ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л.СОБОЛЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Миронов Андрей Евгеньевич

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
чл.-корр. РАН И. А. Тайманов

Новосибирск — 2010

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена построению коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов ранга 2, их разностных аналогов, коммутативных колец дифференциальных операторов нескольких переменных с матричными коэффициентами, связанных с многомерными алгебраическими многообразиями, а также некоторым приложениям теории интегрируемых систем в дифференциальной геометрии и математической физике.

Глава 1 посвящена обыкновенным коммутирующим дифференциальным операторам ранга 2.

Уравнения коммутации двух обыкновенных дифференциальных операторов

$$L_1 = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(x) \frac{d^i}{dx^i}, \quad L_2 = \frac{d^m}{dx^m} + \sum_{i=0}^{m-2} v_i(x) \frac{d^i}{dx^i},$$

представляют собой сложную систему нелинейных уравнений на их коэффициенты. Одни из первых результатов по этим уравнениям были получены в 1920–30-е годы Берчналлом и Чаунди [1]–[3]. В частности, Берчналл и Чаунди доказали следующее утверждение.

- *Если $L_1L_2 = L_2L_1$, то существует ненулевой полином Q от двух коммутирующих переменных такой, что $Q(L_1, L_2) = 0$.*

Например, несложно убедиться, что операторы

$$L_1 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2}, \quad L_2 = \frac{d^3}{dx^3} - \frac{3}{x^2}\frac{d}{dx} + \frac{3}{x^3}$$

коммутируют между собой, при этом они связаны полиномиальным соотношением $L_1^3 = L_2^2$.

Новый интерес к коммутирующим дифференциальным операторам появился в 1960–70-е годы в связи с тем, что было замечено, что некоторые нелинейные уравнения типа уравнения Кортевега–де Фриза эквивалентны условию коммутации специально подобранных операторов. Например, операторы

$$L = \partial_x^2 + u, \quad A = \partial_t - (\partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x)$$

коммутируют в том и только в том случае, когда функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега–де Фриза

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}).$$

Наличие L, A-пары позволяет строить точные решения этих уравнений.

В основе построения операторов L_1 и L_2 лежит спектральная кривая Γ — пополнение кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $Q(z,w) = 0$. Мы будем рассматривать только случай общего положения, когда кривая Γ гладкая. Для каждой точки $P \in \Gamma$ найдется совместная собственная функция $\psi(x,P)$ (функция Бейкера–Ахиезера) операторов L_1 и L_2. Эта функция имеет существенную особенность в некоторой выделенной точке $q \in \Gamma$, а на $\Gamma \backslash \{q\}$ она мероморфна. При этом

$$L_i\psi = \lambda_i(P)\psi, \tag{1}$$

где $\lambda_i(P)$ — некоторая мероморфная функция на Γ с единственным полюсом в точке q. Число l линейно независимых совместных собственных функций, отвечающих общей точке $P \in \Gamma$ называется *рангом* пары L_1, L_2. Порядки операторов L_1 и L_2 делятся на l: $n = n'l, m = m'l$. Порядки полюсов функций λ_1 и λ_2 в точке q равны соответственно n' и m'. В случае ранга 1 ψ можно выразить через тэта-функцию кривой Γ и коэффициенты операторов восстанавливаются по ψ (см. [4]). В случае ранга $l > 1$, как показал Кричевер [5], нахождение ψ сводится к решению интегрального уравнения, точное решение которого получить не удается. На самом деле для нахождения операторов ранга $l>1$ не обязательно знать ψ. Кричевер и Новиков [6] предложили следующий метод (называемый методом деформации параметров Тюрина) нахождения таких операторов.

Пусть $\psi_0(x,P),\dots,\psi_{l-1}(x,P),\ P\in\Gamma$ совместные собственные функции, нормированные следующим образом

$$\frac{d^i}{dx^i}\psi_j(x_0,P)=\delta_{ij}, \tag{2}$$

где x_0 — некоторая фиксированная точка. Обозначим через Ψ матрицу Вронского

$$\Psi=\begin{pmatrix} \psi_0 & \dots & \psi_{l-1} \\ \psi_0' & \dots & \psi_{l-1}' \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_0^{(l-1)} & \dots & \psi_{l-1}^{(l-1)} \end{pmatrix}.$$

Компоненты $\chi_i(x,P)$ матрицы

$$\frac{d\Psi}{dx}\Psi^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \chi_0 & \chi_1 & \chi_2 & \cdots & \chi_{l-1} \end{pmatrix}$$

не зависят от выбора точки x_0. По функциям χ_i из разложения

$$\frac{d^l}{dx^l}\psi_j=\chi_{l-1}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\psi_j+\dots+\chi_0\psi_j$$

и нормировки (2) можно находить производные ψ_j любого порядка в точке x_0. Далее, из (1) можно найти значения коэффициентов операторов L_i в точке x_0. Поскольку функции χ_j не зависят от x_0, получаем значения коэффициентов операторов в любой точке. Таким образом нахождение операторов сводится к нахождению функций χ_j. Новиков и Кричевер [6] нашли χ_j в случае кривой рода 1 и ранга 2. Мохов [7] нашел χ_j в случае $g=1$ и $l=3$. Как указали Новиков и Гриневич спектральная теория периодических операторов ранга $l>1$, связанных с кривой Γ, сводится к спектральной теории операторов ранга 1 после перехода к l-листному накрытию кривой Γ [8], [9].

