Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 514.7 На правах рукописи

МАЖИТОВА АКМАРАЛ ДАУЛЕТБАЕВНА

Геодезические потоки в неголономной геометрии

6D060100 – Математика
(образовательная программа – Прикладная математика)

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD) в области математики

Научные руководители
кандидат физико-
математических наук,
доцент Мейрембеков К.А.,
доктор физико-
математических наук,
академик РАН Тайманов И.А.

Республика Казахстан
Алматы, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

M^n – n-мерное гладкое многообразие.
T_qM^n – касательное пространство к M^n в точке q.
$T_q^*M^n$ – кокасательное пространство к M^n в точке q.
G – группа Ли.
g – алгебра Ли.
Δ – неголономное распределение.
g_{ij} – метрика.
$\gamma(t)$ – кривая на M^n.
$\dot{\gamma}(t)$ – вектор скорости.
$x(t), y(t), z(t)$ – координатные функции кривой на M^3.
$H(q,p)$ – гамильтониан.
$\mathrm{F}(\varphi, k)$ – эллиптическая функция первого рода.
$\mathrm{E}(\varphi, k)$ – эллиптическая функция второго рода.
$\mathrm{sn}\,(v,k), \mathrm{cn}\,(v,k), \mathrm{dn}\,(v,k), \mathrm{am}\,(v,k)$ – эллиптические функции Якоби.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В данной работе рассматривается интегрируемость некоторых специальных динамических систем, возникающих в неголономной геометрии. Исследования в неголономной геометрии имеют приложения в механических системах (вращение и качение тел, движение роботов, квантовая механика, компьютерное видение).

Центральное положение в диссертации занимает полное исследование и интегрирование уравнений геодезических потоков субримановой (неголономной) геометрии на трехмерных разрешимых группах Ли.

Хорошо известно, что получить точное решение глобальной нелинейной задачи управления является довольно сложным, если задача не имеет большой группы симметрий. Для инвариантных задач на группах Ли точное решение часто можно найти на основе методов геометрической теории управления, с использованием техники дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли. Полученное решение инвариантной задачи может дать хорошую аппроксимацию соответствующей нелинейной задачи. Например, инвариантная субриманова геометрия на группе Гейзенберга служит ядром всей субримановой геометрии.

Математическая теория управления — один из важных и востребованных разделов прикладной математики. Дифференциально-геометрическое направление в теории управления активно развивается в настоящее время. Эта работа включает в себя центральные вопросы геометрической теории управления — управляемость и симметрии на трехмерных разрешимых группах Ли. Хорошо известно, что наличие нетривиальной группы симметрий упрощает исследование управляемой системы.

Управляемые системы, пространством состояний которых являются группы Ли, изучаются в математической теории управления с начала 70-ых годов прошлого века.

Р. В. Брокетт [1] рассматривал прикладные задачи, которые приводят к управляемым системам на матричных группах и их однородных пространствах. Последовательное математическое исследование управляемых систем на группах Ли было начато В. Джарджевичем и Х. Дж. Суссманном [2], ими были установлены простейшие свойства множеств достижимости и орбит правоинвариантных систем. В работах В. Джарджевича и И. Купки [3, 4] получены результаты о связи управляемости инвариантных систем на группах Ли и управляемости их проекций на однородные пространства, а также рассмотрены основные примеры, включая системы на матричных группах Ли G с $GL(n)$ и их однородных пространствах. Также в этих работах сделан ряд результатов об управляемости для специальных классов инвариантных систем и групп Ли. Кроме того, доказана эквивалентность рангового условия и управляемости для компактных групп Ли. Обобщение этого результата для полупрямого произведения компактной группы Ли и линейного пространства получено Б. Боннаром, В. Джарджевичем, И. Купкой и Г. Салле [5].

Богатая теория управления была построена для полупростых групп Ли. Уже для специальной линейной группы задача управляемости оказалась очень сложной и не решена до настоящего времени даже для аффинных систем со скалярным управлением.

Вся техника расширения была развита во многом именно для исследования случая $SL(n)$. Достаточные условия управляемости для этого случая были получены Ж. П. Готье и Г. Борнаром [6]. Эти условия были обобщены для произвольных полупростых групп Ли с конечным центром в серии работ [7, 8, 9], кульминацией которых была статья Р. Эль Ассуди, Ж. П. Готье и И. Купки [10].

Для другого естественного класса — разрешимых групп Ли — подобная теория управляемости не была создана. Известен принадлежащий Дж. Д. Лосону [11] критерий управляемости для компактных расширений разрешимых групп Ли в терминах подалгебр коразмерности один. Однако для применения этого критерия требуется описание всех таких подалгебр, что составляет довольно сложную проблему теории алгебр Ли. Поэтому представляется весьма актуальным получение конструктивных результатов по управляемости инвариантных систем на разрешимых группах Ли.

Инвариантные управляемые системы на группах Ли привлекаются нами для исследования задач, формулируемых независимо. В нашей работе мы будем рассматривать левоинвариантные распределения на группах Ли с левоинвариантной метрикой.

Левоинвариантные задачи находятся в центре внимания геометрической теории управления с самого начала ее развития. В книге [12], суммировавшей результаты 70-90-х годов прошлого века, В. Джарджевич подробно изложил особенности гамильтонова формализма и принцип максимума для левоинвариантных задач, исследовал связи между симметриями и интегрируемостью в этом случае.

Известен ряд работ по левоинвариантным субримановым задачам на нильпотентных группах Ли. Для случая Гейзенберга [13, 14] и его обобщения [15] получена параметризация геодезических, но их оптимальность удалось исследовать только для некоторых частных случаев. Поэтому представляется очень важным развитие методов исследования оптимальности экстремальных траекторий для левоинвариантных задач на группах Ли.

Основные теоретические аспекты этой теории подробно отражены в работах [16, 17].

Детерминированный мир классической физики описывается гладкими динамическими системами. Будущее в такой системе полностью определено начальными условиями; более того, близкое будущее меняется гладко, если гладко менять начальные условия. Оставляя место для свободной воли в этой мрачноватой картине полной предопределенности, мы получаем управляемую систему. Мы просто разрешаем менять некоторые параметры системы: менять в известных пределах, но в любое время, когда вздумается. Собственно, это то, что мы постоянно проделываем со своим телом, автомобилями, летательными аппаратами, технологическими процессами и т.д. Мы управляем всеми этими динамическими системами.

Гладкие динамические системы описываются дифференциальными уравнениями. В этой работе мы имеем дело только с конечномерными системами: они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями на трехмерных гладких многообразиях.

Управляемая система — это семейство обыкновенных дифференциальных уравнений. Семейство параметризовано управляющими параметрами. Все уравнения данного семейства определены на одном и том же многообразии, которое называется пространством состояний системы. Разрешается выбирать любые доступные значения управляющих параметров (т.е. любую динамическую систему из семейства), а также менять эти значения в произвольный момент времени. Таким образом, выбранные параметры, вообще говоря, зависят от времени. Эта зависимость называется управлением или функцией управления.

Выбрав управление, мы превращаем управляемую систему в неавтономное дифференциальное уравнение. Решение такого уравнения однозначно определяется начальными условиями и называется допустимой траекторией системы, отвечающей данному управлению. Таким образом, допустимая траектория — это некоторая кривая в пространстве состояний. Начальные условия — это начальная точка кривой, называемая также начальным состоянием.

Разным управлениям отвечают, вообще говоря, разные допустимые траектории, начинающиеся в одной и той лее точке. Все эти траектории заполняют множество достижимости.

Таким образом, управляемая система — это семейство векторных полей. Интересующие нас свойства систем сохраняются при гладких заменах переменных в пространстве состояний. Кроме того, допускается обширный класс преобразований, перепараметризующих семейство полей; они называются преобразованиями обратной связи в теории управления и калибровочными преобразованиями в геометрии и математической физике. Наличие всех этих преобразований есть внешнее формальное основание для применения геометрических методов и бескоординатного геометрического языка в теории управления.

Имеется и более глубокое основание. Как уже отмечалось, динамическая система — это поток (т.е. однопараметрическая группа преобразований пространства состояний), порожденный векторным полем. Допустимая траектория, отвечающая постоянному управлению, есть траектория соответствующего потока. Траектория, отвечающая кусочно постоянному управлению, строится при помощи суперпозиции подходящих элементов потоков, соответствующих значениям функции управления. Произвольное управление можно сколь угодно хорошо приблизить кусочно постоянными. Следовательно, допустимые траектории и множества достижимости теснейшим образом связаны с группой преобразований, порожденной динамическими системами, из которых состоит изучаемая управляемая система. В свою очередь группы преобразований — это сердце геометрии.

Какое же место предназначено языку, методам и образам теории управления в геометрии и, более общим образом, в изучении основных структур окружающего нас мира. Чтобы понять это, полезно рассмотреть множества допустимых скоростей — первоначальный наивный способ описания множеств достижимости «в бесконечно малом».

Множество допустимых скоростей в заданной точке состоит из скоростей всех допустимых траекторий, проходящих через эту точку. Как правило, у интересных управляемых систем размерность множеств достижимости намного больше, чем размерность множеств допустимых скоростей. Например, типичная пара векторных полей на n-мерном многообразии порождает n -мерные множества достижимости при сколь угодно большом n. Иными словами, ограничения на скорости, вообще говоря, не влекут ограничений на состояния. Такого рода ограничения на скорости обычно называют неголономными.

Теория управления — это дисциплина, занимающаяся систематическим изучением возможных типов поведения при неголономных ограничениях и, в частности, исследованием вариационных задач с неголономными ограничениями, решения которых можно интерпретировать как «оптимальное поведение».

Имеется два различных формализма, применяющихся в оптимальном управлении и в аналитической механике. Первый - основан на построении канонической Гамильтоновой структуры для нормальных геодезических потоков метрики Карно-Каратеодори через принцип максимума Понтрягина. Эта Гамильтонова структура получается путем введения расслоения множителей Лагранжа, заданных в фазовом пространстве Гамильтоновых потоков. Переход в фазовое пространство задается обобщением преобразования Лежандра.

Часть геодезических не покрывается принципом максимума Понтрягина - так называемые абнормальные геодезические и их исследование требует деликатных методов, которые в настоящий момент интенсивно развиваются.

Второй подход связан с механикой неголономных систем и имеет чисто физический смысл. Основное отличие неголономной механики от обычной Лагранжевой состоит в том, что уравнения связей, записанные через обобщенные координаты точки и обобщенные скорости не могут быть представлены в конечном интегральном виде. В этом смысле говорят, что связи являются неинтегрируемыми, т.е. неголономными.

Многие направления, на которые были затрачены большие усилия, оказались мало востребованными современной наукой. Таким образом, в последнее время в аналитической механике отдается предпочтение к исследованию конкретных неголономных систем, обнаружению действительных динамических эффектов в новых и классических задачах. Поэтому в настоящее время очень актуальны задачи исследования геодезических потоков на субримановых многообразиях [18, 19, 20]. Уравнения геодезических конкретных трехмерных субримановых геометрий в последнее время изучались в [21, 22, 23].

Классификация левоинвариантных структур на трехмерных группах Ли была приведена А. Аграчевым и Д. Барилари в работе [24], согласно которой существуют инварианты субримановой геометрии, реализуемой на четырех разрешимых ненильпотентных группах Ли: $SOLV^-$, $SOLV^+$, $SE(2)$ и $SH(2)$.

