi)$. Тогда

$$K = \left.\frac{dA_\varphi}{d\varphi}\right|_0 g = Xg.$$

Лемма 1.1. *Для любого поля Киллинга K существует такая функция f, что*

$$df = \Omega(K, \cdot).$$

Доказательство. Для Киллингова поля $K = Xg$ рассмотрим функцию

$$f_X(g) = -\tfrac{1}{\pi}\, B(J, g^{-1}Xg). \tag{9}$$

Посчитаем значение дифференциала этой функции в точке $\pi(g)$ на векторе $gY \in T_{\pi(g)}\mathbb{C}P^n, Y \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} df_X|_g(gY) &= -\tfrac{1}{\pi} \left.\frac{d}{dt}\right|_0 B(J, \exp(-Yt)g^{-1}Xg\exp(Yt)) \\ &= -\tfrac{1}{\pi}\, B(J, (-Y)g^{-1}Xg) - \tfrac{1}{\pi}\, B(J, g^{-1}XgY) \end{aligned}$$

$$= -\tfrac{1}{\pi} B(J, [g^{-1}Xg, Y]) = \Omega(Xg, gY).$$

В силу произвольности вектора gY это доказывает утверждение леммы. $\square$

Это свойство формы Фубини-Штуди пригодится в следующем разделе.

1.4 Отображение момента

Форма $\tilde{\omega} = \omega + \varepsilon\Omega$, где ω – естественная симплектическая форма на кокасательном расслоении, Ω – форма Фубини-Штуди, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, задает структуру симплектического многообразия на $T^*\mathbb{C}P^n$. Параметр ε позволяет проследить за деформацией геодезического потока с добавлением магнитного поля. Группа $\mathbf{G}$ действует на $T^*\mathbb{C}P^n$ симплектическими диффеоморфизмами, причем это действие гамильтоново. Это значит, что для любого $X \in \mathfrak{g}$ однопараметрическая группа $\exp(Xt)$ индуцирует векторное поле на $T^*\mathbb{C}P^n$, которое будет гамильтоновым с некоторой функцией Гамильтона, вид которой будет дан позже. Форма $\tilde{\omega}$ устанавливает соответствие между ковекторами и векторами $\omega^1 \mapsto \eta$ по правилу

$$\omega^1(\xi) = \tilde{\omega}(\xi, \eta).$$

В частности каждой функции $f \in C^\infty(T^*\mathbb{C}P^n)$ можно сопоставить векторное поле $\mathrm{sgrad} f$ ("косой градиент")

$$df(\xi) = \tilde{\omega}(\xi, \mathrm{sgrad} f).$$

Структуру алгебры Ли на $C^\infty(T^*\mathbb{C}P^n)$ задает скобка Пуассона

$$\{f, g\} = \tilde{\omega}(\mathrm{sgrad} g, \mathrm{sgrad} f). \qquad (10)$$

Используя риманову метрику можно отождествить касательное и кокасательное расслоения, поэтому все выкладки будем проводить в касательном расслоении.

Пространство $T_X T\mathbb{C}P^n$, $X \in \mathfrak{m} = T_{\pi(e)}\mathbb{C}P^n$, можно отождествить с (см. [16])

$$\{(v, -\tfrac{1}{2}[v, X] + w),\ v, w \in \mathfrak{m}\} \subset T_X(T\mathbf{G}) = T_X(\mathbf{G} \times \mathfrak{g}).$$

Симплектическая структура на пространстве $T_X T\mathbb{C}P^n$ определяется с помощью формы (7)

$$\tilde{\omega}_X((v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1), (v_2, -\tfrac{1}{2}[v_2, X] + w_2)) = \\ = B(w_1, v_2) - B(w_2, v_1) + \varepsilon\Omega(v_1, v_2).$$

Используя симплектическое действие группы $\mathbf{G}$ на $T\mathbb{C}P^n$ можно получить выражение для симплектической структуры в произвольной точке $gX \in T\mathbb{C}P^n$, $X \in \mathfrak{m}$, $g \in \mathbf{G}$. Справедлива лемма (см. [16])

Лемма 1.2. *Симплектическая структура на $T\mathbb{C}P^n$ в точке gX имеет вид*

$$\tilde{\omega}_{gX}(g_{*|X}(v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1), g_{*|X}(v_2, -\tfrac{1}{2}[v_2, X] + w_2)) = \\ = B(w_1, v_2) - B(w_2, v_1) + \varepsilon\Omega(v_1, v_2).$$

□

$\mathbf{G}$-инвариантные функции f на $T\mathbb{C}P^n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантными функциями $h : \mathfrak{m} \to \mathbb{R}$, соответствие устанавливается по правилу

$$f(gX) = h(X), \quad \forall X \in \mathfrak{m}.$$

Градиент $\nabla h(X)$ произвольной функции $h \in C^\infty(\mathfrak{g})$ в точке $X \in \mathfrak{g}$ определяется с помощью формы B следующим образом

$$dh(X)(Y) = B(\nabla h(X), Y), \quad Y \in \mathfrak{g}.$$

Лемма 1.3. *Пусть $f : T\mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}$ произвольная $\mathbf{G}$-инвариантная функция, определенная $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантной функцией $h : \mathfrak{m} \to \mathbb{R}$. Гамильтоново векторное поле функции f дается формулой*

$$\mathrm{sgrad} f(gX) = g_{*|X}(v, -\tfrac{1}{2}[v, X] + w),$$

где $v = \nabla h(X)$ и $w = -\frac{1}{2}[\nabla h(X), X]_{\mathfrak{m}} + \varepsilon\frac{1}{\pi}[J, \nabla h(X)]_{\mathfrak{m}}$.

Доказательство. Согласно [16], предложение 3.4, $\forall v_1, w_1 \in \mathfrak{m}$

$$df_{gX}(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}(v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}\bigg|_0 (f \circ g \circ \pi_* \circ \exp_{*|tv_1}(X + tw_1)) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_0 (f \circ (g \exp tv_1) \circ \pi_{*|e}(X + tw_1 - \tfrac{1}{2}t[v_1, X] + O(t^2))) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_0 (h(X + tw_1 - \tfrac{1}{2}t[v_1, X]_{\mathfrak{m}} + O(t^2))) \\
&= B(\nabla h(X), w_1) - \tfrac{1}{2}B(\nabla h(X), [v_1, X]) \\
&= B(\nabla h(X), w_1) - B(-\tfrac{1}{2}[\nabla h(X), X], v_1) \\
&= \tilde{\omega}_{gX}(g_{*|X}(v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1), \mathrm{sgrad} f(gX)) \\
&= B(w_1, v) - B(w, v_1) - \varepsilon\tfrac{1}{\pi}B([v_1, v], J) \\
&= B(v, w_1) - B(w + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}[v, J], v_1).
\end{aligned}
$$

Следовательно

$$
\begin{aligned}
&v = \nabla h(X) \\
&w = -\tfrac{1}{2}[\nabla h(X), X]_{\mathfrak{m}} + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}[J, \nabla h(X)]_{\mathfrak{m}}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Функция Гамильтона геодезического потока имеет вид

$$
H(gX) = h(X) = \tfrac{1}{2}B(X, X), \quad X \in \mathfrak{m}, \tag{11}
$$

ее гамильтоново векторное поле

$$
\mathrm{sgrad} H(gX) = g_{*|X}(X, \varepsilon\tfrac{1}{\pi}[J, X]_{\mathfrak{m}}). \tag{12}
$$

По теореме Нётер компонента импульса вдоль поля Киллинга $K = Yg$, соответствующего однопараметрической группе $A_\varphi = \exp(Y\varphi)$, будет линейным первым интегралом геодезического потока без магнитного поля, то есть при $\varepsilon = 0$. Если перейти к касательному расслоению, то интеграл будет иметь вид

$$
\tilde{I}_Y(gX) = B(X, g^{-1}Yg).
$$

Однако функция $\tilde{I}_Y$ не будет интегралом магнитного потока, и ее нужно немного изменить, чтобы она сохранялась магнитным геодезическим потоком.

В следующей лемме свойство формы Фубини-Штуди, доказанное в лемме 1.1, используется для корректировки функции $\tilde{I}_Y$. Функция определенная в лемме 1.1 может быть взята в качестве поправки к функции $\tilde{I}_Y$, необходимой для того, чтобы эта новая подкорректированная функция была интегралом магнитного геодезического потока.

Лемма 1.4. *Линейным интегралом магнитного геодезического потока соответствующим полю Киллинга $K = Yg$ будет функция*

$$I_Y = \tilde{I}_Y - \varepsilon f_Y,$$

где функция f_Y определена в (9).

Доказательство. Посчитаем дифференциал функции в произвольной точке gX, $g \in \mathbf{G}$, $X \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned}
&d(I_Y)_{gX}(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}(v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1)) \\
&\quad = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \big(B(X + tw_1 - \tfrac{1}{2}t[v_1, X]_{\mathfrak{m}} + O(t^2), e^{-tv_1}g^{-1}Yge^{tv_1}) + \\
&\quad + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}B(J, e^{-tv_1}g^{-1}Yge^{tv_1})\big) \\
&\quad = B(g^{-1}Yg, w_1 - \tfrac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}}) + B(X, [g^{-1}Yg, v_1]) + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}B(J, [g^{-1}Yg, v_1])
\end{aligned}$$

если подставить гамильтоново поле $\mathrm{sgrad}H$ функции Гамильтона геодезического потока (12), то есть $v_1 = X, w_1 = \varepsilon\frac{1}{\pi}[J, X]_{\mathfrak{m}}$, то получим

$$= B(g^{-1}Yg, \varepsilon\tfrac{1}{\pi}[J, X]_{\mathfrak{m}}) + B(X, [g^{-1}Yg, X]) + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}B(J, [g^{-1}Yg, X])$$

второе слагаемое исчезает, а первое и третье можно преобразовать

$$= \varepsilon\tfrac{1}{\pi}B((g^{-1}Yg)_{\mathfrak{m}}, [J, X]) + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}B(g^{-1}Yg, [X, J]) \equiv 0,$$

так как $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$ и $(g^{-1}Yg)_{\mathfrak{m}}$ можно заменить на $g^{-1}Yg$. $\square$

Отображение момента $P : T\mathbb{C}P^n \to \mathfrak{g}$ определяется следующим образом

$$B(P(\varkappa), X) := I_X(\varkappa), \quad \varkappa \in T\mathbb{C}P^n, X \in \mathfrak{g},$$

где I_X дано в лемме 1.4.

Лемма 1.5. *Отображение момента $P : T\mathbb{C}P^n \to \mathfrak{g}$ имеет вид*

$$P(gY) = \mathrm{Ad}(g)Y + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}\,\mathrm{Ad}(g)J,$$

где $gY \in T_{\pi(g)}\mathbb{C}P^n$, $Y \in \mathfrak{m}$, $g \in \mathbf{G}$.