Необходимо отметить, что к задаче отыскания пар коммутирующих операторов существует и чисто алгебраический подход. Диксмье [10] изучал коммутативные подкольца в некоммутативных кольцах. В частности, такое подкольцо задается коммутирующими операторами рода 1 ранга 2 с полиномиальными коэффициентами

$$L_1 = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)^2 - 2x,$$

$$L_2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)^3 - \frac{3}{2}\left(x\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)x\right),$$

где α — некоторая константа.

Гриневич [11] выделил среди операторов рода 1 ранга 2, найденные Кричевером и Новиковым, те которые имеют рациональные коэффициенты. Моховым [7] получен аналог этого результата для операторов рода 1 ранга 3.

В §1.1 мы рассматриваем спектральную кривую рода 2, при этом выделенная точка q отлична от точки Вейерштрасса. Основной результат этого параграфа заключается в следующем. Пусть $l = 2$ и кривая Γ рода 2 задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = F(z) = z^6 + c_5 z^5 + c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0,$$

где $c_0 \neq 0$. Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, \ \sigma(z, w) = (z, -w),$$

которая имеет 6 неподвижных точек $(z_i, 0)$, где z_i — точки ветвления (корни уравнения $F(z) = 0$). Мы рассматриваем случай, когда

$$\sigma\chi_1 = \chi_1.$$

Тогда функция χ_1 определена на Γ/σ, т.е. можно считать, что χ_1 зависит только от z и не зависит от w. Функцию χ_0 мы представляем в виде

$$\frac{1}{2}(\chi_0 + \sigma\chi_0) + \frac{1}{2}\sqrt{(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2},$$

где $\chi_0 + \sigma\chi_0$ и $(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2$ также определены на $\mathbb{C}$. Таким образом мы сводим задачу нахождения χ_i на Γ к нахождению трех функций χ_1, $\chi_0 + \sigma\chi_0$ и $(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2$ на $\mathbb{C}$. Смена знака у $\sqrt{(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2}$ дает функцию $\sigma\chi_0$. Имеет место

Теорема 1.1 [63] *Компоненты $\chi_0(x,P)$ и $\chi_1(x,P)$ матрицы $\frac{d\Psi}{dx}\Psi^{-1}$ имеют следующий вид*

$$\chi_1(x,P) = -\frac{\gamma_1'(x)}{z-\gamma_1(x)} - \frac{\gamma_2'(x)}{z-\gamma_2(x)} - \frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1(x)} - \frac{\gamma_2'(x)}{\gamma_2(x)},$$

$$\chi_0(x,P) = -\frac{1}{2}\frac{H(x)\gamma_1'(x)}{z-\gamma_1(x)} - \frac{1}{2}\frac{H(x)\gamma_2'(x)}{z-\gamma_2(x)} + \frac{1}{2z} + \frac{\kappa_2(x)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{R(x,z)},$$

$$R(x,z) = \frac{F_1(x)\gamma_1'^2(x)}{(z-\gamma_1(x))^2} + \frac{2G_1(x)\gamma_1'(x)}{z-\gamma_1(x)} + \frac{F_2(x)\gamma_2'^2(x)}{(z-\gamma_2(x))^2}$$

$$+\frac{2G_2(x)\gamma_2'(x)}{z-\gamma_2(x)} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\left(\frac{2(\gamma_1(x)+\gamma_2(x))}{\gamma_1(x)\gamma_2(x)} + \frac{c_1}{c_0}\right) + \frac{\gamma_1^2(x)\gamma_2^2(x)}{c_0}.$$

Все нули функции R имеют первый порядок и расположены в точках ветвления, все полюсы имеют второй порядок (поэтому функция $\sqrt{R}$ корректно определена на Γ). Функции $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ удовлетворяют нелинейному дифференциальному уравнению, которое интегрируемо в квадратурах относительно $\gamma_1(x)$, если положить

$$\gamma_2(x) = \frac{C - B\gamma_1(x)}{B + A\gamma_1(x)},\ \ A, B, C \in \mathbb{C}.$$

В этом случае решение этого уравнения имеет следующий вид

$$\gamma_1^{-1}(y_1) = \int\sqrt{\frac{y_1y_2}{2c_0(y_2-y_1)^3}\left(y_2^2F(y_1) - \frac{y_1^2F(y_2)(B+Ay_1)^4}{(B^2+AC)^2}\right)}dy_1,$$

где

$$y_1 = \gamma_1(x), \quad y_2 = \frac{C - By_1}{B + Ay_1}.$$

Функции $H(x), F_i(x), G_i(x)$ и $\kappa_2(x)$ выражаются через $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ по формулам (1.23), (1.19)–(1.22) и (1.13).