В этой классификации наши задачи соотвествуют случаям $SOLV^-$ и $SOLV^+$.

В 1989 году В.И. Арнольд описал явление внутреннего рассеяния линейных волн на уровне геометрической оптики [25]. Это явление наблюдается только в неоднородных анизотропных средах, а основная часть его математической теории состоит в локальной классификации особых световых гиперповерхностей, локально диффеоморфных цилиндру над двумерным конусом, а в остальном - общего положения. Именно это последнее условие и приводит к наличию как неоднородности, так и анизотропности в модельных физических задачах.

Совсем недавно была обнаружена неожиданная связь теории внутреннего рассеивания и трехмерной субримановой геометрии. Дело в том, что субриманов эйконал имеет точно такие же конические особенности в бесконечности, что и световая гиперповерхность внутреннего рассеяния.

Еще одно очень важное применение данной области - это исследования геометрической модели примарной зрительной коры головного мозга, которая распознает контуры. Модели описываются в терминах субримановой геометрии трехмерного контактного многообразия (многообразия касательных направлений поверхности глаза (сетчатки)). Элементарным зрительным образом, который воспринимает глаз является не точка на сетчатке, а точка с направлением. Кривые на сетчатке соответствуют горизонтальным кривым многообразия. Таким образом, теория неголономной геометрии применяется в биологии.

В представленной работе рассматривается субриманова задача на трехмерных разрешимых группах Ли $SOLV^-$ и $SOLV^+$ с левоинвариантной метрикой и с левоинвариантным распределением. Эта задача основана на построении Гамильтоновой структуры для заданной метрики при помощи принципа максимума Понтрягина.

Работа содержит следующие результаты:

- построена Гамильтонова структура на группах Ли $SOLV^-$ и $SOLV^+$ с левоинвариантной метрикой и с левоинвариантным неголономным распределением;

- найдены уравнения геодезических для заданной субримановой задачи;

- проинтегрированы уравнения геодезических в эллиптических функциях и дано полное описание их качественного поведения.

На группе $SOLV^-$ уравнения геодезических в общем случае выражаются в эллиптических функциях. Исключением являются только четыре частных случая, когда геодезические находятся в элементарных функциях. На второй группе $SOLV^+$ также система дифференциальных уравнений геодезических не интегрируема в элементарных функциях.

Заметим, что уравнения геодезических других трехмерных неразрешимых субримановых геометрий интегрируются только в элементарных функциях.

Цели и объекты исследования. Целью настоящей работы является получить общие уравнения геодезических субримановой задачи на трехмерных разрешимых группах Ли $SOLV^-$ и $SOLV^+$ и исследовать их качественное поведение, т.е.

- построить Гамильтонову структура на группах Ли $SOLV^-$ и $SOLV^+$ с левоинвариантной метрикой и с левоинвариантным неголономным распределением;
- найти дифференциалные уравнения геодезических для заданной субримановой задачи;
- проинтегрировать уравнения геодезических в эллиптических функциях;
- исследовать их качественное поведение;
- исследовать абнормальные геодезические на группах Ли $SOLV^-$ и $SOLV^+$.

Методы исследования. В данной работе используются методы геометрической теории управления: построение канонической Гамильтоновой структуры для нормальных геодезических потоков метрики Карно-Каратеодори через принцип максимума Понтрягина. Используются алгебраические характеристики групп, в частности групп Ли.

При интегрировании уравнений для геодезических использовались методы теории специальных эллиптических функций.

Для аналитических преобразований и численных расчётов в диссертации использовался интерпретируемый язык программирования Mathematica, который поддерживает функциональный, процедурный и объектно–ориентируемый стили программирования. Кроме того в нем имеется возможность определять объекты подобно тому, как это обычно делается в математике, задавая их свойства посредством правил.

В работе приведены рисунки, полученные с помощью программного пакета MAPLE.

Теоретическая и практическая ценность. Исследования в области неголономной геометрии являются актуальными в настоящее время. В связи с тем, что пока еще не существует общей теории неголономной геометрии, в настоящее время актуально изучение конкретных задач этой области. Полученные сведения носят теоретический характер и могут иметь приложения в механических системах, а также способствовать в построении общей теории.

Научная новизна.

- Впервые рассмотрена субриманова задача на группах более сложной алгебраической структуры, а именно на разрешимых, но ненильпотентных группах.

- Впервые полученные уравнения для геодезических трехмерных групп интегрируются не в элементарных, а в эллиптических функциях.

Положения, выносимые на защиту. Работа содержит следующие результаты:

- на группах Ли $SOLV^-$ и $SOLV^+$ можно построить Гамильтонову структуру с левоинвариантной метрикой и с левоинвариантным неголономным распределением;

- система дифференциальных уравнений для геодезических на $SOLV^-$ и $SOLV^+$ имеют три первых интеграла, поэтому полностью интегрируемы на языке эллиптических функций;

- смоделированы части сфер на программном пакете MAPLE;

- по полученным данным можно описать качественное поведение геодезических.

Публикации и апробации результатов. Результаты диссертации опубликованы в 9 работах [26-34], из них 1 статья в рейтинговом журнале, 4 статьи – из списка, рекомендованного Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, 1 – из списка, рекомендованного Комитетом по контролю в сфере образования и науки РФ, 3 работы в материалах международных конференций. Результаты диссертации были доложены на семинарах лаборатории динамических систем Института Математики СО РАН (г.Новосибирск), а также на семинаре механико-математического факультета КазНУ имени аль-Фараби.

Структура и объем диссертации. Работа, объемом 54 страницы, состоит из введения, семи разделов, заключения, списка литературы, включающего 42 наименования. Теоремы, леммы и все формулы имеют сквозную нумерацию.

Основное содержание работы. Перейдем к основному содержанию диссертационной работы.

В первом разделе приведены основные сведения из теории гладких многообразий. Во втором - некоторые сведения из теории групп и алгебр Ли. В третьем разделе описана общая постановка субримановой задачи через принцип максимума Понтрягина. Четвертый раздел состоит из первичных определений специальных эллиптических функций первого, второго рода, в том числе Якобиевых функций и их основных соотношений.

В пятом и шестом разделах рассмотрена задача субримановой геометрии с левоинвариантным распределением и левоинвариантной метрикой на ненильпотентных разрешимых трехмерных на группах Ли $SOLV^-$ и $SOLV^+$.

Выведены уравнения Гамильтона для геодезических с помощью принципа максимума Понтрягина. Найдены первые интегралы системы дифференциальных уравнений геодезических, посредством которых система полностью проинтегрирована в терминах специальных эллиптических функций. Основные результаты оформлены в виде теорем 3 и 4.

Седьмой раздел посвящен так называемым абнормальным геодезическим, которые не покрываются принципом максимума. В нашем случае мы доказали, что их не существует в виду малой размерности (теорема 5).

Таким образом, в диссертации выполнены следующие исследования:

- с помощью принципа максимума Понтрягина нормальные геодезические потоки описаны посредством уравнений Гамильтона;

- найдены первые интегралы – законы сохранения – для данной гамильтоновой системы, достаточные для полной интегрируемости системы;

- уравнения нормальных геодезических полностью проинтегрированы в терминах эллиптических функций и дано полное описание их качественного поведения.

Автор выражает благодарность научному руководителю Мейрембекову К.А. за поддержку в работе, академику Тайманову И.А. за поставленные задачи и внимание к работе, а также д.ф.-м.н. Базайкину Я.В. (ИМ СО РАН, г.Новосибирск) за плодотворные дискуссии и д.ф.-м.н. Миронову А.Е. (ИМ СО РАН, г.Новосибирск) за ценные указания.

1 ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ

В этой главе приведем некоторые сведения из теории многообразий, которые подробно изложены в [35].

Топологическим n-мерным многообразием называется хаусдорфово пространство M^n, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную области из $\boldsymbol{R^n}$.

Открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M^n такое, что для каждого его элемента U_α задан гомеоморфизм φ_α с областью W_α из $\boldsymbol{R^n}$:

$$\varphi_\alpha : W_\alpha \to U_\alpha$$

называется атласом.

Каждый такой гомеоморфизм φ_α задает в области $\{U_\alpha\}$ локальные координаты. А именно, если, $x = (x^1, \dots, x^n) \in \boldsymbol{R^n}$, то локальные координаты точки φ_α - это $x^1, \dots, x^n$. В пересечении координатных областей φ_α и φ_β локальные координаты связаны функциями перехода:

$$x_\alpha^i = f_{\alpha\beta}^i(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$$

где $f_{\alpha\beta}^i = \varphi_\alpha^{-1}\varphi_\beta$.

Мы говорим, что на топологическом многообразии задана гладкая структура класса C^k, если на нем задан атлас, у которого все функции перехода непрерывно дифференецируемы k раз. Многообразие с таким покрытием называется гладким (класса гладкости C^k), а соответствующие локальные координаты - гладкими. В дальнейшем под гладкостью мы будем для простоты понимать гладкость класса C^∞. Отображения $f_{\alpha\beta}^i$ обратимы, так как их композиция $f_{\alpha\beta}^i f_{\beta\alpha}^i$ является тождественным отображением. Следовательно их якобианы всюду невырождены:

$$det\left(\frac{\partial f_{\alpha\beta}^i}{\partial x_\beta^j}\right) = det\left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\right) \neq 0.$$

Согласно теореме о дифференцировании сложной функции, если на пересечении областей $\varphi_\alpha \cap \varphi_\beta$ задана функция f класса гладкости C^k по переменным x_α^i, то она имеет тот же класс гладкости по переменным x_β^j. Это позволяет определить понятие гладкого отображения:

отображение гладких многообразий $f: M^n \to N^m$ имеет класс гладкости C^k, если по отношению к гладким локальным координатам $\{x^i\}$ на M^n и $\{y^j\}$ на *N^m оно задается вектор-функцией $(y^1, \dots, y^m) = f(x^1, \dots, x^n)$ класса гладкости C^k.*

Гладкие отображения $f: M^n \to \boldsymbol{R}$ называются *гладкими функциями*, а гладкие отображения $\gamma: [a, b] \to M^n$ - *гладкими путями*.

Заметим, что определение гладкости отображения $f: M^n \to N^m$ опирается на гладкие структуры и на M^n, и на N^m. Если на одном и том же топологическом многообразии X заданы две различные гладкие структуры, то мы получаем два различных гладких многообразия M_1^n и M_2^n. Гладкие структуры считаются совпадающими, если тождественные отображения $M_1^n \to M_2^n$ и $M_2^n \to M_1^n$ являются гладкими.

Многообразия M^n и N^m называются диффеоморфными, если существуют такие гладкие отображения $f: M^n \to N^m$ и $g: N^m \to M^n$, что они взаимно обратны, т.е. отображения $fg: N^m \to N^m$ и $gf: M^n \to M^n$ тождественны. Такие гладкие гомеорфизмы f и g называются диффеоморфизмами.