Доказательство. Для произвольного $X \in \mathfrak{g}$ имеем

$$\begin{aligned} B(P(gY), X) &= \tilde{I}_X(gY) - \varepsilon f_X(g) \\ &= B(Y, g^{-1}Xg) + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}\,B(J, g^{-1}Xg) \\ &= B(gYg^{-1}, X) + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}\,B(gJg^{-1}, X) \\ &= B(gYg^{-1} + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}\,gJg^{-1}, X). \end{aligned}$$

□

Отображение момента постоянно на траекториях магнитного геодезического потока, так как функции I_X являются его интегралами. Поэтому каждая функция $h \in C^\infty(\mathfrak{g})$ генерирует первый интеграл этого потока I_h

$$I_h := h \circ P \in C^\infty(T\mathbb{C}P^n).$$

В частности, если $X \in \mathfrak{g}$ рассмотреть как функцию на $\mathfrak{g}$ (значение на элементе Y равно $B(X, Y)$) это определение I_X совпадает с предыдущим. Таким образом имеется отображение $C^\infty(\mathfrak{g}) \to C^\infty(T\mathbb{C}P^n), h \mapsto I_h$.

Введем скобку Ли-Пуассона на $C^\infty(\mathfrak{g})$, которая соответствует симплектической структуре Кириллова на орбитах коприсоединенного представления. Для $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathfrak{g})$ определим $\{h_1, h_2\} \in C^\infty(\mathfrak{g})$ следующим образом

$$\{h_1, h_2\}(X) = B(X, [\nabla h_1(X), \nabla h_2(X)]). \tag{13}$$

Предложение 1. *Отображение $C^\infty(\mathfrak{g}) \to C^\infty(T\mathbb{C}P^n), h \mapsto I_h = h \circ P$ задает гомоморфизм алгебр, то есть*

$$I_{\{h_1,h_2\}} = \{I_{h_1}, I_{h_2}\} \quad \textit{для всех } h_1, h_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}).$$

Докажем следующую вспомогательную лемму (см. [16], предложение 3.6).

Лемма 1.6. *Гамильтоново векторное поле функции $I_h = h \circ P$ имеет вид*

$$\mathrm{sgrad} I_h(gX) = g_{*|X}(v, -\tfrac{1}{2}[v, X] + w),$$

где

$$\begin{aligned}
&v = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}\\
&w = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}\\
&\zeta = \nabla h(\mathrm{Ad}(g)(X + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}J)).
\end{aligned}$$

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 1.3 выписывается дифференциал, $\forall v_1, w_1 \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned}
&d(I_h)_{gX}(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}(v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1))\\
&\quad = \frac{d}{dt}\bigg|_0 (h \circ \mathrm{Ad}(g \exp tv_1)(X + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}J + tw_1 - \tfrac{1}{2}t[v_1, X]_{\mathfrak{m}} + O(t^2)))\\
&\quad = B(\zeta, \mathrm{Ad}(g)([v_1, X + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}J] + w_1 - \tfrac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}}))\\
&\quad = B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, w_1) + B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, [v_1, X + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}J] - \tfrac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}})
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\quad = B(v, w_1) - B(w + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}[v, J], v_1). \tag{15}$$

Следовательно $v = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}$, а второе слагаемое в (14) равняется

$$\begin{aligned}
&B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, [v_1, X + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}J]) - \tfrac{1}{2}B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, [v_1, X]_{\mathfrak{m}})\\
&\quad = B(v_1, [X + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}J, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta]) - \tfrac{1}{2}B((\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, [v_1, X])\\
&\quad = -B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}J], v_1) - B(\tfrac{1}{2}[X, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}], v_1)\\
&\quad = -B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}J], v_1) - B(-\tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X], v_1).
\end{aligned}$$

Из этого и второго слагаемого (15) получается

$$\begin{aligned}
&w + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}[v, J] = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}J]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}\\
&w = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X]_{\mathfrak{m}} + \varepsilon\tfrac{1}{\pi}[\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, J]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon\tfrac{1}{\pi}[v, J].
\end{aligned}$$

Так как $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$ и J коммутирует с любым вектором из $\mathfrak{h}$, то второе и четвертое слагаемые сокращаются и остается окончательное выражение для w. $\square$

Доказательство предложения 1. Возьмем поля $\mathrm{sgrad} I_{h_1}$, $\mathrm{sgrad} I_{h_2}$ и подставим в (10), где выражение для $\tilde{\omega}$ дано в лемме 1.2

$$
\begin{aligned}
&\{I_{h_1}, I_{h_2}\}(gX) = \tilde{\omega}_{gX}(\,\mathrm{sgrad} I_{h_2}, \mathrm{sgrad} I_{h_1}) \\
&\quad = B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2, X]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}) - \\
&\quad - B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, X]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}) - \\
&\quad - \varepsilon\tfrac{1}{\pi} B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}], J)
\end{aligned}
$$

можно убрать проектирование на $\mathfrak{m}$ коммутаторов, так как $B(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = 0$

$$
\begin{aligned}
&\quad = B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2, X] - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}) - \\
&\quad - B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, X] - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}) - \\
&\quad - \varepsilon\tfrac{1}{\pi} B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}], J)
\end{aligned}
$$

разложим $\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i)_{\mathfrak{h}}$ и получим

$$
\begin{aligned}
&\quad = B(\tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}) + \\
&\quad + B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}) - \\
&\quad - B(\tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}) - \\
&\quad - B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}) + \\
&\quad + \varepsilon\tfrac{1}{\pi} B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}], J)
\end{aligned}
$$

добавим $B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}], X) \equiv 0$, которое ничего не меняет, и заметим, что первое и третье слагаемые совпадают

$$
\begin{aligned}
&\quad = B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}], X) + \\
&\quad + \varepsilon\tfrac{1}{\pi} B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}], J)
\end{aligned}
$$

если аналогичную процедуру проделать со вторым слагаемым, то получим

$$
\begin{aligned}
&\quad = B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2], X) + \varepsilon\tfrac{1}{\pi} B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2], J) \\
&\quad = B([\zeta_1, \zeta_2], \mathrm{Ad}(g)(X + \varepsilon\tfrac{1}{\pi} J)) = I_{\{h_1, h_2\}}(gX)
\end{aligned}
$$

Это в точности выражение (13) для h_1 и h_2. □

Из предложения следует, что достаточно найти семейство функций в инволюции в $C^\infty(\mathfrak{g})$. Рассмотрим функции $h \in C^\infty(\mathfrak{g})$ инвариантные относительно присоединенного действия группы $\mathbf{G}$ на $\mathfrak{g}$

$$h(\mathrm{Ad}(g)\, X) = h(X),\ \forall g \in \mathbf{G} \text{ и } \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Если зафиксировать X, подставить в это соотношение однопараметрическую группу $\exp(Yt)$ вместо g и взять производную, то для инвариантных функций получается

$$B(\nabla h(X), [Y, X]) = B(X, [\nabla h(X), Y]) = 0,\ \forall Y \in \mathfrak{g}. \qquad (16)$$

Из этого и (13) следует, что скобка Ли-Пуассона инвариантной функции с любой другой равна нулю. Это свойство инвариантных функций используется для построения инволютивного набора интегралов. Из (16) также можно получить выражение для инвариантных функций

$$[X, \nabla h(X)] = 0,\ \forall X \in \mathfrak{g}. \qquad (17)$$

1.5 Метод Тимма

Метод Тимма (см. [16]) основывается на использовании цепочек вложенных невырожденных подалгебр и инвариантных относительно присоединенного действия функций. Он позволяет получить большое количество первых интегралов системы, причем все эти интегралы находятся в инволюции, но при этом между интегралами полученными таким способом могут существовать нетривиальные зависимости. Такое семейство интегралов образует алгебру Ли относительно скобки Пуассона в силу взаимной инволютивности интегралов. Таким образом, основная трудность при доказательстве интегрируемости гамильтоновой системы, возникающая при использовании метода Тимма, состоит в нахождении независимых интегралов и доказательстве их независимости.

Подалгебра $\mathfrak{u}' \subset \mathfrak{u}$ алгебры $\mathfrak{u}$ называется невырожденной, если ограничение $B|_{\mathfrak{u}' \times \mathfrak{u}'}$ является невырожденной формой. Тогда можно определить ортогональную проекцию $\pi' : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}'$ на подалгебру $\mathfrak{u}'$.

Если h' — $\mathrm{Ad}(\mathbf{U}')$-инвариантная функция на $\mathfrak{u}'$, где $\mathbf{U}'$ — группа Ли соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{u}'$, то с помощью ортогональной проекции π' ее можно продолжить на $\mathfrak{u}$

$$h' \circ \pi' \in C^\infty(\mathfrak{u}).$$

Рассмотрим теперь две такие невырожденные подалгебры $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \subset \mathfrak{u}$, соответствующие им ортогональные проекции $\pi_i : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}_i$, и две произвольные $\mathrm{Ad}(\mathbf{U}_i)$-инвариантные на $\mathfrak{u}_i$ функции $h_i \in C^\infty(\mathfrak{u}_i)$, $\mathbf{U}_i$ — группы Ли соответствующие алгебрам $\mathfrak{u}_i$, $i = 1, 2$. Скобка Пуассона этих функций имеет вид

$$\begin{aligned}
\{h_1 \circ \pi_1, h_2 \circ \pi_2\}(X) &= B(X, [\nabla h_1(\pi_1 X), \nabla h_2(\pi_2 X)]) \\
&= B([X, \nabla h_1(\pi_1 X)], \nabla h_2(\pi_2 X)) \\
&= B([X_{\mathfrak{u}_1^\perp}, \nabla h_1(\pi_1 X)], \nabla h_2(\pi_2 X)) \\
&= B(X_{\mathfrak{u}_1^\perp}, [\nabla h_1(\pi_1 X), \nabla h_2(\pi_2 X)]).
\end{aligned}$$

Справедливо следующее предложение

Предложение 2 ([16], предложение 4.1). *Пусть $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \subset \mathfrak{u}$ — невырожденные подалгебры $\mathfrak{u}$, $\pi_i : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}_i$ — соответствующие ортогональные проекции. Тогда скобка Пуассона функций $h_1 \circ \pi_1$ и $h_2 \circ \pi_2$, соответствующих инвариантным функциям $h_i \in C^\infty(\mathfrak{u}_i), i = 1, 2$, тождественно равняется нулю на $\mathfrak{u}$, если $[\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2] \subset \mathfrak{u}_1$.*

В частности, это условие выполняется, когда $\mathfrak{u}_2 \subset \mathfrak{u}_1$. Поэтому если рассмотреть цепочку вложенных невырожденных подалгебр в $\mathfrak{u}$

$$\mathfrak{u}_n \hookrightarrow \mathfrak{u}_{n-1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathfrak{u}_2 \hookrightarrow \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}$$

и инвариантные функции $h_i^\alpha \in C^\infty(\mathfrak{u}_i), i = 1, 2, \ldots, n$, α из некоторого индексирующего множества, то семейство функций

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\alpha} h_i^\alpha \circ \pi_i$$

является инволютивным набором интегралов.