Следствие 1.1 *Оператор, отвечающий функции*

$$\lambda = \frac{1}{2z^3} + \frac{w}{2z^3\sqrt{c_0}} + \frac{c_1}{4z^2c_0} + \frac{1}{z}\left(\frac{c_2}{4c_0} - \frac{c_1^2}{16c_0^2}\right)$$

имеет следующий вид

$$L = \frac{d^6}{dx^6} + f_4\frac{d^4}{dx^4} + f_3\frac{d^3}{dx^3} + f_2\frac{d^2}{dx^2} + f_1\frac{d}{dx} + f_0,$$

где

$$f_4 = \alpha - 3a_0,\ \ f_3 = -6a_0' - 3b_1,$$

$$f_2 = \beta - 7a_0'' - 6b_1' - 3a_1 - 2\alpha a_0 + 3a_0^2,$$

$$f_1 = -2\alpha b_1 + 3a_0b_1 - 3b_2 - 2\alpha a_0' + 6a_0a_0' - 6a_1' - 7b_1'' - 4a_0''',$$

$$f_0 = \gamma - \beta a_0 + \alpha a_0^2 - a_0^3 - 2\alpha a_1 + 3a_0a_1 + 2(a_0')^2$$

$$-2\alpha b_1' - 6b_2' - \alpha a_0'' + 3a_0a_0'' - 7a_1'' - 4b_1''' - a_0^{IV}.$$

Функции $a_0(x), a_1(x), b_1(x)$ *и* $b_2(x)$ *находятся из разложений* χ_0 *и* χ_1 *в ряд по степеням* z

$$\chi_0 = \frac{1}{z} + a_0 + a_1z + O(z^2),\ \ \chi_1 = b_1z + b_2z^2 + O(z^3),$$

$$a_0(x) = \frac{H(x)\gamma_1'(x)}{2\gamma_1(x)} + \frac{H(x)\gamma_2'(x)}{2\gamma_2(x)} + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\gamma_1(x)+\gamma_2(x)}{2\gamma_1(x)\gamma_2(x)} + \frac{c_1}{4c_0},$$

$$a_1(x) = \frac{H(x)\gamma_1'(x)}{2\gamma_1^2(x)} + \frac{H(x)\gamma_2'(x)}{2\gamma_2^2(x)} + \frac{F_1(x)\gamma_1'^2(x)}{4\gamma_1^2(x)} - \frac{G_1(x)\gamma_1'(x)}{2\gamma_1(x)} + \frac{F_2(x)\gamma_2'^2(x)}{4\gamma_2^2(x)}$$

$$-\frac{G_2(x)\gamma_2'(x)}{2\gamma_2(x)} + \frac{\gamma_1^2(x)\gamma_2^2(x)}{4c_0} - \frac{1}{16}\left(\frac{2(\gamma_1(x)+\gamma_2(x))}{\gamma_1(x)\gamma_2(x)} + \frac{c_1}{c_0}\right)^2,$$

$$b_1(x) = \frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1^2(x)} + \frac{\gamma_2'(x)}{\gamma_2^2(x)},\ \ b_2(x) = \frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1^3(x)} + \frac{\gamma_2'(x)}{\gamma_2^3(x)},$$

α, β *и* γ *— коэффициенты разложения* λ *в ряд*

$$\lambda = \frac{1}{z^3} + \frac{\alpha}{z^2} + \frac{\beta}{z} + \gamma + O(z),$$

$$\alpha=\frac{c_1}{2c_0},\ \beta=\frac{c_2}{2c_0}-\frac{c_1^2}{8c_0^2},\ \gamma=\frac{c_1^3}{32c_0^3}-\frac{c_1c_2}{8c_0^2}+\frac{c_3}{4c_0}.$$

Операторы, коммутирующие с L, легко находятся из уравнений коммутации.

Ниже мы приведем примеры операторов с полиномиальными коэффициентами.

Эту конструкцию можно обобщить на гиперэллиптические спектральные кривые рода 3 и 4 [64] (см. §1.1.2), причем среди операторов, отвечающих спектральным кривым рода 4 можно выделить операторы с полиномиальными коэффициентами. Примеры таких операторов мы также приведем в §1.1.2.

В §1.2 построены некоторые обыкновенные формально самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2, причем выделенная точка q совпадает с точкой Вейерштрасса.

Основной результат этого параграфа заключается в следующем. Пусть $l=2$ и кривая Γ рода 2 является гладким пополнением бесконечно удаленной точкой ∞ кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2=F(z)=z^5+c_3z^3+c_2z^2+c_1z+c_0.$$

Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma:\Gamma\to\Gamma,\ \sigma(z,w)=(z,-w),$$

которая имеет 6 неподвижных точек $q=\infty$, $(z_i,0)$, где z_i — точки ветвления (корни уравнения $F(z)=0$).

Мы рассматриваем случай, когда

$$\sigma\chi_1=\chi_1.$$

Справедлива

Теорема 1.2 [65] *Имеют место равенства*

$$\chi_1=-\frac{\gamma'}{z-\gamma}-\frac{\gamma'}{z-(\gamma+c)},$$

$$\chi_0 = -\frac{1}{2}\frac{H_1\gamma'}{z-\gamma} - \frac{1}{2}\frac{H_2\gamma'}{z-(\gamma+c)} + \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2}\frac{w}{(z-\gamma)(z-(\gamma+c))},$$