Пусть $\gamma(t)$ - гладкий путь в M^n. Тогда в локальной системе координат $\{x_\alpha^i\}$ путь $\gamma(t)$ записывается в виде

$$t \to \left(x_\alpha^1(t), \dots, x_\alpha^n(t)\right),$$

и его вектор скорости в точке $\gamma(t)$ равен

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\dot{x}_\alpha^1(t), \dots, \dot{x}_\alpha^n(t)\right)$$

В другой локальной системе коодинат $\left\{x_\beta^j\right\}$ путь $\gamma(t)$ и его вектор скорости $\dot{\gamma}(t)$ имеют вид

$$t \to \left(x_\beta^1(t), \dots, x_\beta^n(t)\right), \quad \dot{\gamma}(t) = \left(\dot{x}_\beta^1(t), \dots, \dot{x}_\beta^n(t)\right)$$

Отсюда мы выводим формулу, которая связывает записи векторов скорости в различных системах координат:

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\dot{x}_\beta^1(t), \dots, \dot{x}_\beta^n(t)\right) = \left(\frac{\partial x_\beta^1}{\partial x_\alpha^j}\dot{x}_\alpha^j, \dots, \qquad \frac{\partial x_\beta^n}{\partial x_\alpha^j}\dot{x}_\alpha^j\right),$$

что влечет

$$\dot{x}_\beta^i = \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\dot{x}_\alpha^j.$$

Здесь и в дальнейшем, когда встречаются два одинаковых индекса сверху и снизу, будем считать, что по этому индексу идет суммирование. Суммирование по повторяющемуся индексу идет согласно размерности пространства.

Векторы скорости путей в M^n являются касательными векторами к M^n, и вектор $\dot{\gamma}(t)$ касателен в точке $\gamma(t)$. Мы приходим к следующему определению:

касательным вектором к n-мерному многообразию M^n в точке x назвается объект, который в локальных координатах $\{x_\alpha^i\}$ задается упорядоченным набором чисел $(v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n)$ и его запись $(w_\beta^1, \dots, w_\beta^n)$ в любой другой системе координат $\{x_\beta^j\}$ удовлетворяет уравнению

$$w_\beta^j = \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i} v_\alpha^i. \tag{1}$$

Касательные векторы в точке x образуют n-мерное векторное пространство, которое называется *касательным пространством $T_x M^n$* в точке x. Каждая система координат задает в касательном пространстве базис, обозначаемый через

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Вектор скорости $\dot{x}$ разлагается в этом базисе по формуле

$$\dot{x} = \dot{x}^1 \partial_1 + \dots + \dot{x}^n \partial_n.$$

Итак, гладкие многообразия около каждой точки устроены так же как евклидовы пространства и функции на многообразиях - гладкие, если они являются гладкими функциями от локальных координат.

Пусть $f: M^n \to \boldsymbol{R}$ - гладкая функция на M^n. В координатах $\{x_\alpha^i\}$ ее градиент $grad\, f$ имеет вид

$$v^\alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^n}\right),$$

а в координатах $\{x_\beta^j\}$ –

$$w^\beta = \left(\frac{\partial f}{\partial x_\beta^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_\beta^n}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} \cdot \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_\alpha^i} \cdot \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^n}\right)$$

Формула, которая связывает записи градиента в различных координатах, отличается от (1).

Ковектором в точке x называется объект, который задается в локальных координатах $\{x_\alpha^i\}$ упорядоченным набором чисел $(v_1^\alpha, \dots, v_n^\alpha)$ и $\left(w_1^\beta, \dots, w_n^\beta\right)$ в другой системе координат $\{x_\beta^j\}$ удовлетворяет уравнению

$$w_j^\beta = \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \cdot v_i^\alpha. \tag{2}$$

Мы заключаем, что

Лемма 1. *Градиент функции является ковектором.*

Производная функции в направлении касательного вектора v равна $D_v f = (grad\ f)_i v^i$, не зависит от системы координат и является линейной функцией на касательном пространстве. Последнее утверждение верно для всех ковекторов.

Лемма 2. *Ковектор* w *в точке* $x \in M^n$ *является линейной функцией на касательном пространстве* $T_x M^n$*, записываемой в локальных координатах формулой* $w(v) = w_i v^i$.

Доказательство. Достаточно показать, что значение $w(v)$ не зависит от выбора локальных координат. Но из (1) и (2) следует, что

$$w_i^\beta v_\beta^i = \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i} w_j^\alpha \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^k} v_\alpha^k,$$

и, так как

$$\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i} \cdot \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^k} = \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\alpha^k} = \delta_k^j$$

мы получаем

$$w(v) = w_i^\beta v_\beta^i = w_k^\alpha v_\alpha^k.$$

Лемма 2 доказана. Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Ковекторы в точке* $x \in M^n$ *образуют линейное пространство* $T_x^* M^n$ *размерности* n*, сопряженное к касательному пространству* $T_x M^n$.

Пространство $T_x^* M^n$ называется *кокасательным* пространством в точке $x \in M^n$.

2 ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

Данная глава посвящена основным сведениям из теории групп и алгебр Ли, которые хорошо изложены в [36].

Пусть G *— гладкое многообразие. Пусть на нем задано гладкое отображение* $G \times G \to G$ *- умножение, сопоставляющее паре точек* $x, y \in G$ *их произведение* xy*, удовлетворяющее условиям:*

1) $(xy)z = x(yz)$ *для всех* $x, y, z \in G$*;*
2) *существует единичный элемент* e: $ex = xe = x$ *для любого* $x \in G$;
3) *для каждого* $x \in G$ *существует обратный* x^{-1} : $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Тогда G *называется группой Ли.*

Подгруппа H группы Ли G называется подгруппой Ли, если она одновременно является гладким подмногообразием G.

Алгебра Ли - это векторное пространство V *на котором задана билинейная*

операция $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ *- коммутатор, для которого выполняется*

1) $[u, v] = -[v, u]$

2) $\big[[u, v], w\big] + \big[[v, w], u\big] + [[w, u], v] = 0$ *(тождество Якоби).*

Касательное пространство в единице группы Ли G *с операцией коммутатора будет алгеброй Ли группы Ли.*

Приведем некоторые важные сведения о классификации алгебр Ли. Мы будем считать, что алгебры Ли определены либо над ***R***, либо над ***C***.

Форма Киллинга

$$\langle X, Y\rangle = -Tr(ad(X)\ ad(Y))$$

играет важную роль в классификации алгебр Ли.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *называется нильпотентной ступени* N*, если*

$$\Big[\xi_1, \big[\xi_2, [\dots[\xi_N, \xi_{N+1}]\dots]\big]\Big] = 0$$

для любых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N+1} \in g$*, или что эквивалентно,*

$$ad(\xi_1)\dots ad(\xi_N) = 0$$

для всех $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N+1} \in g$.

Имеет место следующая теорема Энгеля.

Теорема 1. *Алгебра Ли нильпотентна тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга тождественно равна нулю.*

Подалгебра h алгебры Ли g называется идеалом, если $[g,h]\subset g$. Простейший пример идеала – *коммутант* – подалгебра, обозначаемая через $[g,g]$, линейно порожденная всевозможными элементами вида $[\xi,\eta]$, где $[\xi,\eta]\in g$.

Алгебра Ли g называется разрешимой, если ряд $D^i g=[D^{i-1}g,D^{i-1}g]$ обрывается:

$$0=D^N g=[D^{N-1}g,D^{N-1}g]\subset D^{N-1}g\subset\ldots\subset D^1 g=[g,g]\subset g.$$

Легко заметить, что каждая нильпотентная алгебра Ли разрешима. Обратное неверно. Например, для группы $SOLV^-$, которая будет рассматриваться в наших дальнейших исследованиях, алгебра разрешима, но не нильпотентна.

Теорема 2. *Алгебра Ли g разрешима тогда и только тогда, когда $\langle X,Y\rangle=0$, для всех $X\in g, Y\in[g,g]$.*

Группа Ли называется *нильпотентной* или *разрешимой*, если ее алгебра Ли нильпотентна или разрешима соответственно.

Итак, форма Киллинга на разрешимых и, в частности, на нильпотентных алгебрах Ли вырожденны.

Если форма Киллинга на алгебре Ли g не вырожденна, то говорят, что алгебра g *полупроста*. Это эквивалентно тому, что алгебра g не содержит ненулевых коммутативных идеалов.

Алгебра Ли g называется простой, если она не содержит нетривиальных идеалов, отличных от нуля и g. Если же полупростая алгебра Ли содержит идеал h, то она распадается на прямую сумму

$$g=h\oplus h^{\perp},\qquad \left[h,h^{\perp}\right]=0,$$

где $h^{\perp}$ - ортогональное дополнение к h относительно невырожденной формы Киллинга (оно тоже является идеалом). Поэтому любая полупростая алгебра Ли является прямой суммой простых алгебр Ли.

3 ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СУБРИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

Пусть M^n гладкое n-мерное многообразие. *Гладкое семейство*

$$\Delta = \{\Delta(q):\ \Delta(q) \in T_q M^n \quad \forall q \in M^n,\quad dim\,\Delta(q) = k\}$$

k-мерных подпространств в касательных пространствах в точке $q \in M^n$ *называется вполне неинтегрируемым (неголономным), если векторные поля из* Δ, *и их всевозможные коммутаторы порождают все касательное пространство* TM^n:

$$span\{[f_1, [\dots [f_{m-1}, f_m] \dots]](q):\ f_i(p) \in \Delta\,(p) \quad \forall p \in M^n, m = 1, \dots\} = T_q M^n.$$

Иногда такое распределение Δ называется вполне неголономным. Двумерное распределение Δ на трехмерном многообразии является вполне неголономным тогда и только тогда, когда

$$span\,\{f_1(q), f_2(q), [f_1(q), f_2(q)]\} = T_q M^3$$

где в каждой точке q вектора $f_1(q), f_2(q)$ образуют базу в $\Delta(q)$.

Пусть g_{ij} *полная риманова метрика на* M^n. *Тройка* (M^n, Δ, g_{ij}) *называется субримановым многообразием.*

Непрерывная в смысле Липшица кривая $\gamma: [0, T] \to M^n$ называется допустимой, если $\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t))$ для всех $t \in [0,\mathrm{T}]$. Длина этой кривой вычисляется по формуле

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}dt.$$

Расстояние между двумя точками на многообразии находится следующим образом,

$$d(q_0, q_1) = \inf_{\gamma \in \Omega_{q_0, q_1}} l(\gamma),$$

где Ω_{q_0, q_1} является множеством всех допустимых кривых, соединяющих точки q_0 и q_1. Такая функция $d(\cdot,\ \cdot)$ называется субримановой метрикой на M^n, а геодезическая этой метрики является допустимой кривой $\gamma: [0, T] \to M^n$, которая локально минимизирует функционал длины $l(\gamma)$.

Геодезические субримановой метрики должны удовлетворять принципу максимума Понтрягина [16, с.164-165], [21, с.5-6].

Пусть $f_1, \ldots, f_k$ касательные ортонормированные векторные поля из Δ, которые порождают всё Δ в каждой точке M^n.

Принцип максимума Понтрягина.