Для комплексного проективного пространства в работе Тимма [16] рассматривается цепочка подалгебр $\mathfrak{u}(n+1)$

$$\mathfrak{u}(1) \hookrightarrow \mathfrak{u}(2) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathfrak{u}(n) \hookrightarrow \mathfrak{u}(n+1),$$

вложенных как показано на схеме:

Пусть $\pi_i : \mathfrak{u}(n+1) \to \mathfrak{u}(i)$ – соответствующая ортогональная проекция, $h_i \in C^\infty(\mathfrak{u}(i))$ – $\mathrm{Ad}(\mathbf{U}(i))$-инвариантная функция. Тогда любые две функции $h_i \circ \pi_i, h_j \circ \pi_j \in C^\infty(\mathfrak{u}(n+1))$ находятся в инволюции в силу соотношений (13),(17) и вложенности подалгебр.
Пусть теперь $h, f \in C^\infty(\mathfrak{u}(i))$ – две $\mathrm{Ad}(\mathbf{U}(i))$-инвариантные функции. Тогда $f \circ \pi_i, h \circ \pi_i$ также находятся в инволюции в силу $\mathrm{Ad}(\mathbf{U}(i))$- инвариантности. Таким образом достаточно рассматривать $\mathrm{Ad}(\mathbf{U}(i))$-инвариантные функции, чтобы получить полный набор интегралов в инволюции. В качестве такого набора интегралов можно взять такие функции (см. [16])

$$\begin{aligned} &h \circ \pi_1 \circ P,\ h \circ \pi_2 \circ P,\ \ldots,\ h \circ \pi_n \circ P \\ &f \circ \pi_2 \circ P,\ f \circ \pi_3 \circ P,\ \ldots,\ f \circ \pi_n \circ P,\ H, \end{aligned} \tag{18}$$

где H – гамильтониан (11) магнитного геодезического потока, P – отображение момента (лемма 1.5), а функции h и f имеют вид

$$h(\zeta) = -\tfrac{i}{2} \operatorname{tr} \zeta, \quad f(\zeta) = -\tfrac{1}{4} \operatorname{tr} \zeta^2.$$

Это полный коммутативный набор интегралов (количество интегралов $2n$). Докажем независимость их гамильтоновых полей почти всюду на $T\mathbb{C}P^n$. Для этого достаточно доказать независимость в какой-нибудь одной точке.

Найдем гамильтоново поле функции $h \circ \pi_j \circ P$, $j = 1, .., n$ в точке $X \in \mathfrak{m}$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -\bar{x}^T & 0 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ x_i \in \mathbb{C},$$

для этого выпишем градиент в этой точке

$$\nabla h(\pi_j(P(X))) = \pi_j(iE_{n+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & iE_j \end{pmatrix},$$

где E_j – единичная матрица размера $j \times j$. По лемме 1.6 $v = 0$, а w имеет вид

$$w = [\nabla h(\pi_j(P(X))), X]_{\mathfrak{m}} = \begin{pmatrix} 0 & -ix_{(j)} \\ -i\bar{x}^T_{(j)} & 0 \end{pmatrix},$$

где $x_{(j)}$ отличается от x тем, что начиная с $(n-j+2)$-й все ее компоненты равны нулю.

Выпишем гамильтоново поле функции $f \circ \pi_j \circ P$, $j = 2, .., n$ в этой же точке $X \in \mathfrak{m}$. Градиент функции f имеет вид

$$\nabla f(\pi_j(P(X))) = \pi_j(X + \varepsilon \tfrac{1}{\pi} J).$$

Тогда v и w имеют вид

$$w = [\nabla f(\pi_j(P(X))), X]_{\mathfrak{m}} = \varepsilon \tfrac{1}{\pi}[J, X]_{\mathfrak{m}} = \varepsilon \tfrac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & -ix \\ -i\bar{x}^T & 0 \end{pmatrix},$$

$$v = (\nabla f(\pi_j(P(X))))_{\mathfrak{m}} = \pi_j(X).$$

Гамильтоново поле гамильтониана H дано в формуле (12). Видно, что если в x все компоненты различны и ненулевые, то гамильтоновы поля набора (18) будут независимы в точке X. Таким образом теорема 1 доказана.

1.6 Пример: магнитный геодезический поток на $\mathbb{C}P^1$

В этом разделе рассматривается магнитный геодезический поток, задаваемый формой Фубини-Штуди, на комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$. Для этого потока в явном виде построен полный набор первых интегралов.

Пусть $\mathbb{C}^2$ (z_0, z_1), где $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ со стандартным эрмитовым скалярным произведением (см. (4))

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum \xi_i \bar{\eta}_i$$

и рассмотрим на $\mathbb{C}P^1$ аффинную карту $z = (1, w)$, где $w = \frac{z_1}{z_0} = x+iy$, $dw = dx + idy$. Тогда если через $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus 0 \to \mathbb{C}P^1$ обозначим проекцию, сопоставляющую точке $z \neq 0$ комплексную прямую проходящую через 0 и z, то для любых $\xi_1, \xi_2 \in T_z\mathbb{C}^2$ имеющих вид

$$\xi_1 = (0, dx_1 + idy_1),$$
$$\xi_1 = (0, dx_1 + idy_1),$$

соответствующие им $\zeta_1, \zeta_2 \in T_{\pi(z)}\mathbb{C}P^1$ имеют вид

$$\zeta_1 = \pi_*\xi_1,$$
$$\zeta_2 = \pi_*\xi_2.$$

Согласно формуле (5) находим

$$\langle\zeta_1, \zeta_2\rangle = \frac{\langle\xi_1, \xi_2\rangle\langle z, z\rangle - \langle\xi_1, z\rangle\langle z, \xi_2\rangle}{\langle z, z\rangle^2} =$$
$$\frac{(dx_1 + idy_1)(dx_2 - idy_2)(1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} -$$
$$-\frac{(dx_1 + idy_1)(x - iy)(x + iy)(dx_2 - idy_2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} =$$
$$\frac{(dx_1 + idy_1)(dx_2 - idy_2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} =$$
$$\frac{dx_1dx_2 + dy_1dy_2 + i(dx_2dy_1 - dx_1dy_2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Отсюда сразу следует, что метрика Фубини–Штуди принимает вид

$$\langle\zeta, \zeta\rangle = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

а форма Фубини-Штуди Ω равна

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\ \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Введем полярные координаты

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

в которых метрика имеет вид

$$\frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{dr^2 + r^2\ d\varphi^2}{(1 + r^2)^2},$$

а форма Ω есть

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\ \frac{dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1}{\pi}\ \frac{r\ dr \wedge d\varphi}{(1+r^2)^2}.$$

Гамильтониан геодезического потока в этих координатах имеет вид

$$H = (1+r^2)^2 \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\ p_\varphi^2 \right).$$

Добавим к симплектической форме форму Фубини-Штуди, которая очевидно замкнутая и невырожденная,

$$\omega + \Omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi + \frac{r}{\pi(1+r^2)^2}\ dr \wedge d\varphi.$$

При этом мы получим уравнения движения магнитного геодезического потока, задаваемого формой Ω:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{r}{\pi(1+r^2)^2}\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r},$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} - \frac{r}{\pi(1+r^2)^2}\frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}.$$

Причем $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$. Тогда уравнение для p_φ примет вид

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{r}{\pi(1+r^2)^2}\frac{\partial H}{\partial p_r} = -\frac{r}{\pi(1+r^2)^2}\ \dot{r}.$$

Нетрудно заметить, что выражение

$$p_\varphi - \frac{1}{2\pi(1+r^2)}$$

будет первым интегралом. Действительно, возьмем производную

$$\frac{d}{dt}\left(p_\varphi - \frac{1}{2\pi(1+r^2)} \right) = -\frac{r}{\pi(1+r^2)^2}\frac{\partial H}{\partial p_r} + \frac{2r}{2\pi(1+r^2)^2}\ \dot{r} = 0,$$

так как $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r}$. Импульс p_φ – это интеграл геодезического потока, соответствующий однопараметрической группе унитарных преобразований $A^\tau : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$A^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\tau} \end{pmatrix},$$

поле Киллинга которой в карте (r, φ) имеет координаты $K = (0, 1)$. Подставим K в Ω, чтобы получить 1-форму

$$\Omega(K, \cdot) = -\frac{1}{\pi}\frac{r\ dr}{(1+r^2)^2}.$$

Она точна

$$\Omega(K, \cdot) = df, \text{ где } f = \frac{1}{2\pi(1+r^2)},$$

то есть $p_\varphi - f$ – интеграл деформированного геодезического потока, что было доказано выше. Это согласуется с леммой 1.4. Таким образом, магнитный геодезический поток на комплексной проективной прямой имеет два интеграла:

$$H \text{ и } p_\varphi - \frac{1}{2\pi(1+r^2)},$$

которые независимы и находятся в инволюции. Они образуют полный коммутативный набор независимых интегралов этого потока, так как размерность фазового пространства потока равна двум.

2 Магнитный геодезический поток на однородном симплектическом многообразии

В первой главе при доказательстве интегрируемости гамильтоновой системы использовалась интегрируемость в коммутативном смысле. В этом случае известны n независимых первых интегралов системы в инволюции (если размерность фазового пространства равна $2n$), при этом неособые компактные совместные поверхности уровня первых интегралов являются n-мерными торами (торами Лиувилля). Фазовый поток определяет на торах Лиувилля условно-периодическое движение.

Если же система обладает избыточным набором первых интегралов, которые не коммутируют между собой, то при определенных дополнительных условиях компактные совместные поверхности уровня первых интегралов являются торами размерности $k < n$, а движение на них будет опять же условно-периодическим. В этом случае говорят, что имеет место *некоммутативная интегрируемость* или *интегрируемость в некоммутативном смысле.* В этой главе мы будем пользоваться интегрируемостью в некоммутативном смысле.

2.1 Основные определения и факты

В этой главе доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ — односвязное однородное симплектическое многообразие, где $\mathbf{G}$ — компактная полупростая группа Ли. Тогда существует риманова метрика на M такая, что магнитный геодезический поток, задаваемый симплектической формой, интегрируем в некоммутативном смысле.*

Пусть $\mathbf{G}$ — группа Ли. Будем говорить, что группа $\mathbf{G}$ действует на многообразии M (диффеоморфизмами), если каждому ее элементу g соответствует преобразование (диффеоморфизм) многообразия M

$$X \mapsto g \cdot X, \quad X \in M,$$

такое, что выполняются условия

1. $g_1 g_2 \cdot X = g_1 \cdot (g_2 \cdot X),\ X \in M,\ g_1, g_2 \in \mathbf{G}$
2. отображение $\mathbf{G} \times M \to M,\ (g, X) \mapsto g \cdot X$ непрерывно (гладкое) по обоим аргументам.

Из первого свойства следует, что

$$e \cdot X = X,\ \forall X \in M,$$

где e — единица группы $\mathbf{G}$. Если единица группы e является единственным элементом группы $\mathbf{G}$, который оставляет на месте каждую точку $X \in M$, то говорят, что группа $\mathbf{G}$ действует на M *эффективно*, а группа $\mathbf{G}$ тогда называется *эффективной*.