где

$$\kappa = \frac{F(\gamma) - 4\gamma'^4 + 8c\gamma'^2\gamma'' - c^2\gamma''^2 + 2c^2\gamma'\gamma'''}{2c^2\gamma'^2},$$

$$\gamma^{-1}(y) = \int \left(\frac{4}{3P(y)}\right)^{\frac{1}{4}} dy,$$

$$P = y^5 + \frac{5}{2}cy^4 + \frac{1}{3}(10c^2+3c_3)y^3 + \frac{1}{2}(5c_3+2c_2+3cc_3)y^2 + (c^4+c_1+cc_2+c^2c_3)y + \delta,$$

$y = \gamma(x), \delta, c \in \mathbb{C}$. *Функции* $H_i(x)$ *выражаются через* $\gamma(x)$ *по формулам (1.27)–(1.29).*

Следствие 1.2 *Оператор, отвечающий функции* z *имеет вид*

$$L = L^* = \partial_x^4 - \kappa\partial_x^2 - \kappa'\partial_x + \frac{\kappa^2}{4} - \frac{\kappa''}{2} - \gamma - \frac{c}{2}.$$

Укажем пример. Пусть кривая Γ задается уравнением

$$w^2 = z^5 - \frac{10}{3}z^3 + \frac{7}{3}z$$

и пусть

$$c = 2, \quad \delta = 1, \quad \gamma = \frac{1024}{x^4} - 1.$$

Тогда L имеет вид

$$\partial_x^4 + \left(\frac{x^6}{49152} - \frac{425}{6x^2}\right)\partial_x^2 + \left(\frac{x^5}{8192} + \frac{425}{3x^3}\right)\partial_x + \frac{x^{12}}{9663676416} - \frac{245x^4}{589824} + \frac{2569}{144x^4}.$$

Оператор десятого порядка, отвечающий функции w, мы здесь не приводим из-за его громоздкости.

В главе 2 найдены дискретные коммутирующие операторы Кричевера–Новикова с полиномиальными коэффициентами, т.е. коммутирующие разностные операторы ранга 2, отвечающие спектральной кривой рода 1, коэффициенты которых являются полиномами от дискретной переменной n. Результаты этой главы опубликованы в [66]–[67].

В теориях коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов и коммутирующих разностных операторов существует много общего. Как и в случае дифференциальных операторов, для коммутирующих разностных операторов

$$L_1 = \sum_{N_-}^{N_+} u_i(n)T^i, \quad L_2 = \sum_{M_-}^{M_+} v_i(n)T^i,$$

где $n \in \mathbb{Z}$ — дискретная переменная, T — оператор сдвига по дискретной переменной

$$Tf(n) = f(n+1),$$

существует спектральная кривая Γ, заданная в $\mathbb{C}^2$ некоторым полиномом $Q(\lambda, \mu)$, которая параметризует их совместные собственные функции и собственные значения

$$L_1\psi(n, P) = \lambda\psi(n, P), \quad L_2\psi(n, P) = \mu\psi(n, P), \quad P = (\lambda, \mu) \in \Gamma.$$

Точно также как и в гладком случае определяется *ранг* операторов L_1 и L_2, как размерность пространства совместных собственных функций в точке $P \in \Gamma$ общего положения. Одним из основных отличий дискретного случая от гладкого заключается в следующем. Любое коммутативное кольцо обыкновенных дифференциальных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на алгебраической кривой с единственным полюсом в выделенной точке $q \in \Gamma$, а любое коммутативное кольцо разностных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на алгебраической кривой с m полюсами, где m может быть любым натуральным числом [12]. Такие операторы называются m-точечными.

Мамфордом [13] и Кричевером [14] найдены спектральные данные, отвечающие двухточечным операторам ранга 1.

Мы будем рассматривать только одноточечные операторы. При $l > 1$ нахождение функции $\psi(n, P)$ сводится к решению задачи Римана и найти ее в явном виде не удается. Метод деформации параметров Тюрина работает также и в дискретном случае: Кричевером и Новиковым [12] показано, что коэффициенты операторов можно восстановить из решений уравнений на параметры Тюрина голоморфных стабильных расслоений, которые однозначно задаются функцией $\psi(n, P)$, при этом коэффициенты операторов зависят от произвольных l функциональных параметров. А именно, ими показано, что для восстановления коэффициентов операторов достаточно найти матричную функцию

$$\chi(n, P) = \Psi(n+1, P)\Psi^{-1}(n, P),$$

где $\Psi(n, P)$ — матрица Вронского, построенная по некоторому базису в пространстве совместных собственных функций. Используя этот метод Кричевер и Новиков нашли операторы ранга 2, отвечающие эллиптической кривой. При этом коэффициенты операторов выражены через ζ и $\wp$-функции Вейерштрасса от двух функциональных параметров.

Мы укажем спектральные данные для операторов ранга 2, отвечающие эллиптической кривой, коэффициенты которых выражаются через элементарные функции от функциональных параметров. В частности, мы укажем операторы, которые как и операторы Диксмье имеют полиномиальные коэффициенты.