Пусть M^n гладкое n-мерное многообразие. Рассмотрим для непрерывных в смысле Липшица кривых следующую задачу минимизации

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(q), \;\; u_i \in R, \qquad \int_0^T \sum_{i=1}^{k} u_i^2(t)dt \to min, \;\; q(0) = q_0, \qquad q(T) = q_1$$

с фиксированным T. Рассмотрим отображение $H: T^*M^n \times R \times R^k \to R$, заданную функцией

$$H(q, \lambda, p_0, u) := \langle \lambda, \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(q) \rangle + p_0 \sum_{i=1}^{k} u_i^2.$$

Если кривая $q(\cdot): [0,T] \to M^n$ с управлением $u(\cdot): [0,T] \to M^n$ является оптимальной, тогда существует Липшицева функция (ковектор) $\lambda(\cdot): t \in [0,T] \to \lambda(t) \in T^*_{q(t)}M^n, (\lambda(t), p_0) \neq 0$ и постоянная $p_0 \leq 0$ такие, что

i) $\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\big(q(t), \; \lambda(t), p_0, u(t)\big),$

ii) $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}\big(q(t), \; \lambda(t), p_0, u(t)\big),$

iii) $\frac{\partial H}{\partial u}\big(q(t), \; \lambda(t), p_0, u(t)\big) = 0.$

Кривая $q(\cdot): [0,T] \to M^n$, удовлетворяющая принципу максимума Понтрягина называется экстремальной кривой (или экстремалью). Такой кривой соответствует множество пар $(\lambda(\cdot), p_0)$. Тип экстремальной кривой (нормальный или анормальный) зависит от значения p_0:

- если $p_0 \neq 0$, то экстремаль называется нормальной;
- если $p_0 = 0$, то экстремаль называется анормальной;
- экстремаль называется строго анормальной, если она не проектируется (на M^n) в нормальные экстремали.

Для нормальных экстремалей, которые являются геодезическими согласно [16, с.255], мы будем полагать $p_0 = -\frac{1}{2}$.

Из пункта iii) следует, что $u_i = \langle \lambda(t), f_i(t) \rangle$, а также, что кривая

$q(\cdot)\colon [0,T] \to M^n$ будет геодезической тогда и только тогда, если она является проекцией на M^n решения $(\lambda(t), q(t))$ Гамильтоновой системы, действующей на $T^* M^n$ со следующей Гамильтоновой функцией:

$$H(q,\lambda) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}\langle\lambda, f_i\rangle^2\right), \qquad q \in M^n, \qquad \lambda \in T_q^* M^n. \qquad (3)$$

Гамильтониан H является постоянным вдоль любого решения Гамильтоновой системы. Более того, $H = \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда геодезическая натурально-параметризованна.

4 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ФУНКЦИИ ЯКОБИ

Приведем некотрые необходимые факты об Якобиевых эллиптических функциях [37, 38, 39]. Интегралы

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

и

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

называются эллиптическими интегралами первого и второго рода соответственно в нормальной форме Лежандра, где k $(0<k<1)$ называется модулем этих интегралов, а $k'=\sqrt{1-k^2}$ дополнительным модулем. С помощью подстановки $x=\sin\varphi$ эти интегралы приводятся к нормальной тригонометрической форме

$$\mathrm{F}(\varphi,k)=\int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}=\int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{4}$$

$$\mathrm{E}(\varphi,k)=\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha=\int_0^{\sin\varphi} \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл первого рода в нормальной тригонометрической форме

$$v=\int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},$$

и его верхний предел, как функцию от v. Такая функция обозначается

$$\varphi=\mathrm{am}\,(v,k)=\mathrm{am}\,v$$

и называется амплитудой, а сам процесс - обращением интеграла. Функция φ является однозначной функцией v. Она определена для любого v и имеет конечную производную:

$$\frac{d\varphi}{dv} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\,. \tag{6}$$

Следующие функции:

$$\sin\varphi = \sin(\mathrm{am}\ v\ ) = \mathrm{sn}\ v$$

$$\cos\varphi = \cos(\mathrm{am}\ v\ ) = \mathrm{cn}\ v \tag{7}$$

$$\Delta\ \mathrm{am}\ v = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 v} = \mathrm{dn}\ v$$

называются функциями Якоби. Эти функции зависят от v и от модуля k.
В дальнейшем будем иметь в виду такие сокращения, как

$$\mathrm{am}\ (v, k) = \mathrm{am}\ v\ ,$$

$$\mathrm{sn}\ (v, k) = \mathrm{sn}\ v,$$

$$\mathrm{cn}\ (v, k) = \mathrm{cn}\ v,$$

$$\mathrm{dn}\ (v, k) = \mathrm{dn}\ v.$$

Из формул (6) и (7) можно понять, что эллиптические функции Якоби связаны соотношениями

$$\mathrm{sn}^2 v + \mathrm{cn}^2 v = 1,$$

$$\mathrm{dn}^2 v + k^2 \mathrm{sn}^2 v = 1.$$

Вычислив производную и применяя уже известные все указанные выше соотношения, мы получим

$$\frac{d\ \mathrm{sn}\ v}{dv} = \mathrm{cn}\ v \cdot \mathrm{dn}\ v,$$

$$\frac{d\ \mathrm{cn}\ v}{dv} = -\mathrm{sn}\ v \cdot \mathrm{dn}\ v,$$

$$\frac{d\ \mathrm{dn}\ v}{dv} = -k^2 \mathrm{sn}\ v \cdot \mathrm{cn}\ v.$$

Возводя эти выражения в квадрат с обеих сторон и преобразовав правые части, получим следующие необходимые для дальнейшего применения и вычислений выражения:

$$\left(\frac{d\,\mathrm{sn}\,v}{dv}\right)^2 = (1-\mathrm{sn}^2\,v)(1-k^2\mathrm{sn}^2 v),$$

$$\left(\frac{d\,\mathrm{cn}\,v}{dv}\right)^2 = (1-\mathrm{cn}^2\,v)(k'^2+k^2\mathrm{cn}^2 v), \qquad (8)$$

$$\left(\frac{d\,\mathrm{dn}\,v}{dv}\right)^2 = (1-\mathrm{dn}^2\,v)(\mathrm{dn}^2 v-k'^2).$$

При переходе к первоначальным обозначениям, то есть сделав обратную замену $x=\sin\varphi$, первое уравнение (8) влечет, что $\mathrm{sn}\,v$ является обращением эллиптического интеграла первого рода в нормальной форме Лежандра

$$v=\int\limits_0^{\mathrm{sn}\,v}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \qquad (9)$$

Из второго и третьего уравнений легко аналогично получается, что $\mathrm{cn}\,v$ и $\mathrm{dn}\,v$ являются результатами обращения следующих функций

$$v=\int\limits_1^{\mathrm{cn}\,v}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}}, \qquad (10)$$

$$v=\int\limits_1^{\mathrm{dn}\,v}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}}. \qquad (11)$$

Все функции Якоби являются периодическими. Заметим, что функция $\mathrm{sn}\,v$ нечетна, а $\mathrm{cn}\,v$ и $\mathrm{dn}\,v$ четные, следовательно в последних двух интегралах, когда функциии $\mathrm{cn}\,v$ и $\mathrm{dn}\,v$ проходят через критические точки, соответственно меняется знак радикала.

Посредством несложных вычислений можно вывести следующие полезные формулы интегрирования:

$$\int \mathrm{dn}^2 u\, du = \mathrm{E}(\mathrm{am}\, u, k),$$

$$\int \mathrm{sn}^2 u\, du = \frac{1}{k^2}(u\text{-}\mathrm{E}(\mathrm{am}\, u, k)),$$

$$\int \mathrm{cn}^2 u\, du = \frac{1}{k^2}(\mathrm{E}(\mathrm{am}\, u, k) - k'^2\, u), \tag{12}$$

$$\int \mathrm{sn}\; u \cdot \mathrm{dn}\, u\, du = -\mathrm{cn}\, u,$$

$$\int \mathrm{sn}\; u \cdot \mathrm{cn}\, u\, du = -\frac{1}{k^2}\mathrm{dn}\, u$$

а также нам в процессе интегрирования понадобится более сложная формула

$$\int \frac{dx}{\Phi^{n+1}} = -\frac{k^2 \sin x\; \cos x}{(n-1)k'^2\, \Phi^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{2-k^2}{k'^2} \int \frac{dx}{\Phi^{n-1}} - \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{1}{k'^2} \int \frac{dx}{\Phi^{n-3}}, \tag{13}$$

где $\Phi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$ [40].

5 СУБРИМАНОВА ЗАДАЧА НА ГРУППЕ $SOLV^-$

Рассмотрим трехмерную группу Ли $SOLV^-$ представленную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ x, y, z \in \boldsymbol{R},$$

алгебра Ли которой построена на базисных векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а их коммутационные отношения следующие:

$$[e_1, e_2] = 0; \ \ [e_1, e_3] = e_1; \ [e_2, e_3] = -e_2.$$

Перейдем к новому базису

$$a_1 = e_1 + e_2; \ a_2 = e_1 - e_2; \ a_3 = e_3, \tag{14}$$

то есть

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

чьи коммутаторы будут

$$[a_1 , a_2] = 0; [a_1, a_3] = a_2; \ \ [a_2, a_3] = a_1.$$

Рассмотрим левоинвариантную метрику на $SOLV^-$, которая в единице группы задается формой:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Группа $SOLV^-$ является диффеоморфной пространству $\boldsymbol{R}^3$. Итак, x, y, z являются глобальными координатами на $SOLV^-$. Тогда касательное пространство в каждой точке $SOLV^-$ определяется матрицами вида

$$\partial_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_z = \begin{pmatrix} -e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которые являются левыми сдвигами базисных векторов:

$$L_q^*(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_q^*(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_q^*(e_3) = \begin{pmatrix} -e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что означает

$$L_q^*(e_1) = e^{-z}\partial_x,\ \ L_q^*(e_2) = e^{z}\partial_y,\ L_q^*(e_3) = \partial_z.$$

Так как выбранная метрика левоинвариантна, мы имеем

$$g_{ij}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь для нового базиса $a_1,\ a_2,\ a_3$ левые сдвиги следующие

$$L_q^*(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-z} \\ 0 & 0 & e^{z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_q^*(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-z} \\ 0 & 0 & -e^{z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_q^*(a_3) = \begin{pmatrix} -e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Через базу касательного пространства эти левые сдвиги будут иметь вид:

$$L_q^*(a_1) = e^{-z}\partial_x + e^{z}\partial_y,$$

$$L_q^*(a_2) = e^{-z}\partial_x - e^{z}\partial_y,$$

$$L_q^*(a_3) = \partial_z.$$

Матрица скалярных произведений в единице принимает форму

$$\langle L_q^*(a_i), L_q^*(a_j)\rangle = \langle a_i, a_j\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Итак, мы исследуем субриманову задачу на трехмерной группе Ли $SOLV^-$, определенной распределением $\Delta = span\{a_1, a_3\}$ и метрикой (16).

Пусть G - наша разрешимая трехмерная группа, а g ее алгебра Ли с базисными векторами a_1, a_2, a_3 согласно (15). Разобьем алгебру Ли g на сумму подпространств $p \oplus k$, где $p = span\{a_1, a_3\}$, $k = span\{a_2\}$. Теперь возьмем двумерное левоинвариантное распределение $\Delta = span\{a_1, a_3\}$ в TG и левоинвариантную риманову метрику (16), для которой пространства p и k ортогональны, т. е. метрический тензор разбивается следующим образом:

$$g = (g_{ij}) = g_p + g_k.$$

Введем параметр τ и рассмотрим метрику

$$g_\tau = g_p + \tau g_k.$$

Каждая такая метрика вместе с Δ определяет вышеупомянутое субриманово многообразие потому, что только ограничение на метрику в Δ является существенным.