Говорят, что группа Ли $\mathbf{G}$ действует на многообразии M *транзитивно*, если для любой пары точек X и Y из M найдется такой элемент g группы $\mathbf{G}$, что

$$g \cdot X = Y.$$

Определение. Если на многообразии M задано транзитивное действие группы Ли $\mathbf{G}$, то оно называется *однородным пространством* этой группы.

Пусть X — точка однородного пространства группы $\mathbf{G}$. Группой изотропии точки X называется подгруппа группы $\mathbf{G}$, которая состоит из всех элементов g группы $\mathbf{G}$, оставляющих точку X неподвижной:

$$\mathbf{H}_X = \{g \in \mathbf{G}, g \cdot X = X\}.$$

Справедливо следующее утверждение(см., например, [28]).

Лемма 2.1. *Группы изотропии разных точек однородного пространства изоморфны друг другу.*

Доказательство. Если $X = g \cdot Y$ и $X \neq Y$, то изоморфизм $\mathbf{H}_X \to \mathbf{H}_Y$ задается соотношением

$$h \mapsto ghg^{-1}.$$

$\square$

Следующее предложение дает очень удобное представление однородных пространств.

Предложение 3. *Имеется взаимно однозначное соответствие между точками однородного пространства M группы $\mathbf{G}$ и левыми смежными классами $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — группа изотропии.*

Доказательство. Пусть X — точка многообразия M, $\mathbf{H}$ — группа изотропии точки X. Соответствие устанавливается по следующему правилу: смежному классу $g\mathbf{H}$ ставится в соответствие точка $g{\cdot}X$. Это соответствие не зависит от выбора представителя g в классе смежности и является взаимно однозначным. □

Будем говорить, что однородное пространство $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ является однородным симплектическим многообразием, если симплектическая форма, задающая симплектическую структуру на M, инвариантна относительно действия группы $\mathbf{G}$. В [26] Костантом была доказана теорема, которая будет очень полезна в нашей работе.

Теорема (Костант). *Предположим, что $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ (например, алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста). Тогда самое общее $\mathbf{G}$-однородное симплектическое пространство накрывает одну из орбит в $\mathfrak{g}$. Кроме того, накрывающее отображение и, следовательно, орбита определены однозначно.*

Напомним определение некоммутативной интегрируемости [2] (см. также [3]). Пусть $\mathcal{F}$ пространство первых интегралов гамильтоновой системы, которое образует алгебру Ли относительно скобки Пуассона. Для каждой точки $x \in M$ определим два подпространства в T_x^*M: $F_x \subset T_x^*M$ – пространство, порожденное дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}$, и $K_x \subset F_x$ – ядро ограничения пуассоновой структуры на F_x.

Определение. Если имеется открытое всюду плотное подмножество $U \subset M$ (точек общего положения) такое, что для всех $x \in U$ выполняется соотношение

$$\mathrm{dim} F_x + \mathrm{dim} K_x = \mathrm{dim} M,$$

то гамильтонова система называется *интегрируемой в некоммутативном смысле.*

В этом случае число $\dim F_x$ называется дифференциальной размерностью алгебры интегралов $\mathcal{F}$, а $\dim K_x$ – дифференциальным индексом. Они обозначаются соответственно через $\mathrm{ddim}\mathcal{F}$ и $\mathrm{dind}\mathcal{F}$. Тогда условие некоммутативной интегрируемости можно записать в виде

$$\mathrm{ddim}\mathcal{F} + \mathrm{dind}\mathcal{F} = \dim M.$$

Согласно результатам Костанта [26], односвязное однородное симплектическое многообразие из Теоремы 2 симплектоморфно орбите присоединенного представления группы $\mathbf{G}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Поэтому Теорема 2 немедленно вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Рассмотрим орбиту присоединенного представления компактной полупростой группы Ли* $\mathbf{G}$ *и риманову метрику* g *индуцированную формой Киллинга на алгебре Ли. На орбите существует стандартная симплектическая структура* Ω *(форма Кириллова). Тогда магнитный геодезический поток, задаваемый формой* Ω*, интегрируем в некоммутативном смысле.*

2.2 Форма Кириллова

Рассмотрим орбиту M компактной группы Ли $\mathbf{G}$ в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку центр группы $\mathbf{G}$ тривиально действует на $\mathfrak{g}$, его можно считать тривиальным. Тогда алгебра Ли окажется полупростой, а группа $\mathbf{G}$ будет ее присоединенной группой. Будем считать, что M — полная орбита группы $\mathbf{G}$ в $\mathfrak{g}$. Зафиксируем точку $W \in M$. При этом орбита M отождествляется с фактор-пространством

$$M = \mathbf{G}/\mathbf{H},$$

где $\mathbf{H}$ — стабилизатор точки W.

Форма Киллинга задает $\mathrm{Ad}(\mathbf{G})$- инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$ $(\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1})$

$$B(X,Y) = B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y), \ \forall g \in \mathbf{G}, \ X, Y \in \mathfrak{g}, \qquad (19)$$

которое индуцирует $\mathbf{G}$- инвариантную риманову метрику на орбите M. Алгебра $\mathfrak{g}$ может быть представлена в виде прямой суммы

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m},$$

где $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение алгебры Ли $\mathfrak{h}$ группы $\mathbf{H}$ относительно формы Киллинга B. Тогда

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}. \tag{20}$$

Пространство $\mathfrak{m}$ отождествляется с $T_{\pi(e)}M = T_W M$ при помощи $\pi_*|_e$, где $\pi : \mathbf{G} \to M$ — каноническая проекция. Точку W орбиты M можно рассматривать и как элемент алгебры $\mathfrak{g}$, тогда справедливы следующие соотношения

$$\mathfrak{h} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{ad}(W), \quad \mathfrak{m} = \mathrm{Im}\ \mathrm{ad}(W).$$

Индуцированная формой Киллинга $\mathbf{G}$- инвариантная риманова метрика на орбите M имеет вид

$$\langle gX, gY \rangle = B(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{m},\ gX, gY \in T_{\pi(g)}M. \tag{21}$$

Далее с помощью формы Киллинга (19) определяем $\mathbf{G}$- инвариантную 2-форму Ω на M

$$\Omega(gX, gY) = B(W, [X, Y]), \quad X, Y \in \mathfrak{m},\ gX, gY \in T_{\pi(g)}M. \tag{22}$$

Форма Ω представляет собой симплектическую структуру на M, которая есть в точности симплектическая структура Кириллова (см., например, [27]).

Пусть теперь $A_\varphi = \exp(X\varphi)$ — однопараметрическая подгруппа $\mathbf{G}$, $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, она является однопараметрической группой преобразований M и сохраняет метрику (21) и форму (22). Соответствующее поле Киллинга будет иметь вид Xg.

Лемма 2.2. *Для любого поля Киллинга $K = Xg$ существует такая функция f, что*

$$df = \Omega(K, \cdot).$$

Доказательство. Для Киллингова поля $K = Xg$ рассмотрим функцию

$$f_X(g) = B(W, g^{-1}Xg). \qquad (23)$$

Подсчитаем значение дифференциала этой функции в точке $\pi(g)$ на векторе $gY \in T_{\pi(g)}M, Y \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} df_X|_g(gY) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 B(W, \exp(-Yt)g^{-1}Xg\exp(Yt)) \\ &= B(W, [g^{-1}Xg, Y]) = \Omega(Xg, gY). \end{aligned}$$

В силу произвольности вектора gY это доказывает утверждение леммы. □

2.3 Отображение момента

Форма $\tilde{\omega} = \omega + \varepsilon\Omega$, где ω — стандартная симплектическая форма на кокасательном расслоении M, $\varepsilon \in \mathbb{R}, \Omega$ — форма (22), задает структуру симплектического многообразия на T^*M. Параметр ε позволяет проследить за деформацией геодезического потока с добавлением магнитного поля. Группа $\mathbf{G}$ действует на T^*M симплектическими диффеоморфизмами, причем это действие гамильтоново. Это значит, что для любого $X \in \mathfrak{g}$ однопараметрическая группа $\exp(Xt)$ индуцирует векторное поле на T^*M, которое будет гамильтоновым с некоторой функцией Гамильтона, вид которой будет дан позже. Форма $\tilde{\omega}$ устанавливает соответствие между ковекторами и векторами $\omega^1 \mapsto \eta$ по правилу

$$\omega^1(\xi) = \tilde{\omega}(\xi, \eta).$$

В частности каждой функции $f \in C^\infty(T^*M)$ можно сопоставить векторное поле $\mathrm{sgrad} f$ ("косой градиент")

$$df(\xi) = \tilde{\omega}(\xi, \mathrm{sgrad} f).$$

Структуру алгебры Ли на $C^\infty(T^*M)$ задает скобка Пуассона

$$\{f, g\} = \tilde{\omega}(\mathrm{sgrad} g, \mathrm{sgrad} f). \qquad (24)$$

Используя риманову метрику можно отождествить касательное и кокасательное расслоения, поэтому все выкладки будем проводить в касательном расслоении.
Пространство $T_X TM, X \in \mathfrak{m} = T_{\pi(e)}M$, можно отождествить с (см. [16])

$$\{(v, -\tfrac{1}{2}[v, X] + w), v, w \in \mathfrak{m}\} \subset T_X(T\mathbf{G}) = T_X(\mathbf{G} \times \mathfrak{g}).$$

Симплектическая структура на пространстве $T_X TM$ определяется с помощью формы (19)

$$\tilde{\omega}_X((v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1), (v_2, -\tfrac{1}{2}[v_2, X] + w_2)) = \\ = B(w_1, v_2) - B(w_2, v_1) + \varepsilon\Omega(v_1, v_2).$$

Используя симплектическое действие группы $\mathbf{G}$ на TM можно получить выражение для симплектической структуры в произвольной точке $gX \in TM, X \in \mathfrak{m}, g \in \mathbf{G}$. Справедлива лемма (см. [16])

Лемма 2.3. *Симплектическая структура на TM в точке gX имеет вид*

$$\tilde{\omega}_{gX}(g_{*|X}(v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1), g_{*|X}(v_2, -\tfrac{1}{2}[v_2, X] + w_2)) = \\ = B(w_1, v_2) - B(w_2, v_1) + \varepsilon\Omega(v_1, v_2).$$

□

$\mathbf{G}$- инвариантные функции f на TM находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$- инвариантными функциями $\theta : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, соответствие устанавливается по правилу (см., например, [16])

$$f(gX) = \theta(X),\ X \in \mathfrak{m} = T_{\pi(e)}M,\ gX \in T_{\pi(g)}M. \tag{25}$$

Градиент $\nabla\theta(X)$ произвольной функции $\theta \in C^\infty(\mathfrak{g})$ в точке $X \in \mathfrak{g}$ определяется с помощью формы Киллинга следующим образом

$$d\theta(X)(Y) = B(\nabla\theta(X), Y), \quad Y \in \mathfrak{g}.$$

С помощью градиента можно выписать одно полезное свойство $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантных функций

$$[\nabla\theta(X), X]_{\mathfrak{h}} = 0,\ \forall X \in \mathfrak{m}. \tag{26}$$

Здесь $\xi_{\mathfrak{m}}$ обозначает ортогональную проекцию $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{m}$ параллельно подалгебре $\mathfrak{h}$, а $\xi_{\mathfrak{h}} = \xi - \xi_{\mathfrak{m}}$.