Можно считать, что аффинная часть спектральной кривой Γ задана в $\mathbb{C}^2$ с координатами (z, w) уравнением

$$w^2 = F(z) = z^4 + c_2 z^2 + c_1 z + 1.$$

В качестве выделенной точки возьмем точку $q = (0, 1) \in \Gamma$ (кольцо коммутирующих разностных операторов изоморфно кольцу мероморфных функций на Γ с полюсом в q) . Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, \ \ \sigma(z, w) = (z, -w).$$

При $l = 2$ матрица $\chi(n, P)$ имеет вид

$$\chi(n, P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_1(n, P) & \chi_2(n, P) \end{pmatrix}, \quad P = (z, w) \in \Gamma.$$

Предположим, что

$$\chi_1(n, P) = \chi_1(n, \sigma(P)),$$

тогда имеет место

Теорема 2.1 *Функции* $\chi_1(x,P)$ *и* $\chi_2(x,P)$ *имеют вид*

$$\chi_1(n,P) = \frac{c(n)}{z-\gamma(n)} + \frac{c(n)}{\gamma(n)-\gamma(n+1)},$$

$$\chi_2(n,P) = \frac{1}{2z} + \frac{a(n)}{2(z-\gamma(n))} + \frac{w\gamma(n)}{2z(\gamma(n)-z)} + d(n),$$

где

$$c(n) = \frac{\gamma(n-1)(a^2(n)-F(\gamma(n))}{4\gamma(n)(\gamma(n)-\gamma(n-1))},$$

$$d(n) = \frac{(a(n+1)-1)\gamma(n)+(a(n)+1)\gamma(n+1)}{2(\gamma(n)-\gamma(n+1))\gamma(n+1)},$$

$\gamma(n), a(n)$ *— произвольные функции дискретной переменной* $n \in \mathbb{Z}$.

Функция $\lambda_1(z)$ на кривой Γ, имеющая единственный полюс второго порядка в точке q, выглядит следующим образом

$$\lambda_1 = \frac{1}{2z^2} + \frac{c_1}{4z} + \frac{w}{2z^2}.$$

Обозначим через $b_i(n), e_i(n)$ и p_i коэффициенты разложений функций χ_1, χ_2 и λ_1 в ряд в окрестности q:

$$\chi_1(n,z) = b_0(n) + b_1(n)z + \ldots, \quad \chi_2(n,z) = \frac{1}{z} + e_0(n) + e_1(n)z + \ldots,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{z^2} + \frac{p_1}{z} + p_0 + \ldots, \quad p_0 = -\frac{c_1^2}{16} + \frac{c_2}{4}, \quad p_1 = \frac{c_1}{2}.$$

Коэффициенты $b_i, e_i,\ i=0,1$ выражаются через $\gamma(n), a(n)$ по формулам (2.5)–(2.8).

Следствие 2.1 *Оператор* $L(\lambda_1)$ *имеет следующий вид*

$$L(\lambda_1) = T^2 + u_1(n)T + u_0(n) + u_{-1}(n)T^{-1} + u_{-2}(n)T^{-2},$$

где

$$u_1(n) = p_1 - e_0(n) - e_0(n+1),$$

$$u_0(n) = p_0 - b_0(n) - b_0(n+1) - p_1 e_0(n) + e_0^2(n) - e_1(n) - e_1(n+1),$$

$$u_{-1}(n) = -b_1(n) + b_0(n)\left(-p_1 - \frac{b_1(n-1)}{b_0(n-1)} + e_0(n-1) + e_0(n)\right),$$
$$u_{-2}(n) = b_0(n)b_0(n-1).$$

Основным результатом этой главы является

Теорема 2.2 *Если функциональные параметры $a(n), \gamma(n)$ положить равными*

$$a(n) = n+1,\ \ \gamma(n) = n,$$

то операторы имеют полиномиальные по n коэффициенты. При этом

$$L_2 = T^2 + 2(n+2)T - \left(\frac{n^4}{2} + n^3 - \frac{1}{2}(1-c_2)n^2 - \frac{1}{2}(8-c_1-c_2)n\right) -$$
$$-\frac{1}{2}(n^3 + (c_2-1)n + c_1 - 2)(n^2+n-1)T^{-1} +$$
$$\frac{1}{16}(n^3+(c_2-1)n+c_1-2)(n^3-3n^2+(2+c_2)n+c_1-c_2-2)(n+1)(n-2)T^{-2}.$$

Глава 3 посвящена построению коммутативных колец дифференциальных операторов нескольких переменных с матричными коэффициентами, чьи совместные собственные вектор-функции и собственные числа параметризуются точками спектрального многообразия Y^k, которое является пересечением гладких гиперповерхностей $Y_{a_1} \cap \cdots \cap Y_{a_k}$ в главно поляризованном абелевом многообразии X^g размерности $g, k < g-1$. Гиперповерхность Y_{a_j} является сдвигом на элемент $a_j \in X^g$ тэта-дивизора $Y \subset X^g$. Через Q^j обозначим многообразие $Y^j \cap Y$. Далее будем предполагать, что многообразие Y^j трансверсально пересекается с $Y_{a_{j+s}}$ и с $Y, j+s \leq k$, пусть Y^j и Q^j являются гладкими неприводимыми и пусть также набор $a_1, \ldots, a_k$ находится в общем положении (т.е. принадлежит некоторому открытому всюду плотному множеству в $X^g \times \cdots \times X^g$).

Имеет место

Теорема 3.1 [68] *Существует вложение L_k кольца мероморфных функций на многообразии Y^k с полюсом на Q^k в кольцо $g! \times g!$-матричных* *дифференциальных операторов по $g-k$ переменным с аналитическими в окрестности 0 коэффициентами*

$$L_k : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Mat}(g!, g-k).$$

Образом вложения является коммутативное кольцо $(g-k)$-мерных матричных дифференциальных операторов.