В то же время Гамильтонова функция для геодезических потоков этой метрики зависит от τ:

$$H(q, p, \tau) = \frac{1}{2} g_\tau^{ij}(q) p_i p_j,$$

где $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$. Мы имеем

$$g_{\tau,ij} = \begin{pmatrix} \frac{1+\tau}{2} e^{2z} & \frac{1-\tau}{2} & 0 \\ \frac{1-\tau}{2} & \frac{1+\tau}{2} e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_\tau^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1+\tau}{2} e^{-2z} & -\frac{1-\tau}{2} & 0 \\ -\frac{1-\tau}{2} & \frac{1+\tau}{2} e^{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

из чего можно получить Гамильтониан для нашего случая

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\tau}{2\tau} e^{-2z} p_x^2 - \frac{1-\tau}{\tau} p_x p_y + \frac{1+\tau}{2\tau} e^{2z} p_y^2 + p_z^2\right).$$

Гамильтонова функция H для нормального геодезического потока субримановой метрики получается из $H(x,p,\tau)$ в пределе при $\tau \to \infty$ тогда мы имеем

$$H\left(x,y,z,p_x,p_y,p_z\right) = \frac{1}{4}e^{-2z}p_x^2 + \frac{1}{2}p_x p_y + \frac{1}{4}e^{2z}p_y^2 + \frac{1}{2}p_z^2 \,. \qquad (17)$$

Уравнения Гамильтона согласно равенствам

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$$

для нашего случая имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}e^{-2z}p_x + \frac{1}{2}p_y\,, & \dot{p_x} &= 0, \\ \dot{y} &= \frac{1}{2}e^{2z}p_y + \frac{1}{2}p_x\,, & \dot{p_y} &= 0, \\ \dot{z} &= p_z\,, & \dot{p_z} &= \frac{1}{2}e^{-2z}p_x^2 - \frac{1}{2}e^{2z}p_y^2\,. \end{aligned} \qquad (18)$$

Эти дифференциальные уравнения могут быть получены из принципа максимума Понтрягина. Соответствующий Гамильтониан принимает форму

$$\begin{aligned} &H\left(x,y,z,p_x,p_y,p_z,p_0,u_1,u_3\right) = \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_1 p_x e^{-z} + u_1 p_y e^{z}\right) + u_3 p_z + p_0(u_1^2 + u_3^2), \end{aligned}$$

где $p_0 = -\frac{1}{2}$, а u_1, u_3 - функции управления.

Система (18) имеет три первых интеграла:

$$I_1 = H, \quad I_2 = p_x, \quad I_3 = p_y,$$

которые функционально независимы почти всюду, следовательно система вполне интегрируема. Так как поток левоинвариантный так же как распределение Δ и метрика, не теряя общности, полагаем, что все геодезические берут начало в единице группы, тогда мы имеем следующие начальные условия для системы (18):

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0. \qquad (19)$$

Более того, мы полагаем, что

$$H = \frac{1}{2}, \qquad \frac{p_x}{\sqrt{2}} = a, \qquad \frac{p_y}{\sqrt{2}} = b.$$

При подстановке этих выражений в (17), мы получим

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-2z} \cdot a^2 + ab + \frac{1}{2}e^{2z} \cdot b^2 + \frac{1}{2}p_z^2,$$

перепишем это равенство в виде

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^{-2z} \cdot a^2 + 2ab + e^{2z} \cdot b^2) + \frac{1}{2}p_z^2,$$

или

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^{-z} \cdot a + e^{z} \cdot b)^2 + \frac{1}{2}p_z^2,$$

$$1 = (e^{-z}a + e^{z}b)^2 + p_z^2, \tag{20}$$

что влечет

$$p_z = \pm\sqrt{1 - (e^{-z}a + e^{z}b)^2}.$$

Подставляя это выражение в третье уравнение системы (18), мы получим уравнение для временной переменной t и для положительных значений p_z

$$t = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - (e^{-z}a + e^{z}b)^2}}. \tag{21}$$

Если $p_z < 0$, тогда все вычисления будут подобными, только с обратным знаком.

Сделаем замену переменной

$$u = e^{z}, \tag{22}$$

и перепишем (21) как

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - (a + bu^2)^2}}. \tag{23}$$

Последнее выражение не интегрируется в терминах элементарных функций и определяется посредством эллиптических функций, кроме случаев, когда этот эллиптический интеграл вырождается. Эти случаи мы обсудим ниже.

Пока рассмотрим общий случай $a \neq 0,\ b \neq 0$. Подкоренное выражение в (23) имеет дискриминант $D = 1 - 4ab \geq 0$.

$D = 0$ тогда и только тогда, когда $p_z = 0$ согласно системе (18) и уравнению (20). Этот случай вырожденный.

Таким образом, если $D > 0$ $\left(ab < \frac{1}{4}\right)$, тогда существуют σ_1^2 и σ_2^2, такие, что

$$u^2 - (a + bu^2)^2 = -b^2u^4 + (1 - 2ab)u^2 - a^2 =$$
$$= -b^2(u^2 - \sigma_1^2)(u^2 - \sigma_2^2) = \sigma_1^4 b^2 \left(1 - \frac{u^2}{\sigma_1^2}\right)\left(\frac{u^2}{\sigma_1^2} - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right),$$

и

$$\sigma_{1,2}^2 = \frac{1 - 2ab \pm \sqrt{1 - 4ab}}{2b^2} \tag{24}$$

Пусть

$$w = \frac{u}{\sigma_1} \tag{25}$$

и перепишем (23) в следующем виде

$$t = \frac{1}{\sigma_1 b}\int \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)\left(w^2 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)}}. \tag{26}$$

Мы применим эллиптческую фнкцию Якоби (11), чтобы обратить этот интеграл:

$$\sigma_1 b \cdot t = \int_1^{\mathrm{dn}\,(\sigma_1 b \cdot t)} \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)\left(w^2 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)}},$$

где

$$k'^2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}.$$

Следовательно

$$w = \mathrm{dn}\,(\sigma_1 b \cdot t, k),$$

где

$$k^2 = 1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}. \tag{27}$$

После обратных замен (22), (25)

$$e^z = C\sigma_1 \cdot \mathrm{dn}\,(\sigma_1 bt),$$

$$z(t) = \ln\big(\sigma_1 \cdot \mathrm{dn}\,(\sigma_1 bt)\big) + \ln C,$$

и учитывая начальные условия (19), а также равенство $\mathrm{dn}(0, k) = 1$, мы получим, что константа интегрирования $C = \frac{1}{\sigma_1}$, а значит

$$z(t) = \ln\ \mathrm{dn}\,(\sigma_1 bt, k).$$

Подставим это выражение в первое уравнение системы (18)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a \cdot e^{-2\ln \mathrm{dn}\,(\sigma_1 bt)} + b\right),$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a \int \frac{dt}{\mathrm{dn}^2\,(\sigma_1 bt)} + b\int dt\right).$$

Первое слагаемое этого выражения

$$\int \frac{dt}{\mathrm{dn}^2\,(\sigma_1 bt)}$$

после замен $\sigma_1 bt = v$ и $\mathrm{am}\, v = \varphi$ согласно (6) и (7) будет иметь вид

$$\frac{1}{\sigma_1 b}\int \frac{d\varphi}{\left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\right)^3}.$$

Этот интеграл можно переписать по формуле (13), при $n = 2$ в виде:

$$\frac{1}{\sigma_1 b}\int \frac{d\varphi}{\left(\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\right)^3} = -\frac{k^2 \sin\varphi\ \cos\varphi}{k'^2\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} + \frac{1}{k'^2}\,\mathrm{E}(\varphi, k).$$

Полученное выражение, сделав обратные замены, подставим в наше $x(t)$, тогда будем иметь:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{a}{\sigma_1 b}\left(-\frac{k^2 \mathrm{sn}(\sigma_1 bt, k)\cdot \mathrm{cn}(\sigma_1 bt, k)}{k'^2\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(\sigma_1 bt, k)}} + \frac{1}{k'^2}\mathrm{E}(\mathrm{am}(\sigma_1 bt), k)\right) + bt\right] + C,$$

где $\mathrm{E}(x, k)$ - эллиптическая функция второго рода (5).

Так как $\mathrm{sn}\,(0, k) = 0,\ \mathrm{cn}\,(0, k) = 1, am\,(0, k) = 0, E(0, k) = 0,$ мы имеем константу интегрирования в данном случае $C = 0$. Из второго уравнения системы мы получим, что

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b \cdot e^{2\ln \mathrm{dn}\,(\sigma_1 bt)} + a\right),$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b\int \mathrm{dn}^2\ (\sigma_1 bt)\ dt + a\int dt\right).$$

Этот интеграл вычисляется по первой из формул (12)

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sigma_1}\mathrm{E}(\mathrm{am}(\sigma_1 bt, k),\ \ k) + at\right) + C,$$

с константой интегрирования C. Из (19), мы вычислим, что $C = 0$.

Теперь перечислим случаи, когда эллиптический интеграл (23) вырождается:

1) $a = 0,\ b = 0;$

2) $a = 0,\ b \neq 0;$

3) $b = 0,\ a \neq 0;$

4) $D = 0\ \left(ab = \frac{1}{4}\right).$

Рассмотрим их по-порядку:

1) $a = 0,\ b = 0$. Из уравнений (18), (19) и (21) ясно, что

$$x(t) = 0, \qquad y(t) = 0, \qquad z(t) = t. \tag{28}$$

2) $a = 0,\ b \neq 0$. Значит $p_x = 0,\ p_y = \sqrt{2}b$. Уравнение (23) перепишется в виде

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - b^2u^4}}.$$

Проинтегрируем, преобразуем полученное уравнение и сделаем обратную замену переменной $u = e^z$:

$$e^t = \frac{Cbe^z}{1 + \sqrt{1 - b^2e^{2z}}},$$

где C - константа интегрирования и $C > 0$. Согласно начальным условиям (19), из последнего выражения следует

$$C = \frac{1 + \sqrt{1 - b^2}}{b},$$

значит

$$e^z = \frac{2Ce^t}{b(C^2 + e^{2t})},$$

т.е.,

$$z(t) = \ln\frac{2Ce^t}{b(C^2 + e^{2t})}, \tag{29}$$

которое после подстановки выражения для C будет иметь вид

$$z(t) = \ln\frac{2\left(1 + \sqrt{1 - b^2}\right)e^t}{2\left(1 + \sqrt{1 - b^2}\right) - b^2 + b^2e^{2t}}.$$

Из первого уравнения системы (18), имеем

$$x(t) = \frac{b}{\sqrt{2}}t,$$

Для второго уравнения системы (18)

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}e^{2z}p_y\ ,$$

и подставляя выражение (29), получим

$$dy = \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot e^{2 \ln \frac{2Ce^t}{b(C^2+e^{2t})}} .$$

Проинтегрируем,

$$y(t) = \frac{b}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{2Ce^t}{b(C^2 + e^{2t})} \right)^2 dt,$$

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}C^2}{b(C^2 + e^{2t})} + C_1 ,$$

так как $y(0) = 0$,

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}C^2}{b(C^2 + 1)},$$

значит

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}C^2}{b(C^2 + e^{2t})} + \frac{\sqrt{2}C^2}{b(C^2 + 1)}. \tag{30}$$