В случае магнитного геодезического потока нам удобнее будет рассматривать немного модифицированное соответствие (25), а именно

$$f(gX) = \theta(X - \varepsilon W),\ X \in \mathfrak{m} = T_{\pi(e)}M,\ gX \in T_{\pi(g)}M. \qquad (27)$$

Это корректное определение, так как θ — $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$- инвариантная функция, а $hWh^{-1} = W,\ \forall h \in \mathbf{H}$. При этом свойство (26) можно записать в виде

$$[\nabla\theta(X - \varepsilon W), X - \varepsilon W]_{\mathfrak{h}} = 0,\ \forall X \in \mathfrak{m} \qquad (28)$$

или

$$[\nabla\theta(X - \varepsilon W), X]_{\mathfrak{h}} = 0,\ \forall X \in \mathfrak{m} \qquad (29)$$

или

$$[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{h}} = 0,\ \forall X \in \mathfrak{m}. \qquad (30)$$

Их эквивалентность следует из (20) и того, что $\mathfrak{h} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{ad}(W)$.

Предложение 4. *Пусть $f : TM \to \mathbb{R}$ произвольная $\mathbf{G}$- инвариантная функция, определенная $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$- инвариантной функцией $\theta : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ по правилу (27). Гамильтоново векторное поле функции f дается формулой*

$$\mathrm{sgrad} f(gX) = g_{*|X}(v, -\tfrac{1}{2}[v, X] + w),$$

где $v = \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}$ и $w = -\frac{1}{2}[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]$.

Доказательство. Согласно [2], предложение 3.4, $\forall v_1, w_1 \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned}
&df_{gX}(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}(v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1)) \\
&\quad = \frac{d}{dt}\Big|_0 \big(\theta(X - \varepsilon W + tw_1 - \tfrac{1}{2}t[v_1, X]_{\mathfrak{m}} + O(t^2))\big) \\
&\quad = B(\nabla\theta(X - \varepsilon W), w_1 - \tfrac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}}) \\
&\quad = B(\nabla\theta(X - \varepsilon W), w_1) - \tfrac{1}{2}B(\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, [v_1, X]) \\
&\quad = B(\nabla\theta(X - \varepsilon W), w_1) - B(-\tfrac{1}{2}[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X], v_1) \\
&\quad = \tilde{\omega}_{gX}(g_{*|X}(v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1), \mathrm{sgrad} f(gX))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= B(w_1, v) - B(w, v_1) + \varepsilon B(W, [v_1, v]) \\
&= B(v, w_1) - B(w + \varepsilon[W, v], v_1).
\end{aligned}
$$

Следовательно

$$
\begin{aligned}
&v = \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}} \\
&w = -\tfrac{1}{2}[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}].
\end{aligned}
$$

□

Следствие 1. *Если $f_1, f_2 : TM \to \mathbb{R}$ — две $\mathbf{G}$- инвариантные функции соответствующие $\theta_1, \theta_2 : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, то их скобка Пуассона имеет вид*

$$
\{f_1, f_2\}(gX) = -B(X - \varepsilon W, [\nabla\theta_1(X - \varepsilon W), \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)]).
$$

Доказательство. Если в доказательстве предыдущего предложения вместо w_1 и v_1 подставить соответствующие выражения для $\mathrm{sgrad} f_2(gX)$, то получаем

$$
\begin{aligned}
&df_1|_{gX}(\mathrm{sgrad} f_2(gX)) = \{f_1, f_2\}(gX) = \tilde{\omega}_{gX}(\mathrm{sgrad} f_2(gX), \mathrm{sgrad} f_1(gX)) \\
&\quad = B\left(\nabla\theta_1(X - \varepsilon W), -\tfrac{1}{2}[\nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}B([\nabla\theta_1(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X], \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}) \\
&\quad = -B(X, [\nabla\theta_1(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]) \\
&\quad + \varepsilon B(W, [\nabla\theta_1(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]) \\
&\quad = -B(X - \varepsilon W, [\nabla\theta_1(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]) \\
&\quad = -B(X - \varepsilon W, [\nabla\theta_1(X - \varepsilon W), \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)])
\end{aligned}
$$

В последнем равенстве мы воспользовались свойством (28) $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантности функций θ_1, θ_2, соотношениями (20) и тем, что $\mathfrak{h} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}(W)$. □

Функция Гамильтона геодезического потока имеет вид

$$
H(gX) = h(X) = \tfrac{1}{2}B(X, X), \quad X \in \mathfrak{m},
$$

и отличается на константу от функции

$$
\tilde{H}(gX) = h(X - \varepsilon W) = \tfrac{1}{2}B(X - \varepsilon W, X - \varepsilon W) = H(gX) + \tfrac{\varepsilon^2}{2}B(W, W), \tag{31}
$$

а их гамильтоновы векторные поля совпадают

$$\mathrm{sgrad}\tilde{H}(gX) = \mathrm{sgrad}H(gX) = g_{*|X}(X, -\varepsilon[W, X]_{\mathfrak{m}}).$$

Таким образом $\tilde{H}$ можно рассматривать в качестве гамильтониана геодезического потока. Из следствия 1 сразу следует, что $\tilde{H}$ коммутирует с любой $\mathbf{G}$- инвариантной функцией, то есть они являются интегралами геодезического потока.

Если рассматривать стандартную скобку Пуассона (то есть при $\varepsilon = 0$), то по теореме Нётер компонента импульса вдоль поля Киллинга $K = Yg$, соответствующего однопараметрической группе $A_\varphi = \exp(Y\varphi)$, будет линейным первым интегралом любого потока с $\mathbf{G}$- инвариантным гамильтонианом. Если перейти к касательному расслоению, то интеграл будет иметь вид

$$\tilde{I}_Y(gX) = B(X, g^{-1}Yg).$$

Однако после деформации скобки Пуассона функция $\tilde{I}_Y$ перестает быть интегралом, и ее нужно немного изменить, чтобы она сохранялась потоком.

Предложение 5. *Линейным интегралом потока с $\mathbf{G}$- инвариантной функцией Гамильтона, который соответствует полю Киллинга $K = Yg$, будет функция*

$$I_Y = \tilde{I}_Y - \varepsilon f_Y,$$

где функция f_Y определена в (23).

Доказательство. Подсчитаем дифференциал функции в произвольной точке $gX, g \in \mathbf{G}, X \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} d(I_Y)_{gX}(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}(v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1)) \\ = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \big(B(X + tw_1 - \tfrac{1}{2}t[v_1, X]_{\mathfrak{m}} + O(t^2), e^{-tv_1}g^{-1}Yge^{tv_1}) - \\ -\varepsilon B(W, e^{-tv_1}g^{-1}Yge^{tv_1})\big) \\ = B(g^{-1}Yg, w_1 - \tfrac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}}) + B(X, [g^{-1}Yg, v_1]) - \varepsilon B(W, [g^{-1}Yg, v_1]) \end{aligned}$$

если подставить гамильтоново поле $\mathbf{G}$- инвариантной функции Гамильтона, то есть $v_1 = \nabla\theta(X-\varepsilon W)_{\mathfrak{m}}$ и $w_1 = -\frac{1}{2}[\nabla\theta(X-\varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla\theta(X-\varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]$, то получим

$$\begin{aligned}
&= B(g^{-1}Yg, -[\nabla\theta(X-\varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla\theta(X-\varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]) \\
&+ B(X, [g^{-1}Yg, \nabla\theta(X-\varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]) - \varepsilon B(W, [g^{-1}Yg, \nabla\theta(X-\varepsilon W)_{\mathfrak{m}}])
\end{aligned}$$

слагаемые с ε сокращаются, и так как θ $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$- инвариантна и, следовательно, справедливо (30), то можно убрать проектирование на $\mathfrak{m}$ скобки Ли

$$= B(g^{-1}Yg, -[\nabla\theta(X-\varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]) + B(X, [g^{-1}Yg, \nabla\theta(X-\varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]) \equiv 0.$$

□

Отображение момента $P : TM \to \mathfrak{g}$ определяется следующим образом

$$B(P(\varkappa), X) := I_X(\varkappa), \quad \varkappa \in TM, X \in \mathfrak{g},$$

где I_X дано в предложении 5.

Лемма 2.4. *Отображение момента $P : TM \to \mathfrak{g}$ имеет вид*

$$P(gY) = \mathrm{Ad}(g)(Y - \varepsilon W),$$

где $gY \in T_{\pi(g)}M, Y \in \mathfrak{m}, g \in \mathbf{G}$.

Доказательство. Для произвольного $X \in \mathfrak{g}$ имеем

$$\begin{aligned}
B(P(gY), X) &= \tilde{I}_X(gY) - \varepsilon f_X(g) \\
&= B(Y, g^{-1}Xg) - \varepsilon B(W, g^{-1}Xg) \\
&= B(gYg^{-1}, X) - \varepsilon B(gWg^{-1}, X) \\
&= B(g(Y - \varepsilon W)g^{-1}, X).
\end{aligned}$$

□

Отображение момента постоянно на траекториях любого потока задаваемого $\mathbf{G}$- инвариантным гамильтонианом, так как функции I_X

являются его интегралами. Поэтому каждая функция $h \in C^\infty(\mathfrak{g})$ генерирует первый интеграл такого потока I_h

$$I_h := h \circ P \in C^\infty(TM).$$

В частности, если $X \in \mathfrak{g}$ рассмотреть как функцию на $\mathfrak{g}$ (значение на элементе Y равно $B(X, Y)$) это определение I_X совпадает с предыдущим. Таким образом имеется отображение $C^\infty(\mathfrak{g}) \to C^\infty(TM), h \mapsto I_h$.

Для $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathfrak{g})$ их скобка Ли-Пуассона, которую мы будем обозначать через $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$, имеет вид

$$\{h_1, h_2\}_{\mathfrak{g}}(X) = B(X, [\nabla h_1(X), \nabla h_2(X)]). \tag{32}$$

Предложение 6. *Отображение $C^\infty(\mathfrak{g}) \to C^\infty(TM), h \mapsto I_h = h \circ P$ задает гомоморфизм алгебр, то есть*

$$I_{\{h_1,h_2\}_{\mathfrak{g}}} = \{I_{h_1}, I_{h_2}\} \quad \textit{для всех } h_1, h_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}).$$

Докажем следующую вспомогательную лемму (см. [2, предложение 3.6]).