Теорема 3.1 непосредственно вытекает из свободности модуля Бейкера–Ахиезера на многообразии Y^k (теорема 3.2).

Теорему 3.1 мы докажем, используя результаты Накаяшики [15] (см. также [16]), который построил вложение кольца мероморфных функций на X^g с полюсом на Y в кольцо g-мерных $g! \times g!$-матричных дифференциальных операторов. Двумерные 2×2-матричные такие операторы (операторы Накаяшики) изучались в работах автора [17] и [18].

В частном случае, когда $g = 3$, $r = 1$, а в качестве спектральной поверхности служит тэта-дивизор, теорема 3.1 была доказана Накаяшики [15].

Ротштейн в [19] построил другой пример коммутирующих матричных дифференциальных операторов. В этом примере $g = 5, r = 1$, размерность матриц $N = 5$, а в качестве спектральной поверхности служит поверхность Фано.

С коммутативными кольцами из теоремы 3.1 связан аналог иерархии уравнений Кадомцева–Петвиашвили

$$[\partial_{t_\alpha} - L_\alpha, \partial_{t_\beta} - L_\beta] = 0,$$

где L_α и L_β — $g! \times g!$-матричные дифференциальные операторы по $g-k$ переменным, коэффициенты которых зависят от t_α и t_β, α и β принадлежат счетному множеству индексов.

Глава 4 посвящена построению n-ортогональных криволинейных систем координат в $\mathbb{R}^n$ и фробениусовых многообразий, отвечающих сингулярным спектральным кривым. Результаты этой главы получены совместно с И.А. Таймановым и опубликованы в [69],[70].

Построение n-ортогональных систем координат в $\mathbb{R}^n$ является классической задачей дифференциальной геометрии. В наше время интерес к этой задаче обусловлен тем, что она тесно связана с задачами теории систем гидродинамического типа и топологической теории поля (Дубровин, Новиков, Царев, Кричевер, см. ссылки в [20, 21]).

К задаче явного построения плоских криволинейных n-ортогональных систем координат применимы методы интегрируемых систем: Захаров [21] применил метод одевания, а Кричевер [20] получил конечнозонный аналог этого метода. Причем в конструкции Кричевера предполагается, что спектральная кривая является гладкой. Это влечет то, что координатные функции выражаются через тэта-функцию спектральной кривой и, следовательно, классические системы координат таким способом не могут быть получены.

В случае, когда спектральная кривая является приводимой, а каждая неприводимая компонента изоморфна $\mathbb{C}P^1$, мы показываем, что нахождение ортогональных криволинейных систем координат сводится к решению систем линейных уравнений. Мы также показываем как в эту схему вкладываются классические системы координат, такие как полярные координаты на плоскости, цилиндрические координаты в трехмерном пространстве и сферические координаты в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 3$.

Справедлива

Теорема 4.1 *Теорема Кричевера (см. §4.1.1) останется справедливой для сингулярной алгебраической кривой, если в формулировке заменить род спектральной гривой g на $p_a(\Gamma)$, т.е. на арифметический род Γ и предположение о гладкости кривой Γ/σ заменить на условие, что $P_1, \dots, P_n$ и полюсы Ω являются несингулярными точками.*

В §4.2 мы находим, используя схему Кричевера [20], решения уравнений ассоциативности двумерной топологической теории поля с однородными корреляторами, отвечающие сингулярным спектральным кривым, и расширяем эти решения до фробениусовых многообразий.

Если применить схему Кричевера для гладкой спектральной Кривой, то решения уравнений ассоциативности выражаются через тэта-функцию спектральной кривой и достаточно очевидно, что корреляторы не могут быть квазиоднородными.

Мы используем подход, развитый в §4.1 и применяем схему Кричевера для приводимых рациональных кривых. В этом случае нами найдены достаточные условия для того, чтобы корреляторы были однородными функциями.

В теореме 4.2 указаны некоторые достаточные условия, при которых спектральные данные отвечают метрикам Дарбу–Егорова, по которым строятся решения уравнений ассоциативности с однородными корреляторами $c_{\lambda_\beta \gamma}$. С помощью леммы 4.3 мы расширяем полученные решения до фробениусовых многообразий. В этом параграфе мы также указываем конкретные примеры приводимых спектральных кривых, отвечающих фробениусовым многообразиям.

Глава 5 посвящена некоторым приложениям интегрируемых систем в теории минимальных и гамильтоново минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$.

Многие задачи дифференциальной геометрии, такие как построение поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны в $\mathbb{R}^3$, построение торов постоянной средней кривизны в $\mathbb{R}^3$, сводятся к нахождению решений солитонных уравнений, которые эквивалентны условию коммутации матричных дифференциальных операторов (уравнения Захарова–Шабата)

$$[\partial_x - A, \partial_y - B] = 0,$$

где A, B — матричные функции. В частности, к этому классу задач относятся и некоторые задачи построения минимальных и гамильтоново–минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$.