В итоге, для случая 2) мы имеем явный вид решений:

$$x(t) = \frac{b}{\sqrt{2}} t$$

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}\left(2\left(1 + \sqrt{1 - b^2}\right) - b^2\right)}{2b\left(1 + \sqrt{1 - b^2}\right) - b^3 + b^3 e^{2t}} + \frac{\sqrt{2}\left(2\left(1 + \sqrt{1 - b^2}\right) - b^2\right)}{2b\left(1 + \sqrt{1 - b^2}\right)} \tag{31}$$

$$z(t) = \ln \frac{2\left(1 + \sqrt{1 - b^2}\right)e^t}{2\left(1 + \sqrt{1 - b^2}\right) - b^2 + b^2 e^{2t}}.$$

3) $b = 0,\ a \neq 0$. Значит $p_y = 0,\ p_x = \sqrt{2}a$. Уравнение (23) имеет форму

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}.$$

При обратной замене $u = e^z$, получим

$$e^t = \left(e^z + \sqrt{e^{2z} - a^2}\right) C,$$

где C - константа интегрирования и $C > 0$. Из последнего выражения и уравнений (19) следует

$$C = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - a^2}}, \tag{32}$$

откуда получим

$$z(t) = \ln \frac{C^2 a^2 + e^{2t}}{2Ce^t},$$

где C находится по формуле (32). Как в случае 2) из первых двух уравнений (18) получаем, что

$$x(t) = -\frac{\sqrt{2} a C^2}{e^{2t} + C^2 a^2} + \frac{\sqrt{2} a C^2}{1 + C^2 a^2},$$

$$y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} t.$$

Таким образом,

$$x(t) = -\frac{\sqrt{2} a}{e^{2t}\left[2\left(1 + \sqrt{1 - a^2}\right) - a^2\right] + a^2} + \frac{\sqrt{2} a}{2\left(1 + \sqrt{1 - a^2}\right)}$$

$$y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} t \tag{33}$$

$$z(t) = \ln\left(\frac{a^2}{2\left(1 + \sqrt{1 - a^2}\right) e^t} + \frac{\left(1 + \sqrt{1 - a^2}\right) e^t}{2}\right).$$

4) $D = 0$ $\left(ab = \frac{1}{4}\right)$.

Заметим, что тогда выражение (20) из (19) перепишется как

$$(a + b)^2 + p_z^2 = 1, \tag{34}$$

что означает

$$|a+b| \le 1. \tag{35}$$

Отсюда ясно, что

$$a = b = \frac{1}{2}$$

или

$$a = b = -\frac{1}{2},$$

а при этих значениях из уравнения (34) следует, что $p_z = 0$. Следовательно, решение системы (18) в случае 4) линейно:

$$x(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}, \qquad y(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}, \qquad z(t) = 0, \quad \text{если } a = b = \frac{1}{2}; \tag{36}$$

$$x(t) = -\frac{t}{\sqrt{2}}, \qquad y(t) = -\frac{t}{\sqrt{2}}, \qquad z(t) = 0, \quad \text{если } a = b = -\frac{1}{2}\,. \tag{37}$$

Таким образом сформулируем следующую теорему.

Теорема 3 [32, с.320]. *В общем случае нормальные геодезические (с начальными условиями (19)) описываются специальными эллиптическими функциями Якоби в виде (для* $p_z > 0$*):*

$$x(t) = -\frac{ak^2\mathrm{sn}(\sigma_1 bt, k)\cdot \mathrm{cn}(\sigma_1 bt, k)}{\sqrt{2}\sigma_1 bk'^2\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(\sigma_1 bt, k)}} + \frac{a\mathrm{E}(\mathrm{am}(\sigma_1 bt, k),\ \ k)}{\sqrt{2}\sigma_1 bk'^2} + \frac{b}{\sqrt{2}}t$$

$$y(t) = \frac{\mathrm{E}(\mathrm{am}(\sigma_1 bt, k),\ \ k)}{\sqrt{2}\sigma_1} + \frac{a}{\sqrt{2}}t \tag{38}$$

$$z(t) = \ln\ \mathrm{dn}\,(\sigma_1 bt, k),$$

где параметры σ_1 *и* k *определяются постоянными* a *и* b $\left(ab < \frac{1}{4}\right)$ *и выражаются через (24) и (27). В частных случаях 1) – 4) нормальные геодезические (с начальными условиями (19)) описываются в терминах элементарных функций формулами (28), (31), (33) и (36), (37).*

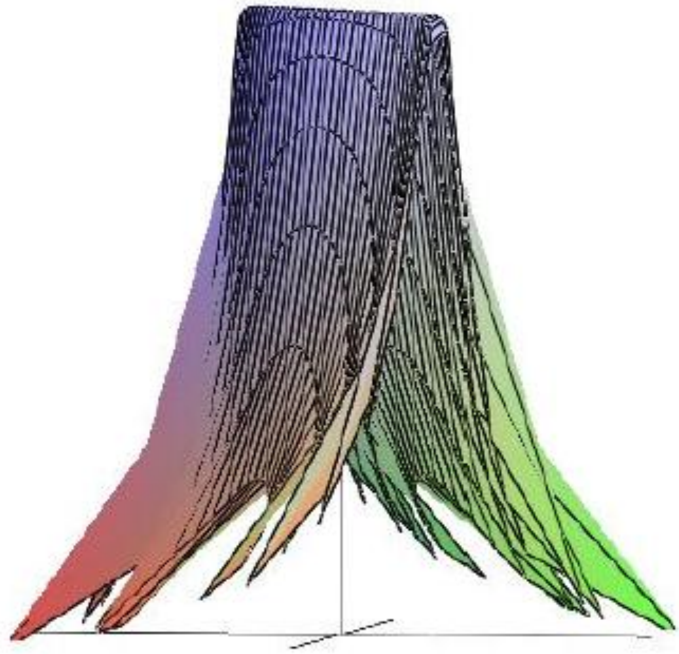

Рисунок 1 - Часть сферы радиуса $r = 0{,}15$

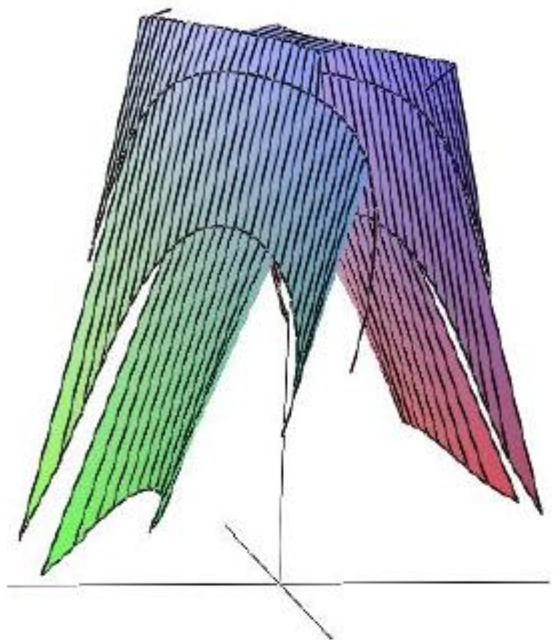

Рисунок 2 – Часть сферы радиуса $r = 0{,}25$

Следует отметить, что нормальные геодезические в теореме параметризуются через $a,\ b$. Постоянные $k,\ \sigma_1$ определяются из $a,\ b,$ как указано выше.

Качественное поведение общих нормальных геодезических довольно сложное.

Рисунки 1 и 2 показывают части геодезических сфер радиуса 0.15 и 0.25 (масштаб на каждом рисунке свой; ось z является экспоненциальной). Шкала сфер соответствует двум параметрам θ и μ, где θ - это угол наклона единичного вектора геодезической относительно оси x, а μ - это единичное ускорение значения $x+y$ вдоль геодезической, т.е. μ может интерпритироваться, как ускорение с которым геодезические выпускаются из начальной точки. На рисунках θ изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5\pi}{6}$ (часть сфер от $-\frac{\pi}{6}$ до $-\frac{5\pi}{6}$ получаются зеркально). Параметр μ изменяется - 45 до 45.

На этой шкале можно увидеть только качественное поведение сфер с возрастающим радиусом. На рисунках почти не видны те части сфер, которые слишком быстро уходят в бесконечность, так же как те части, которые сооответствуют геодезическим, изменяющимся почти по прямой.

Мы можем видеть части геодезических с малым углом наклона к плоскости $x,\ y$ стремящихся к большим значениям координат $x,\ y$ очень быстро, в то время как значения параметра μ небольшие.

Для достаточно больших θ и значений $|\mu|$ геодезические не слишком сильно отклоняются от плоскости $x=y$, но если $|\mu|$ возрастает отклонение от этой плоскости начинается. Принимая во внимание экспоненциальную шкалу оси z, мы видим, что координата z возрастает намного медленнее, чем x и y.

6 СУБРИМАНОВА ЗАДАЧА НА ГРУППЕ $SOLV^+$

Рассмотрим трехмерную группу Ли $SOLV^+$ представленную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos z & \sin z & x \\ -\sin z & \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \boldsymbol{R}, \tag{39}$$

алгебра Ли которой построена на базисных векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

а их коммутационные отношения следующие

$$[e_1, e_2] = 0; [e_1, e_3] = e_2; \; [e_2, e_3] = -e_1.$$

Коммутаторы базисных векторов порождает все касательное пространство.

Итак, в данной главе мы изучаем субриманову задачу на трехмерной группе Ли $SOLV^+$, определенную распределением $\Delta = span\{e_1, e_3\}$ с левоинвариантной метрикой

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Группу $SOLV^+$ можно идентифицировать с пространством $\boldsymbol{R}^3$ при помощи диффеоморфизма, который матрице (39) ставит в соответствие точку $q = (x, y, z)$ в $\boldsymbol{R}^3$. Пусть $q = (x, y, z)$ точка на группе $SOLV^+$. Тогда касательное пространство в каждой точке $SOLV^+$ определяется матрицами вида

$$\partial_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \partial_z = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & 0 \\ -\cos z & -\sin z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

а векторы e_1, e_2, e_3 с помощью левых сдвигов переходят в следующие вектора

$$L_q^*(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos z \\ 0 & 0 & -\sin z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_q^*(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin z \\ 0 & 0 & \cos z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_q^*(e_3) = \begin{pmatrix} -\sin z & \cos z & 0 \\ -\cos z & -\sin z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть,

$$L_q^*(e_1) = \cos z \cdot \partial_x - \sin z \cdot \partial_y,$$

$$L_q^*(e_2) = \sin z \cdot \partial_x + \cos z \cdot \partial_y, \qquad (42)$$

$$L_q^*(e_3) = \partial_z.$$

Эти векторы составляют ортонормированный базис в касательном пространстве $T_q M^n$. Обозначим его:

$$f_1 = \cos z \cdot \partial_x - \sin z \cdot \partial_y,$$

$$f_2 = \sin z \cdot \partial_x + \cos z \cdot \partial_y,$$

$$f_3 = \partial_z.$$

Найдем функцию Гамильтона по формуле (3)

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2} p_x^2 \cos^2 z - p_x p_y \sin z \cos z + \frac{1}{2} p_y^2 \sin^2 z + \frac{1}{2} p_z^2. \qquad (43)$$

Применяя принцип максимума Понтрягина, получаем уравнения Гамильтона для (43):

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = p_x \cos^2 z - p_y \sin z \cos z, && \dot{p_x} = 0, \\
&\dot{y} = -p_x \sin z \cos z + p_y \sin^2 z\,, && \dot{p_y} = 0, \\
&\dot{z} = p_z\,, && \dot{p_z} = \left(p_x^2 - p_y^2\right)\frac{\sin 2z}{2} + p_x p_y \cos 2z,
\end{aligned} \qquad (44)
$$

где точка означает производную по t. Система (44) имеет три первых интеграла:

$$I_1 = H, \qquad I_2 = p_x, \quad I_3 = p_y$$

значит эта система дифференциальных уравнений полностью интегрируема.