Лемма 2.5. *Гамильтоново векторное поле функции $I_h = h \circ P$ имеет вид*

$$\mathrm{sgrad} I_h(gX) = g_{*|X}(v, -\tfrac{1}{2}[v, X] + w),$$

где

$$\begin{aligned} &v = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}} \\ &w = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} \\ &\zeta = \nabla h(\mathrm{Ad}(g)(X - \varepsilon W)). \end{aligned}$$

Доказательство. По аналогии с доказательством предложения 4 выписывается дифференциал, $\forall v_1, w_1 \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} &d(I_h)_{gX}(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}(v_1, -\tfrac{1}{2}[v_1, X] + w_1)) \\ &\quad = \frac{d}{dt}\bigg|_0 (h \circ \mathrm{Ad}(ge^{tv_1})(X - \varepsilon W + tw_1 - \tfrac{1}{2}t[v_1, X]_{\mathfrak{m}} + O(t^2))) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= B(\zeta, \mathrm{Ad}(g)([v_1, X - \varepsilon W] + w_1 - \tfrac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}})) \\
&= B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, w_1) + B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, [v_1, X - \varepsilon W] - \tfrac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}}) \\
&= B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, w_1) + \\
&+ B(v_1, [X - \varepsilon W, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta]) - \tfrac{1}{2}B((\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, [v_1, X]) \\
&= B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, w_1) - \\
&- B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X - \varepsilon W], v_1) - B(-\tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X], v_1) \\
&= B(v, w_1) - B(w + \varepsilon[W, v], v_1).
\end{aligned}
$$

Следовательно $v = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}$.

$$
\begin{aligned}
&w + \varepsilon[W, v] = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X - \varepsilon W]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} \\
&w = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}},
\end{aligned}
$$

так как $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$ и W коммутирует с любым вектором из $\mathfrak{h}$, то слагаемые с ε сокращаются и остается окончательное выражение для w. □

Доказательство предложения 6. Возьмем поля $\mathrm{sgrad} I_{h_1}, \mathrm{sgrad} I_{h_2}$ и подставим в (24), где выражение для $\tilde{\omega}$ дано в лемме 2.3

$$
\begin{aligned}
&\{I_{h_1}, I_{h_2}\}(gX) = \tilde{\omega}_{gX}(\mathrm{sgrad} I_{h_2}, \mathrm{sgrad} I_{h_1}) \\
&\quad = B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2, X]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}) - \\
&\quad - B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, X]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}) + \\
&\quad + \varepsilon B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}], W)
\end{aligned}
$$

можно убрать проектирование на $\mathfrak{m}$ коммутаторов, так как $B(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = 0$

$$
\begin{aligned}
&= B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2, X] - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}) - \\
&- B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, X] - \tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}) + \\
&+ \varepsilon B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}], W)
\end{aligned}
$$

разложим $\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i)_{\mathfrak{h}}$ и получим

$$
= B(\tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}) +
$$

$$
\begin{aligned}
&+ B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}})- \\
&- B(\tfrac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}})- \\
&- B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}})- \\
&- \varepsilon B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}], W)
\end{aligned}
$$

добавим $B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}], X) \equiv 0$, которое ничего не меняет, и заметим, что первое и третье слагаемые совпадают

$$
\begin{aligned}
&= B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}], X)- \\
&- \varepsilon B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}], W)
\end{aligned}
$$

если аналогичную процедуру проделать со вторым слагаемым, то получим

$$
\begin{aligned}
&= B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2], X) - \varepsilon B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2], W) \\
&= B([\zeta_1, \zeta_2], \mathrm{Ad}(g)(X - \varepsilon W)) = I_{\{h_1,h_2\}_{\mathfrak{g}}}(gX)
\end{aligned}
$$

Это в точности выражение (32) для h_1 и h_2. $\square$

2.4 Доказательство теоремы 3

Мы воспользуемся схемой предложенной в [13].

Рассмотрим два семейства функций: $\mathcal{F}_1$ — множество функций вида $I_h = h \circ P,\ h \in C^\infty(\mathfrak{g}),\ P : TM \to \mathfrak{g}$ — отображение момента; $\mathcal{F}_2$ — множество $\mathbf{G}$- инвариантных функций на TM $f_\theta(gX) = \theta(X - \varepsilon W)$, где θ — $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$- инвариантная функция на $\mathfrak{g}$. Функции из $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ являются первыми интегралами магнитного геодезического потока задаваемого гамильтонианом (31).

Для функций из $\mathcal{F}_1$ в силу предложения 6 справедливо соотношение

$$\{I_{h_1}, I_{h_2}\} = I_{\{h_1,h_2\}_{\mathfrak{g}}},$$

а для функций из $\mathcal{F}_2$ (следствие 1) соотношение

$$\{f_{\theta_1}, f_{\theta_2}\}(gX) = -\{\theta_1, \theta_2\}_{\mathfrak{g}}(X - \varepsilon W). \tag{33}$$

Как уже отмечалось, по теореме Нётер функции I_h являются первыми интегралами любого потока с гамильтонианом из $\mathcal{F}_2$, поэтому

$$\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\} = 0. \tag{34}$$

Из этих трех соотношений вытекает замкнутость $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ относительно скобки Пуассона. Остается показать выполнение условий некоммутативной интегрируемости

$$\mathrm{ddim}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) + \mathrm{dind}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \mathrm{dim} TM. \tag{35}$$

Подпространства, порожденные дифференциалами функций из множеств $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \{dI_h(X),\ I_h \in \mathcal{F}_1\}, \\ F_2 &= \{df_\theta(X),\ f_\theta \in \mathcal{F}_2\}. \end{aligned}$$

Пусть аннуляторы элемента X обозначаются

$$\begin{aligned} \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(X) &= \{Y \in \mathfrak{g},\ [Y, X] = 0\}, \\ \mathrm{Ann}_{\mathfrak{h}}(X) &= \{V \in \mathfrak{h},\ [V, X] = 0\} = \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(X) \cap \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Лемма 2.6. *Для $X \in \mathfrak{m} = T_{\pi(e)}M$ такого, что $X - \varepsilon W$ находится в общем положении имеют место следующие соотношения*

$$\begin{aligned} \mathrm{ddim}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) &= \mathrm{dim}(F_1 + F_2) = 2\mathrm{dim}\,\mathfrak{m} - \mathrm{dim}(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(X - \varepsilon W))_{\mathfrak{m}}, \\ \mathrm{ddim}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) &= \mathrm{dim}(F_1 \cap F_2) = \mathrm{dim}(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(X - \varepsilon W))_{\mathfrak{m}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как симплектическая структура устанавливает изоморфизм $I : T^*_X TM \to T_X TM$, $df(X) \mapsto \mathrm{sgrad} f(X)$, можно вместо F_1 и F_2 рассматривать

$$\begin{aligned} IF_1 &= \{\mathrm{sgrad} I_h(X),\ I_h \in \mathcal{F}_1\}, \\ IF_2 &= \{\mathrm{sgrad} f_\theta(X),\ f_\theta \in \mathcal{F}_2\}. \end{aligned}$$

Напомним, что явный вид гамильтоновых векторных полей функций I_h и f_θ в точке $X \in \mathfrak{m}$ имеет вид (предложение 4, лемма 2.5)

$$\begin{aligned} \mathrm{sgrad} I_h(X) &= \left(\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}}, -\tfrac{1}{2}[\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}}, X] + [\nabla h(\xi), X]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}\right), \\ \mathrm{sgrad} f_\theta(X) &= \left(\nabla \theta(\xi)_{\mathfrak{m}}, -\tfrac{1}{2}[\nabla \theta(\xi)_{\mathfrak{m}}, X] - \tfrac{1}{2}[\nabla \theta(\xi)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla \theta(\xi)_{\mathfrak{m}}]\right), \end{aligned} \tag{36}$$

где $\xi = X - \varepsilon W$. Множество $\mathfrak{m} - \varepsilon W = \{\xi = X - \varepsilon W : X \in \mathfrak{m}\}$ инвариантно относительно присоединенного действия группы $\mathbf{H}$

$$\mathrm{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m} - \varepsilon W) \subset (\mathfrak{m} - \varepsilon W),$$

так как $\mathfrak{m}$ ортогонально $\mathfrak{h}$ и $\mathbf{H}$ стабилизирует W. $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$- инвариантные функции θ из $\mathcal{F}_2$ являются инвариантами этого действия. Известно, что при линейном действии компактной алгебры Ли всегда существует набор инвариантов, разделяющий орбиты общего положения. Таким образом число функционально независимых $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантных функций равно коразмерности орбиты группы $\mathbf{H}$ при действии на $\mathfrak{m} - \varepsilon W$,

$$l = \dim \mathfrak{m} - (\dim \mathfrak{h} - \dim \mathrm{Ann}_{\mathfrak{h}}(\xi))$$

для элемента общего положения $\xi \in (\mathfrak{m} - \varepsilon W)$.
Пусть $\theta_1, ..., \theta_l$ — функционально независимые $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$- инвариантные функции на $\mathfrak{m} - \varepsilon W$. Рассмотрим орбиту представления $\mathrm{Ad}(\mathbf{G})$, проходящую через ξ, тогда ее размерность равна

$$s = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi).$$

Пусть функции $h_1, ..., h_s : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ функционально независимы на орбите в точке ξ, то есть $\{[\nabla h_i(\xi), \xi]\}$ образуют базис касательного пространства орбиты, и значит в частности, $\nabla h_i(\xi) \notin \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi)$. Тогда в качестве независимых функций на TM в точке X можно взять следующие функции

$$I_{h_1}, ..., I_{h_s}, f_{\theta_1}, ..., f_{\theta_l}. \tag{37}$$

Для X такого, что ξ в общем положении функции $f_{\theta_1}, ..., f_{\theta_l}$ функционально независимы в точке X.

Предположим, что

$$\sum_i a_i \,\mathrm{sgrad} I_{h_i}(X) + \sum_j b_j \,\mathrm{sgrad} f_{\theta_j}(X) = 0.$$

Тогда с учетом (36) получаем

$$\sum_i a_i \nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}} + \sum_j b_j \nabla \theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}} = 0, \tag{38}$$

$$\sum_i a_i \left\{-\tfrac{1}{2}[\nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}}, X] + [\nabla h_i(\xi), X]_{\mathfrak{m}} - \tfrac{1}{2}[\nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}\right\} +$$
$$+\sum_j b_j \left\{-\tfrac{1}{2}[\nabla \theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}}, X] - \tfrac{1}{2}[\nabla \theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla \theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}}]\right\} = 0. \tag{39}$$

Из (38) и (39) следует

$$\sum a_i \left\{[\nabla h_i(\xi), X]_{\mathfrak{m}} + \varepsilon[W, \nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}}]\right\} = 0. \tag{40}$$

Так как $[W, \mathfrak{h}] = 0$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, то

$$[W, \nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}}] = [W, \nabla h_i(\xi)]_{\mathfrak{m}}.$$

Поэтому (40) принимает вид (с учетом того, что $\xi = X - \varepsilon W$)

$$\sum a_i [\nabla h_i(\xi), \xi]_{\mathfrak{m}} = 0.$$

Следовательно

$$\begin{gathered}\sum a_i [\nabla h_i(\xi), \xi] = \sum a_i [\nabla h_i(\xi), \xi]_{\mathfrak{h}} = \\ \sum a_i [\nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}}, \xi]_{\mathfrak{h}} + \sum a_i [\nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{h}}, \xi]_{\mathfrak{h}}.\end{gathered} \tag{41}$$

Из (38) и того, что для $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$- инвариантных функций θ_j выполняется $[\nabla \theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}}, \xi]_{\mathfrak{h}} = 0$ (см. (28)) получается, что первая сумма в (41) равна нулю. Вторая сумма равна нулю, так как $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$ – аннулятор W. Следовательно $\sum a_i [\nabla h_i(\xi), \xi] = 0$, что возможно только, когда $a_i = 0, \forall i$, так как h_i независимы на орбите в точке ξ. Тогда в силу независимости функций f_{θ_j} следует, что $b_j = 0, \forall j$. Таким образом, функции (37) независимы в X.