В §5.1 мы укажем новый метод построения гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых погружений некоторых многообразий в $\mathbb{C}^n$ и в $\mathbb{C}P^n$, а также получим некоторые результаты, которые будем использовать в дальнейшем. В частности, с помощью этого метода можно построить погружения таких многообразий как обобщенная бутылка Клейна $\mathcal{K}^n$, многомерный тор, $\mathcal{K}^{n-1} \times S^1$, $S^{n-1} \times S^1$ и др. В некоторых случаях эти погружения являются вложениями. Например, вложить можно следующие многообразия: $\mathcal{K}^{2n+1}$, $S^{2n+1} \times S^1$, $\mathcal{K}^{2n+1} \times S^1$, $S^{2n+1} \times S^1 \times S^1$.

Погружение $\psi : L \to P$ n-мерного многообразия L в симплектическое $2n$-мерное многообразие P с симплектической формой ω называется лагранжевым, если $\psi^*(\omega) = 0$.

В дальнейшем в качестве симплектического многообразия P будем рассматривать кэлерово многообразие с симплектической формой $\omega = -\mathrm{Im} ds^2$, где ds^2 — эрмитова метрика на P.

Лагранжево погружение ψ называется *гамильтоново-минимальным (H-минимальным)*, если вариации объема $\psi(L)$ вдоль всех гамильтоновых полей с компактным носителем равны 0

$$\frac{d}{dt}\mathrm{vol}(\psi_t(L))|_{t=0} = 0,$$

где $\psi_0(L) = \psi(L), \psi_t(L)$ — деформация $\psi(L)$ вдоль гамильтонова поля W, т.е. такого поля, что 1-форма $\omega_W(\psi^*(\xi)) = \psi^*\omega(W, \xi)$ является точной на L, $\mathrm{vol}(\psi_t(L))$ — объем деформированной части $\psi_t(L)$.

Примером гамильтоновых деформаций могут служить деформации единичной окружности на единичной сфере S^2, при которых S^2 разбивается в каждый момент времени на две части одинаковой площади. Напомним, что погружение называется минимальным, если вариации объема $\psi(L)$ вдоль всех полей равны нулю.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерное подмногообразие, заданное системой уравнений второго порядка

$$e_{1j}u_1^2 + \cdots + e_{nj}u_n^2 = d_j, \ j = 1, \ldots, n-k, \tag{3}$$

где $d_j \in \mathbb{R}, e_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Так как $\mathrm{dim} M = k$, то можно считать, что уравнения (3) линейно независимы и целочисленные векторы

$$e_j = (e_{j1}, \ldots, e_{j(n-k)}) \in \mathbb{Z}^{n-k}, \ j = 1, \ldots, n$$

задают решетку Λ в $\mathbb{R}^{n-k}$ максимального ранга. Обозначим через Λ^* двойственную решетку к Λ, т.е.

$$\Lambda^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R}^{n-k} | (\lambda^*, \lambda) \in \mathbb{Z}, \lambda \in \Lambda\}.$$

Обозначим через Γ следующую фактор-группу

$$\Gamma = \Lambda^*/2\Lambda^*.$$

Имеет место очевидный изоморфизм

$$\Gamma = \mathbb{Z}_2^{n-k}.$$

Через T^{n-k} обозначим $(n-k)$-мерный тор

$$T^{n-k} = \left\{\left(e^{\pi i(e_1,y)}, \dots, e^{\pi i(e_n,y)}\right)\right\} \subset \mathbb{C}^n,$$

где

$$y = (y_1, \dots, y_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k},$$

$$(e_j, y) = e_{j1}y_1 + \dots + e_{j(n-k)}y_{n-k}.$$

Определим действие группы Γ на многообразии $M \times T^{n-k}$. Для $\gamma \in \Gamma$ положим

$$\gamma(u_1, \dots, u_n, y) = (u_1 \cos\pi(e_1,\gamma), \dots, u_n \cos\pi(e_n,\gamma), y+\gamma).$$

Отметим, что $\cos\pi(e_j,\gamma) = \pm 1$. Введем отображение

$$\varphi : M \times T^{n-k} \to \mathbb{C}^n,$$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n, y) = (u_1 e^{\pi i(e_1,y)}, \dots, u_n e^{\pi i(e_n,y)}).$$

Обозначим посредством e вектор

$$e = e_1 + \dots + e_n.$$

Мы полагаем, что на $\mathbb{C}^n$ задана евклидова метрика и симплектическая форма

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n.$$

Справедлива

Теорема 5.1 [71],[72] *Группа* Γ *действует на* $M \times T^{n-k}$ *свободно. Отображение* φ *задает погружение*

$$\psi_1 : M_1 = M \times T^{n-k}/\Gamma \to \mathbb{C}^n.$$

Погружение ψ_1 является H-минимальным лагранжевым. Если $e = 0$, то ψ_1 — минимальное лагранжево погружение.

Как нам указал Д. Джойс минимальные (но не гамильтоново-минимальные) подмногообразия из этой теоремы могут быть получены методом перпендикулярной симметрии, развитым в [22], но в [22] фактически не указано какие подмногообразия можно получать методом перпендикулярной симметрии.

Ниже мы покажем, что ψ_1 является взаимно однозначным отображением между открытыми всюду плотными подмножествами в M_1 и $\psi_1(M_1)$, которые определяются неравенствами $u_j \neq 0, j = 1, \dots, n$. Таким образом самопересечения у $\psi_1(M_1)$ могут возникать только в тех точках, у которых $u_j = 0$ для некоторого j.