Не теряя общности, будем считать, что все геодезические берут начало в единице группы, то есть справедливы следующие начальные условия (44):

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad z(0) = 0 \qquad (45)$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$H = \frac{1}{2}, \qquad p_x = a, \qquad p_y = b.$$

Подставим это все в гамильтониан (43) и получим

$$1 = (a \cos z - b \sin z)^2 + p_z^2. \qquad (46)$$

Из (44) нетрудно увидеть, что если $p_z \equiv 0$, то $b = 0$, $a = \pm 1$. В этом случае

$$x(t) = \pm t, \qquad y(t) = 0, \qquad z(t) = 0.$$

Если $b \neq 0$, то p_z тождественно не может равняться нулю, поэтому из (46) находим p_z. Подставим его в третье уравнение системы (44) и найдем интеграл для переменной t при $p_z > 0$

$$t = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - (a \cos z - b \sin z)^2}}. \qquad (47)$$

Случай $p_z < 0$ может быть посчитан аналогично. Используя элементарные тригонометрические формулы, преобразуем подкоренное выражение интеграла (47) к виду

$$t = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi}},$$

где

$$A = 1 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2, \qquad B = \frac{b^2 - a^2}{2}, \qquad C = ab, \qquad \varphi = 2z.$$

Этот интеграл с помощью замены

$$\varphi = 2\psi + \alpha, \qquad \tan\alpha = \frac{C}{B}, \qquad p = \sqrt{B^2 + C^2}$$

приводится к эллиптическому интегралу первого рода в нормальной тригонометрической форме (4)

$$t = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi}} = \int \frac{d\psi}{\sqrt{A - p + 2p\cos^2\psi}} \ .$$

Таким образом,

$$t = \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - (a^2 + b^2)\sin^2\psi}}, \tag{48}$$

где $k^2 = a^2 + b^2$ является модулем эллиптического интеграла, который по определению должен удовлетворять условию $k^2 + k'^2 = 1$, где k' - это дополнительный модуль.

Итак, будем полагать, что $a^2 + b^2 \leq 1$. Случай $a^2 + b^2 > 1$ рассмотрим отдельно.

Сделав замену $v = \sin\psi$ в формуле (48), получим интеграл Якоби (9).

$$t = \int_0^{\operatorname{sn} t} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}.$$

Таким образом,

$$v = \operatorname{sn} t.$$

Произведем все обратные замены, $v = \sin\psi$, $\varphi = 2\psi + \alpha = 2z$, тогда

$$\psi = z - \frac{\alpha}{2},$$

значит

$$\sin\psi = \operatorname{sn} t.$$

Имея ввиду, что $\operatorname{sn} t = \sin(\operatorname{am} t)$ получаем

$$z - \frac{\alpha}{2} = \operatorname{am} t,$$

$$z = \operatorname{am} t + \frac{\alpha}{2} + C,$$

где C - константа интегрирования. Учитывая начальные условия (45), а также, что $\operatorname{am} 0 = 0$, запишем

$$z(t) = \operatorname{am} t.$$

Теперь выпишем интегралы для $x(t)$:

$$x(t) = a\int \operatorname{cn}^2 t\, dt - b\int \operatorname{sn} t \cdot \operatorname{cn} t\, dt,$$

и для $y(t)$:

$$y(t) = -a\int \operatorname{sn} t \cdot \operatorname{cn} t\, dt + b\int \operatorname{sn}^2 t\, dt.$$

Используя известные формулы (12), и учитывая начальные условия (45), можно вычислить $x(t)$ и $y(t)$.

Теперь рассмотрим второй случай, когда

$$a^2 + b^2 > 1.$$

Сделав замену

$$w = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin \psi$$

в формуле (48), получим интеграл Якоби

$$\frac{t}{\kappa} = \int\limits_0^{\operatorname{sn}\frac{t}{\kappa}} \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - \kappa^2 w^2)}},$$

где

$$\kappa^2 = \frac{1}{a^2 + b^2} < 1$$

будет его модулем. Выполнив все обратные замены и учитывая начальные условия (45), получим

$$z(t) = \pm \arcsin\left(k \cdot \operatorname{sn}\frac{t}{k}\right).$$

Тогда из системы (44) найдем интегралы для $x(t)$ и $y(t)$:

$$x(t) = a\left(t - \kappa^2 \int \operatorname{sn}^2\frac{t}{\kappa}\, dt\right) \mp b\kappa \int \operatorname{sn}\frac{t}{\kappa} \cdot \operatorname{dn}\frac{t}{\kappa}\, dt,$$

$$y(t) = \mp a\kappa \int \operatorname{sn}\frac{t}{\kappa} \cdot \operatorname{dn}\frac{t}{\kappa}\, dt + b\kappa^2 \int \operatorname{sn}^2\frac{t}{\kappa}\, dt,$$

которые вычисляются по формулам (12).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4 [33, с.127]. *Нормальные геодезические субримановой геометрии на трехмерной разрешимой группе Ли* $SOLV^+$ *с начальными условиями (45) задаются формулами (для* $p_z > 0$*):*

1) $k^2 = a^2 + b^2,\ k'^2 = 1 - k^2$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a}{k^2}(\mathrm{E}(\mathrm{am}\,t,\ k) - k'^2 t) + \frac{b}{k^2}(\mathrm{dn}\,t - 1) \\ y(t) &= \frac{a}{k^2}(\mathrm{dn}\,t - 1) + \frac{b}{k^2}\big(t - \mathrm{E}(\mathrm{am}\,t,\ k)\big) \\ z(t) &= \mathrm{am}\,t, \end{aligned} \tag{49}$$

если $a^2 + b^2 \leq 1$ и $a^2 \neq 1$*;*

2) $\kappa^2 = \frac{1}{a^2+b^2},\ \kappa'^2 = 1 - \kappa^2$

$$\begin{aligned} x(t) &= a\kappa E\left(am\frac{t}{\kappa},\ \kappa\right) \pm b\kappa^2\left(cn\frac{t}{\kappa} - 1\right) \\ y(t) &= \pm a\kappa^2\left(cn\frac{t}{\kappa} - 1\right) + bt - b\kappa\, E\left(am\ \frac{t}{\kappa},\ \kappa\right) \\ z(t) &= \pm arcsin\left(\kappa \cdot sn\frac{t}{\kappa}\right) \end{aligned} \tag{50}$$

если $a^2 + b^2 > 1$;

3) *если* $a^2 + b^2 \leq 1$ и $a^2 = 1$, то $b = 0$ *и*

$$x(t) = \pm t, \qquad y(t) = 0, \qquad z(t) = 0. \tag{51}$$

Заметим, что полученные уравнения геодезических распадаются на два семейства (49) и (50), которые разделяются прямыми вырожденного случая (51).

Постоянные $k,\ k',\ \kappa,\ \kappa'$ определяются через параметры a и b поэтому от них зависит качественное поведение геодезических. Начальный вектор скорости лежит в плоскости Oxz. Ясно, что параметр a изменяется от -1 до 1, тогда как b зависит от a.

Если a и b изменяются так, что $a^2 + b^2 \leq 1$, то геодезические первого семейства по оси Oz уходят сколь угодно далеко в бесконечность.

Во втором семействе, когда $a^2 + b^2 > 1$, геодезические по оси Oz лежат в ограниченной области.

7 АБНОРМАЛЬНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА $SOLV^-$ И $SOLV^+$

Отметим, что существование даже негладких минимайзеров для других субримановых пространств было показано в работе Монтгомери [41]. Позже эта проблема абнормальных геодезических для субримановых задач на группах Ли была изучена в работе [42], откуда было взято следующее определение.

Абнормальная геодезическая - это допустимая кривая, которая является проекцией на группе G абсолютно непрерывной в аннигиляторе $\Delta^{\perp} \subset T^*G$ для распределения Δ, которая не пересекает нулевое сечение и чья производная лежит в ядре канонической симплектической формы, ограниченной на $\Delta^{\perp}$.

В этой главе мы докажем следующую теорему.

Теорема 5 [29, с.32]. *На группе $SOLV^-$ не существует абнормальных субримановых геодезических.*

Доказательство.

Рассмотрим каноническую 1- форму η на T^*G и $v \in T_\alpha(T^*G)$, тогда

$$\eta_\alpha(v) = \alpha(\pi_* v),$$

где $\pi_* v$является проекцией v на TG. Мы хотим показать, что

$$\eta_\alpha = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\alpha)\Theta_i,$$

где λ_i - это ковектор с координатами в сопряженном к a_1, a_2, a_3 базе $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

$$\Theta_i = \pi_*(\theta_i).$$

С другой стороны мы запишем v в следующем виде

$$v = \sum_{i=1}^{3} h_i a_i + \sum_{i=1}^{3} h_i' \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \in T(T^*G),$$

и тогда по определению η мы получим

$$\eta_\alpha(v) = \alpha(\pi_* v) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{3} h_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\alpha)\theta_i\left(\sum_{j=1}^{3} h_j a_j\right) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\alpha) h_i.$$

Напомним, что наше распределение образовано векторами $\Delta = span\{a_1, a_3\}$, а его аннигилятор $\Delta^{\perp} = span\{\theta_2\}$. Таким образом мы имеем

$$\eta|_{\Delta^{\perp}} = \lambda_2(\alpha)\Theta_2, \qquad \omega = d\eta, \qquad \omega|_{\Delta^{\perp}} = d\lambda_2 \Lambda \Theta_2 + \lambda_2 d\Theta_2.$$

Пусть $(q(t), \lambda(t)) \in T^*G$, где $q(t)$ -это абнормальная кривая и

$$\dot{q}(t) = \dot{q}_1 a_1 + \dot{q}_3 a_3, \qquad \dot{q}_2 = 0, \qquad \dot{\lambda}(t) = \dot{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2}, \qquad \lambda \neq 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_3 = 0,$$

следовательно,

$$\omega_{(q,\lambda)}\left(\left(\dot{q}, \dot{\lambda}\right), \cdot\right) = \dot{\lambda}_2 \Theta_2(\cdot) - \dot{q}_2 d\lambda_2(\cdot) + \lambda_2 d\Theta_2\left(\left(\dot{q}, \dot{\lambda}\right), \cdot\right) = 0. \qquad (52)$$

Уравнения Маурера-Картана имеют вид

$$d\theta_k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ijk} \theta_i \Lambda \theta_j,$$

где α_{ijk} - это структурные константы алгебры Ли:

$$\left[a_i, a_j\right] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} a_{k.}$$

Так как только четыре компоненты не равны нулю:

$$\alpha_{132} = -\alpha_{312} = 1, \qquad \alpha_{231} = -\alpha_{321} = 1,$$

мы получим, что

$$d\Theta_2\left(\left(\dot{q}, \dot{\lambda}\right), \cdot\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\Big(\alpha_{312}\big((\dot{q}_3)\Theta_1(\cdot) - (\dot{q}_1)\Theta_3(\cdot)\big) + \alpha_{132}\big((\dot{q}_1)\Theta_3(\cdot) - (\dot{q}_3)\Theta_1(\cdot)\big)\Big).$$

Подставим последнее выражение в уравнение (52) и получим

$$\dot{\lambda}_2 \Theta_2(\cdot) + \dot{q}_3 \Theta_1(\cdot) - \dot{q}_1 \Theta_3(\cdot) = 0, \quad \dot{q}_2 = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_3 = 0.$$

Формы $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ являются линейно независимыми, следовательно

$$\dot{\lambda}_2 = 0,\ \dot{q}_3 = 0, \qquad \dot{q}_1 = 0, \qquad \dot{q}_2 = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_3 = 0.$$

Таким образом, мы запишем уравнения для абнормальных геодезических

$$\dot{x}(t) = 0, \qquad \dot{y}(t) = 0, \qquad \dot{z}(t) = 0,$$

$$p_x = 0, \qquad \dot{p}_y = 0, \qquad p_z = 0$$

и увидим, что решение этих уравнений, исходящих из единицы группы, является стационарным. Теорема доказана.