Пусть теперь h – произвольная функция такая, что ее градиент в ξ принадлежит аннулятору ξ

$$[\nabla h(\xi), \xi] = [\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}}, \xi] + [\nabla h(\xi)_{\mathfrak{h}}, \xi] = 0. \tag{42}$$

Из (42), $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, и того, что $\mathfrak{h}$ – аннулятор W вытекает

$$[\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}}, \xi]_{\mathfrak{h}} = 0,$$

а значит, для элемента общего положения ξ имеем

$$\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}} = \sum_j c_j \nabla\theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}} \tag{43}$$

для каких-то определенных $c_j \in \mathbb{R}$. Так как $\nabla h(\xi) \in \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi)$ имеем

$$0 = [\nabla h(\xi), \xi]_{\mathfrak{m}} = [\nabla h(\xi), X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[\nabla h(\xi), W]_{\mathfrak{m}} = [\nabla h(\xi), X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}}, W],$$

то есть с учетом (43)

$$[\nabla h(\xi), X]_{\mathfrak{m}} = -\sum_j c_j \varepsilon[W, \nabla\theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}}]. \tag{44}$$

Из (36), (43), (44) следует

$$\mathrm{sgrad} I_h(X) = \sum_j c_j \,\mathrm{sgrad} f_{\theta_j}(X),$$

то есть градиент $\mathrm{sgrad} I_h(X)$ линейно выражается через градиенты $\mathrm{sgrad} f_{\theta_j}(X)$. Заодно получили, что $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}$. Первое утверждение леммы следует из соотношений

$$\begin{gathered}\dim(F_1 + F_2) = s + l = \\ = \dim\mathfrak{m} - \dim\mathfrak{h} + \dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{h}}(\xi) + \dim\mathfrak{g} - \dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi) = \\ = 2\dim\mathfrak{m} + \dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{h}}(\xi) - \dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi) = \\ = 2\dim\mathfrak{m} - \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}},\end{gathered}$$

так как

$$\begin{aligned}\dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi) &= \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}} + \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi) \cap \mathfrak{h}) \\ &= \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}} + \dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{h}}(\xi).\end{aligned}$$

$\square$

Подсчитаем дифференциальный индекс $\mathrm{dind}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$, то есть размерность ядра ограничения пуассоновой структуры на линейном подпространстве $F_1 + F_2$. Для этого представим пространство $F_1 + F_2$ в виде

$$F_1 + F_2 = A \oplus B \oplus C,$$

где $B = F_1 \cap F_2, F_1 = A \oplus B, F_2 = B \oplus C$. Из (34) следует, что матрица пуассоновой структуры на TM, ограниченная на $F_1 + F_2$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \{\cdot,\cdot\}|_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\cdot,\cdot\}|_C \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Отметим, что (также как и в [13]) матрица $(\{\cdot,\cdot\}|_A)$ невырождена, поскольку она фактически является матрицей ограничения скобки Ли-Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$ на касательное пространство в точке ξ к орбите присоединенного представления $\mathrm{Ad}(\mathbf{G})$, проходящей через ξ. Тогда коранг матрицы (45) равен корангу матрицы $(\{\cdot,\cdot\}|_{F_2})$, которая в силу (33) является матрицей ограничения скобки Ли-Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$ на линейное подпространство

$$J = J|_\xi = \{\nabla\theta(\xi)_{\mathfrak{m}},\ \theta - \mathrm{Ad}(\mathbf{H})\text{-инвариантная функция}\}.$$

Следующая лемма доказывает невырожденность матрицы $(\{\cdot,\cdot\}|_C)$.

Лемма 2.7. *Для элемента общего положения* $\xi \in \mathfrak{m} - \varepsilon W$

$$\mathrm{Ker}\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}|_J = (\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}.$$

Доказательство. Ясно, что поскольку ξ – элемент общего положения, то линейное подпространство $J \subset \mathfrak{m}$ совпадает с ортогональным дополнением к касательному пространству к $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$- орбите точки ξ

$$T_\xi \mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\xi) = [\xi, \mathfrak{h}] = \{[\xi, V], V \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{m}.$$

Таким образом, для J имеем

$$J = [\xi, \mathfrak{h}]^\perp = \{Y \in \mathfrak{m}, B(Y, [\xi, \mathfrak{h}]) = 0\}.$$

Сначала докажем, что пространство $(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}$ содержится в J. Для этого рассмотрим $Y \in (\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}$, то есть $Y = V_{\mathfrak{m}}, [V, \xi] = 0$. Тогда из того, что J ортогонально касательному пространству к $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$- орбите точки ξ, имеем

$$B(Y, [\mathfrak{h}, \xi]) = B(V - V_{\mathfrak{h}}, [\mathfrak{h}, \xi]) = B(V, [\mathfrak{h}, \xi]) = B([\xi, V], \mathfrak{h}) = 0.$$

Таким образом, $Y \in [\xi, \mathfrak{h}]^{\perp} = J$, и следовательно

$$(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}} \subset J.$$

Теперь докажем, что имеет место вложение $\mathrm{Ker}\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}|_J \subset (\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}$. Для этого рассмотрим некоторый элемент $Y \in J$, который лежит в ядре скобки Ли-Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$ ограниченной на пространстве J. То есть для J это можно записать в следующем виде

$$0 = B(\xi, [Y, J]) = B(\xi, [Y, [\mathfrak{h}, \xi]^{\perp}]) = B([\xi, Y], [\mathfrak{h}, \xi]^{\perp}).$$

Так как $Y \in J$, а J — линейная оболочка градиентов $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантных функций, для которых справедливы соотношения (28)-(30), то

$$[\xi, Y]_{\mathfrak{h}} = 0.$$

Таким образом, $[\xi, Y] \in \mathfrak{m}$, а значит $[\xi, Y] \in [\mathfrak{h}, \xi]$, тогда существует $U \in \mathfrak{h}$ такой, что $[\xi, Y] = [U, \xi]$. Отсюда немедленно вытекает, что $Y = V_{\mathfrak{m}}$, где $V = Y + U$, $[V, \xi] = 0$, то есть $Y \in (\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}$.

Докажем обратное вложение. Рассмотрим некоторый $Y \in (\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}$, то есть $Y = V_{\mathfrak{m}}$, где $V = Y + U$, $U \in \mathfrak{h}$ и $[V, \xi] = 0$. Тогда

$$[\xi, Y] = [U, \xi] \implies [\xi, Y] \in [\mathfrak{h}, \xi].$$

Отсюда вытекает

$$0 = B([\xi, Y], [\mathfrak{h}, \xi]^{\perp}) = B([\xi, Y], J) = B(\xi, [Y, J]).$$

Таким образом, $Y \in \mathrm{Ker}\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}|_J$. Этим завершается доказательство леммы. $\square$

Видно, что доказательство этой леммы в нашем случае почти полностью совпадает с приведенным в [13].

Таким образом,

$$\mathrm{dind}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \mathrm{dind}\mathcal{F}_1 = \mathrm{dind}\mathcal{F}_2 = \mathrm{ddim}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}. \tag{46}$$

Условие некоммутативной интегрируемости (35) следует из леммы 2.6 и (46). Теорема 3 доказана.

2.5 Пример: магнитный геодезический поток на $\mathbb{C}P^2$

Простейшим примером, на котором можно наглядно продемонстрировать результат данной главы, является магнитный геодезический поток, задаваемый формой Фубини-Штуди, на комплексной проективной плоскости. В этом разделе будет доказана интегрируемость этого потока, и как в первой главе, будет приведен явный вид всех интегралов. Эти интегралы образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона.

Для доказательства интегрируемости магнитного геодезического потока выпишем в явном виде набор интегралов, дающий интегрируемость обычного геодезического потока на $\mathbb{C}P^2$, и затем покажем, что его можно непрерывно деформировать в набор интегралов магнитного геодезического потока. В частности, это означает, что алгебры первых интегралов геодезического и деформированного потока изоморфны.

Пусть $z = (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$. Рассмотрим на $\mathbb{C}P^2$ аффинную карту $z = (1, u, v)$, где $u = \frac{z_1}{z_0} = u_1 + iu_2$, $v = \frac{z_2}{z_0} = v_1 + iv_2$. Стандартное эрмитово скалярное произведение на $\mathbb{C}^3$ (4) индуцирует эрмитово скалярное произведение на $\mathbb{C}P^2$, задаваемое формулой (5). Как и в примере к первой главе, по этой формуле получаем явный вид римановой метрики и формы Фубини-Штуди в координатах аффинной карты

$$\begin{aligned}\langle\zeta,\zeta\rangle = \big[&(1+v_1^2+v_2^2)(du_1^2+du_2^2) + (1+u_1^2+u_2^2)(dv_1^2+dv_2^2) - \\ &- 2(u_1v_1+u_2v_2)(du_1dv_1+du_2dv_2) + \\ &+2(u_1v_2-u_2v_1)(du_2dv_1-du_1dv_2)\big]\,\frac{1}{(1+u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega = \big[&(1+v_1^2+v_2^2)du_1\wedge du_2 + (1+u_1^2+u_2^2)dv_1\wedge dv_2 + \\ &+ (u_1v_2-u_2v_1)(du_1\wedge dv_1+du_2\wedge dv_2) + \\ &+(u_1v_1+u_2v_2)(du_2\wedge dv_1+dv_2\wedge du_1)\big]\,\frac{1}{\pi(1+u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2)^2}.\end{aligned}$$

Далее, переходим к переменным (r,ρ,φ,θ), определенным формулами

$$\begin{aligned} v_1 &= \rho\cos\theta, & v_2 &= \rho\sin\theta, \\ u_1 &= r\rho\cos(\varphi+\theta), & u_2 &= r\rho\sin(\varphi+\theta). \end{aligned}$$

Эти координаты в некотором смысле соответствуют полярным координатам для $\mathbb{C}P^1$ и хорошо отражают симметрии системы. Например, выражение для гамильтониана в этих координатах не содержит φ и θ, а это означает, что p_φ и p_θ являются первыми интегралами. Риманова метрика и форма Фубини-Штуди в этих координатах примут вид:

$$\begin{aligned} \langle\zeta,\zeta\rangle = \big[&(1+\rho^2)\rho^2dr^2+(1+r^2)d\rho^2+(1+\rho^2)\rho^2r^2d\varphi^2+ \\ &+(1+r^2)\rho^2d\theta^2+2r\rho\ dr\ d\rho+2r^2\rho^2\ d\varphi\ d\theta\big]\frac{1}{(1+\rho^2+r^2\rho^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega = \big[&(1+\rho^2)\rho^2r\ dr\wedge d\varphi+\rho^2r\ dr\wedge d\theta+r^2\rho\ d\rho\wedge d\varphi+ \\ &+(1+r^2)\rho\ d\rho\wedge d\theta\big]\frac{1}{\pi(1+\rho^2+r^2\rho^2)^2}. \end{aligned}$$