Отсутствие абнормальных геодезических для группы $SOLV^+$ доказывается точно также.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представляемой работе исследованы интегрируемость Гамильтоновых систем для геодезических потоков левоинвариантной метрики Карно-Каратеодори на трехмерных разрешимых группах Ли $SOLV^-$ и $SOLV^+$, а также полностью исследовано качественное поведение полученных геодезических.

Хорошо известно, что получить точное решение глобальной нелинейной задачи управления является довольно сложным, если задача не имеет большой группы симметрий. Для инвариантных задач на группах Ли точное решение часто можно найти на основе методов геометрической теории управления, с использованием техники дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли. Полученное решение инвариантной задачи может дать хорошую аппроксимацию соответствующей нелинейной задачи.

Гладкие динамические системы описываются дифференциальными уравнениями. В этой работе мы имеем дело только с конечномерными системами: они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями на трехмерных гладких многообразиях.

В работах целого ряда авторов проинтегированы геодезические потоки субримановых метрик на пространствах нильпотентной группы Карно, SL(2), SO(3) и др. Во всех этих случаях геодезические описываются с помощью элементарных функций.

В нашей ситуации, чтобы проинтегрировать систему дифференциальных уравнений геодезических, было необходимо привлечение эллиптических функций, поэтому их качественное поведение оказалось довольно сложным.

Работа содержит следующие результаты:

- построена Гамильтонова структура на группе Ли $SOLV^-$ с левоинвариантной метрикой и с левоинвариантным неголономным распределением;
- найдены уравнения геодезических для заданной субримановой задачи на $SOLV^-$;
- проинтегрированы уравнения геодезических на $SOLV^-$ в эллиптических функциях;
- выявлены четыре случая вырожденности, когда геодезические на $SOLV^-$ выражаются в элементарных функциях;
- смоделированы части сфер на программном пакете MAPLE;
- дано полное описание качественного поведения геодезических на $SOLV^-$;
- построена Гамильтонова структура на группе Ли $SOLV^+$ с левоинвариантной метрикой и с левоинвариантным неголономным распределением;
- найдены уравнения геодезических для заданной субримановой задачи на $SOLV^+$;
- проинтегрированы уравнения геодезических на $SOLV^+$ в эллиптических функциях;

- обнаружено, что геодезические на $SOLV^{+}$ распадаются на два семейства и один вырожденный случай;

- дано полное описание качественного поведения геодезических на $SOLV^{+}$.

На группе $SOLV^{-}$ уравнения геодезических в общем случае выражаются в эллиптических функциях. Исключением являются только четыре частных случая, когда геодезические находятся в элементарных функциях. На второй группе $SOLV^{+}$ также система дифференциальных уравнений геодезических не интегрируема в элементарных функциях, но не имеет вырожденных случаев.

Часть геодезических не покрывается принципом максимума Понтрягина - так называемые абнормальные геодезические и их исследование требует деликатных методов, которые в настоящий момент интенсивно развиваются. В нашем случае их не существует в виду малой размерности.

Полученные сведения вносят весомый вклад в развитие и исследование субримановых задач на группах Ли. Это первый случай, когда геодезические на трёхмерных группах выражаются в специальных функциях, а не в элементарных. Это означает, что полученные геодезические имеют более сложное аналитическое поведение в отличие от ранее полученных результатов. Поэтому можно сделать вывод, что более сложное алгебраическое строение группы Ли влечет более сложное строение геодезических.

В заключении хочется отметить, что в развитие полученных результатов, появляются новые задачи. Например, какие будут уравнения геодезических и каково их поведение, если рассмотреть группы $SOLV^{-}$ и $SOLV^{+}$ с левоинвариантной метрикой, но с правоинвариантным распределением. Существуют ли в этом случае абнормальные геодезические и т.д. Эти задачи планируются рассмотреть в будущем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Brockett R. W. System theory on group manifolds and coset spaces // SIAM J. Control. - 1972. - Vol.10. - P. 265-284.

2 Jurdjevic V., Sussmann H. J. Control systems on Lie groups // J. Diff. Equat. - 1972. – Vol. 12.- P. 313-329.

3 Jurdjevic V., Kupka I. Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces// Ann. Inst. Fourier Grenoble. - 1981. - Vol. 31, № 4. - P.151-179.

4 Jurdjevic V., Kupka I. Control systems, subordinated to a group action Accessibility // J. Differ. Equat.- 1981.- Vol. 39. - P. 186-211.

5 Bonnard B., Jurdjevic V., Kupka I., Sallet G. Transitivity of families of invariant vector fields on the semidirect products of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1982. - Vol. 271, № 2. – P.525-535.

6 Gauthier J. P., Bornard G. Contrôlabilité des systèmes biimeaires // SIAM J. Control Optim. – 1982. – Vol.20, № 3. – P.377-384.

7 Gauthier J. P., Kupka I., Sallet G. Controllability of Right Invariant Systems on Real Simple Lie Groups // Systems & Control Letters. – 1984. – Vol.5. – P.187-190.

8 Assoudi El. R., Gauthier J. P. Controllability of Right Invariant Systems on Real Simple Lie Groups of Type $GF4, G2, C_n$ and B_n // Math. Control Signals Systems. – 1988. – Vol.1. -P. 293-301 .

9 Assoudi El. R., Gauthier J.P. Controllability of right-invanant systems on semi-simple Lie groups // New Trends m Nonlinear Control Theory. - Springer Verlag. – 1989. – Vol. 122. – P. 54-64.

10 Assoudi El.R., Gauthier J. P., Kupka I. On subsemigroups of semisimple Lie groups // Ann. Inst. Henri Poincare. – 1996. – Vol. 13, № 1.- P. 117-133.

11 Lawson L. D. Maximal subsemigioups of Lie groups that are total // Prod. Edinburgh Math. Soc. – 1985. – Vol. 30. -P. 479-501.

12 Jurdjevic V. Geometric control theory. - Cambridge University Press, 1997. - 492 p.

13 Brockett R. W. Control theory and singular Riemannian geometry // In New directions in applied mathematics / in P. Hilton and G. Young editors. – Springer Verlag, 1981. - P. 11-27.

14 Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы и геометрия распределений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы. – М: ВИНИТИ. - 1987. – Т.16. - С. 5-85.

15 Monroy-Perez F., Anzaido-Meneses A. Optimal Control on Nilpotent Lie Groups // J. Dynam Control Systems. -2002. – Vol. 8, № 4.- P. 487-504.

16 Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. – М.: Физматлит, 2005. - 391с.

17 Сачков Ю.Л. Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. – М.: Физматлит, 2007. - 224с..

18 Moiseev I., Sachkov Yu. Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. – 2010. – Vol.16.- P.380-399.

19 Sachkov Yu. Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane // ESAIM: COCV. – 2010. – Vol. 16. - P.1018-1039.

20 Taimanov I.A. Integrable geodesic flows of non-holonomic metrics // J. Dynam. and Control Syst. – 1997. – Vol. 3. - P.129-147.

21 Boscain U., Rossi F. Invariant Carnot-Caratheodory metrics on $S^3, SO(3), SL(2)$ and lens spaces // SIAM J. Control Optim. - 2008.- Vol.47. - P.1851-1878.

22 Calin O., Chang Der-Chen and Markina I. SubRiemannian geometry on the sphere S^3 // Canad. J. Math. – 2009. – Vol. 61. - P.721-739.

23 Der-Chen Chang, Markina I., Vasil'ev A. Sub-Riemannian geodesics on the 3-D sphere // Complex Analysis and Operator Theory. – 2009. – Vol. 3.2. - P.361-377.

24 Agrachev A., Barilari D. Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2012. - Vol. 18, № 3. - P.21-44.

25 Арнольд В.И. Математические методы классической механики. - М: Наука, 1989. - 472 с.

26 Мажитова А.Д. Суб-Риманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли // Вестник КазНУ, серия Математика, механика, информатика. - 2010. - № 2(65). - С. 11-18.

27 Мажитова А.Д. Геодезический поток субримановой метрики на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV$ // Труды международной научно-практической конференции «Математическое и компьютерное моделирование экологических процессов и актуальные проблемы современного образования - Тараз, 2011, октябрь - 20. - С. 279-281.

28 Мажитова А.Д. Субриманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ // Вестник КазНУ, серия Математика, механика, информатика. – 2011. - № 1(68). - С. 17-20.

29 Мажитова А.Д. Геодезический поток метрики Карно-Каратеодори на трехмерной разрешимой группе Ли // Известия НАН РК, серия физико-математическая. 2010, сентябрь-октябрь. - №5(273) - С.29-33.

30 Мажитова А.Д. Уравнения геодезических метрики Карно-Каратеодори на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ // Вестник КазНУ, серия Математика, механика, информатика. – 2011. - № 2(69). - С. 13-17.

31 Мажитова А.Д. Уравнения геодезических субримановой метрики на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ // Тезисы докладов Международной конференции «Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики». - Алматы, 2011, сентябрь 28-30. - С. 256-258.

32 Mazhitova A.D. Sub-Riemannian geodesics on the three-dimensional solvable non-nilpotent Lie group $SOLV^{--}$ // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2012. - Vol. 18, № 3. - P.309-322.

33 Мажитова А.Д. Геодезический поток субримановой метрики на одной трехмерной разрешимой группе Ли // Математические труды. - 2012. – Т.15, № 1. - С.120-128.

34 Mazhitova A. D. Sub-Riemannian problem on the three-dimensional Lie group SOLV$^-$ // Materialy VIII Miedzynarodowej Naukowi-Praktycznej Konferencji, «Strategiczne Pitania Swiatowej Nauki». - Prsemisl; Polska, 2012, lutego 7-15. - P. 3-6.

35 Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 176 с.

36 Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. – М.: МЦНМО, 2005. - 584 с.

37 Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. - М: Наука, 1986.- 320с.

38 Бэйтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье.- М.: Наука, 1967. -343 с.

39 Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Трансцендентные функции. – М.: Физматлит, 1963. – Ч. 2. - 516 с.

40 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. - 1100с.

41 Montgomery R. Abnormal minimizers // SIAM J. Control Optim. -1994. - Vol. 32. - P.1605-1620.

42 Gole C., Karidi R. A note on Carnot geodesics in nilpotent Lie Groups // J. Dynam. and Control Syst. – 1995. – Vol.1. - P.535-549.