Гамильтониан геодезического потока примет вид

$$\begin{aligned} H = \frac{(1+\rho^2+r^2\rho^2)}{4}\bigg[&\frac{1+r^2}{\rho^2}p_r^2-2\frac{r}{\rho}p_rp_\rho+(1+\rho^2)p_\rho^2+ \\ &+\frac{1+r^2}{r^2\rho^2}\,p_\varphi^2-2\frac{1}{\rho^2}p_\varphi p_\theta+\frac{1+\rho^2}{\rho^2}p_\theta^2\bigg], \end{aligned}$$

а из уравнений движения

$$\begin{aligned} \dot p_r &= -\frac{\partial H}{\partial r}, & \dot r &= \frac{\partial H}{\partial p_r}, & \dot p_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho}, & \dot\rho &= \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \\ \dot p_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}=0, & \dot\varphi &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, & \dot p_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}=0, & \dot\theta &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \end{aligned}$$

следует, что p_φ и p_θ — первые интегралы геодезического потока. Они соответствуют группам однопараметрических унитарных преобразований $\mathbb{C}P^2$:

$$p_\varphi \longleftrightarrow A^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p_\theta \longleftrightarrow A^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\tau} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\tau} \end{pmatrix}.$$

Еще два первых интеграла получаются из следующих групп унитарных преобразований

$$A^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\tau & -\sin\tau \\ 0 & \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}$$

и

$$A^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\tau & i\sin\tau \\ 0 & i\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}.$$

Выпишем поля Киллинга этих групп диффеоморфизмов

$$\begin{aligned} K_1 &= (-(1+r^2)\cos\varphi,\ r\rho\cos\varphi,\ (1/r-r)\sin\varphi,\ r\sin\varphi), \\ K_2 &= ((1+r^2)\sin\varphi,\ -r\rho\sin\varphi,\ (1/r-r)\cos\varphi,\ r\cos\varphi), \end{aligned}$$

откуда сразу получаем дополнительные интегралы

$$\begin{aligned} I &= -(1+r^2)\cos\varphi\ p_r + r\rho\cos\varphi\ p_\rho + (1/r-r)\sin\varphi\ p_\varphi + r\sin\varphi\ p_\theta, \\ J &= (1+r^2)\sin\varphi\ p_r - r\rho\sin\varphi\ p_\rho + (1/r-r)\cos\varphi\ p_\varphi + r\cos\varphi\ p_\theta. \end{aligned}$$

Таким образом у нас есть набор из пяти почти всюду функционально независимых интегралов: $H,\ p_\varphi,\ p_\theta,\ I,\ J$, которых достаточно для интегрируемости геодезического потока. Действительно, интегралы $H,\ p_\varphi,\ p_\theta$ находятся в инволюции, то есть их попарные скобки Пуассона тождественно равны нулю, $I,\ J$ коммутируют с H и p_θ, а оставшиеся скобки Пуассона имеют вид

$$\{I, p_\varphi\} = J, \quad \{J, p_\varphi\} = -I, \quad \{J, I\} = 4p_\varphi - 2p_\theta.$$

Таким образом мы получили некоммутативную алгебру Ли относительно скобок Пуассона с максимальной коммутативной подалгеброй, состоящей из $H,\ p_\varphi,\ p_\theta$, и из общих конструкций некоммутативного интегрирования (см. [3, 2]) следует, что это полная система интегралов геодезического потока.

Используем эти интегралы для нахождения интегралов магнитного геодезического потока, отвечающего полю $\varepsilon\Omega$. Мы специально ввели параметр деформации ε, чтобы лучше проследить алгебраический эффект включения магнитного поля.

После деформации потока уравнения движения будут следующие

$$\begin{aligned}
\dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} + \lambda_1\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} + \lambda_2\frac{\partial H}{\partial p_\theta}, & \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r},\\
\dot{p}_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} + \lambda_3\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} + \lambda_4\frac{\partial H}{\partial p_\theta}, & \dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial p_\rho},\\
\dot{p}_\varphi &= -\lambda_1\frac{\partial H}{\partial p_r} - \lambda_3\frac{\partial H}{\partial p_\rho}, & \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi},\\
\dot{p}_\theta &= -\lambda_2\frac{\partial H}{\partial p_r} - \lambda_4\frac{\partial H}{\partial p_\rho}, & \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta},
\end{aligned}$$

с учетом того, что $\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$, и

$$\lambda_1 = \varepsilon\frac{r\rho^2(1+\rho^2)}{\pi(1+\rho^2+r^2\rho^2)^2}, \quad \lambda_2 = \varepsilon\frac{r\rho^2}{\pi(1+\rho^2+r^2\rho^2)^2},$$

$$\lambda_3 = \varepsilon\frac{r^2\rho}{\pi(1+\rho^2+r^2\rho^2)^2}, \quad \lambda_4 = \varepsilon\frac{\rho(1+r^2)}{\pi(1+\rho^2+r^2\rho^2)^2}.$$

То есть мы ввели обозначение

$$\varepsilon\Omega = \lambda_1\, dr\wedge d\varphi + \lambda_2\, dr\wedge d\theta + \lambda_3\, d\rho\wedge d\varphi + \lambda_4\, d\rho\wedge d\theta.$$

Из этих уравнений видно, что функции

$$\begin{aligned}
I_1 &= p_\varphi - \varepsilon\frac{1+\rho^2}{2\pi(1+\rho^2+r^2\rho^2)} + \frac{\varepsilon}{4\pi},\\
I_2 &= p_\theta - \varepsilon\frac{1}{2\pi(1+\rho^2+r^2\rho^2)},\\
I_3 &= I + \varepsilon\frac{r\rho^2\sin\varphi}{\pi(1+\rho^2+r^2\rho^2)},\\
I_4 &= J + \varepsilon\frac{r\rho^2\cos\varphi}{\pi(1+\rho^2+r^2\rho^2)}
\end{aligned}$$

— первые интегралы магнитного геодезического потока, отвечающего полю $\varepsilon\Omega$. Вместе с функцией Гамильтона они образуют алгебру Ли, в которой скобки Пуассона интегралов $H,\ I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$ остаются теми же, что были между соответствующими интегралами геодезического потока.

Таким образом верна

Теорема 4. *Магнитный геодезический поток, отвечающий метрике Фубини–Штуди и полю $\varepsilon\Omega$, где Ω — форма Фубини–Штуди, на двумерной комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ имеет пять почти всюду функционально независимых первых интегралов движения, которые образуют некоммутативную алгебру Ли L относительно скобок Пуассона, заданных формой $\omega + \varepsilon\Omega$. Размерность максимальной коммутативной подалгебры $L' \subset L$ равна трем.*

Эти интегралы гладко зависят от ε и при различных значениях этого параметра алгебры первых интегралов изоморфны.

Общая поверхность уровня пяти первых интегралов, на которой они функционально независимы, диффеоморфна трехмерному тору, на котором движение является условно-периодическим.

Список литературы

[1] Арнольд В.И. Математические методы классической механики // М.: Наука, 1974.

[2] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. №2. С. 46–56.

[3] Нехорошев Н.Н. Переменные действие-угол и их обобщения // Труды ММО. 1972. Т. 26. №1. С. 181–198.

[4] Браилов А.В. Полная интегрируемость некоторых геодезических потоков и интегрируемые системы с некоммутирующими интегралами // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. №2. С. 273–276.

[5] Козлов В.В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, №6. С. 1299–1302.

[6] Колокольцов В.Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46, №5. С. 994–1010.

[7] Тайманов И.А. О топологических свойствах интегрируемых геодезических потоков // Матем. заметки. 1988. Т. 44, №3. С. 283–284.

[8] Тайманов И.А. Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвяхных многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51, №2. С. 429–435.

[9] Тайманов И.А. Топология римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками // Труды МИРАН. 1994. Т. 205, С. 150–163.

[10] Paternain G.P. On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1992. V. 12, P. 109–121.

[11] Болсинов А.В., Тайманов И.А. О примере интегрируемого геодезического потока с положительной топологической энтропией // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, вып. 4. С. 157–158.

[12] Bolsinov A.V., Taimanov I.A. Integrable geodesic flows on the suspensions of toric automorphisms // Proc. Steklov. Inst. Math. 2000. V. 231, P. 46–63.

[13] Болсинов А.В., Йованович Б. Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах // Матем. сборник. 2001. Т. 192. №7. С. 21–40.

[14] Butler L. A new class of homogeneous manifolds with Liouvilleintegrable geodesic flows // C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. 1999. V. 21. №4, P. 127–131.

[15] Базайкин Я.В. Двойные частные групп Ли с интегрируемым геодезическим потоком // Сиб. матем. журнал. 2000. Т. 41, №3. С. 513–530.

[16] Thimm A. Integrable geodesic flows on homogeneous spaces // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1981. V. 1. P. 495–517.

[17] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнение Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. №2. С. 396–415.

[18] Мищенко А.С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах // Матем. заметки. 1982. Т. 31. №2. С. 257–262.

[19] Мищенко А.С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах // Труды сем. по вект. и тенз. анализу. №21. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 13–22.

[20] Браилов А.В. Построение вполне интегрируемых геодезических потоков на компактных симметрических пространствах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. №2. С. 661–674.

[21] Микитюк И.В. Однородные пространства с интегрируемыми G-инвариантными гамильтоновыми потоками // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. №6. С. 1248–1262.

[22] Guillemin V., Sternberg S. On collective complete integrability according to the method of Thimm // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1983. V. 3. P. 219–230.

[23] Paternain G.P., Spatzier R.J. New examples of manifolds with completely integrable geodesic flows // Avd. in Math. 1994. V. 108, P. 346–366.

[24] Bolsinov A.V., Jovanovic B. Non-commutative integrability, moment map and geodesic flows // Annals of Global Analysis and Geometry. 2003. V. 23, №4. P. 305–322.

[25] Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, вып. 5. С. 3–49.

[26] Костант Б. Квантование и унитарные представления // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, вып. 1. С. 163–225.

[27] Кириллов А.А. Элементы теории представлений // М.: Наука, 1972.

[28] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения // М.: Наука, 1986.

Работы автора по теме диссертации

[29] Ефимов Д.И. Магнитный геодезический поток в однородном поле на комплексной проективной плоскости // Вестник НГУ. Серия "Математика, механика, информатика". 2003. Т. IV, вып. 4. С. 3–10.

[30] Ефимов Д.И. Магнитный геодезический поток в однородном поле на комплексном проективном пространстве // Сибирский мат. журнал. 2004. Т. 45. №3. С. 566–576.

[31] Ефимов Д.И. Магнитный геодезический поток на однородном симплектическом многообразии. Новосибирск, 2004. 17 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; №140) [*)]

[*)] Принято к печати в Сибирском математическом журнале.