Для того, чтобы M_1 было замкнутым достаточно, например, потребовать чтобы одно из уравнений (3) задавало эллипсоид.

Понятие H-минимальности ввел О [23]. Он же доказал, что тор

$$S^1(r_1) \times \dots \times S^1(r_n) \subset \mathbb{C}^n,$$

где $S^1(r_j)$ — окружность радиуса r_j, является H-минимальным лагранжевым подмногообразием в $\mathbb{C}^n$. Другие примеры H-минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}^2$ построили Кастро и Урбано [24] и Хела и Ромон [25]. В работе [26] Хела и Ромон построили погруженную (с самопересечением) H-минимальную лагранжеву бутылку Клейна в $\mathbb{C}^2$. Как показал Немировский [27] в $\mathbb{C}^2$ не существует вложенных лагранжевых бутылок Клейна. Этим исчерпываются известные ранее примеры H-минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$.

Отметим, что пример О также вытекает из того факта, что окружность $S^1(r)$ в $\mathbb{C}$ является H-минимальной и из следующей леммы.

Лемма 5.1 *Пусть $P = P_1 \times P_2$ и $\omega = \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$, где (P_i, ω_i) — кэлерово многообразие, $\pi_i : P \to P_i$ — проекция, $i = 1, 2$. Пусть $L_i \subset P_i$ — H-минимальное лагранжево подмногообразие, $i = 1, 2$. Тогда подмногообразие $L = L_1 \times L_2 \subset P$ является H-минимальным лагранжевым подмногообразием.*

Рассмотрим случай, когда M является конусом, т.е. $d_j = 0$ в уравнениях (3). Тогда этому конусу отвечает погружение ψ_2 в комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ $(n-1)$-мерного многообразия M_2, которое получается факторизацией многообразия

$$(M - \{0\}) \times T^{n-k}/\Gamma$$

по действию $\mathbb{R}^*$

$$\psi_2(u_1, \dots, u_n, y) = (u_1 e^{\pi i(e_1, y)} : \dots : u_n e^{\pi i(e_n, y)}).$$

Мы полагаем, что на $\mathbb{C}P^{n-1}$ задана метрика Фубини–Штуди и в качестве симплектической формы берется кэлерова форма Ω этой метрики.

Имеет место

Теорема 5.2 [71],[72] *Погружение ψ_2 является H-минимальным лагранжевым погружением.*

Если $e = 0$, то ψ_2 является минимальным лагранжевым погружением.

Очевидным образом строятся примеры замкнутых многообразий M_2. Для этого достаточно, например, чтобы в одном из уравнений (3) все коэффициенты кроме одного были положительные.

Хела и Ромон [28] установили соответствие между H-минимальными лагранжевыми конусами в $\mathbb{C}^3$ и H-минимальными лагранжевыми поверхностями в $\mathbb{C}P^2$, но конкретных примеров таких поверхностей в [28] предложено не было. Кастро и Урбано [29] построили примеры лагранжевых минимальных торов в $\mathbb{C}P^2$.

Из леммы 5.1 следует, что используя примеры H-минимальных лагранжевых погружений в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ можно строить H-минимальные лагранжевы погружения в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{n_k}$.

В §5.2 получены уравнения для гамильтоново–минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ (Лемма 5.5) и указаны их частные решения в случае торов. Имеет место

Теорема 5.3 [73] *Отображение $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$, заданное формулой*

$$\psi(x, y) = (F_1(x) e^{i(G_1(x) + \alpha_1 y)} : F_2(x) e^{i(G_2(x) + \alpha_2 y)} : F_3(x) e^{i(G_3(x) + \alpha_3 y)}),$$

является конформным лагранжевым H-минимальным погружением плоскости, где

$$F_i = \sqrt{\frac{e^{2v(x)} + \alpha_{i+1}\alpha_{i+2}}{(\alpha_i - \alpha_{i+1})(\alpha_i - \alpha_{i+2})}}, \; G_i = \frac{\alpha_i}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{2c_2 - ae^{2v(z)}}{\alpha_i e^{2v(z)} - c_1} dz,$$

$$e^{2v(x)} = a_1\left(1 - \frac{a_1 - a_2}{a_1}\mathrm{sn}^2\left(x\sqrt{a_1 + a_3}, \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_3}\right)\right)$$

(индекс i рассматривается по модулю 3), $a_1 > a_2 > 0, \alpha_i$ — вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам (5.19), (5.20), константы c_1, c_2, a, a_3 выражаются через a_i, α_i по формулам (5.14), (5.16) и из уравнения (5.17), sn *— эллиптическая функция Якоби.*

Если при этом $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$ и

$$\lambda_1 = G_1(T) - G_3(T) + (\alpha_1 - \alpha_3)\tau \in 2\pi\mathbb{Q},$$

$$\lambda_2 = G_2(T) - G_3(T) + (\alpha_2 - \alpha_3)\tau \in 2\pi\mathbb{Q},$$

где T — период функции $e^{2v(x)}$ (см. (5.18)),$\tau \in \mathbb{R}$, то ψ — двояко периодическое отображение с периодами $e_1 = (0,1)$ и $e_2 = N(T,\tau)$, N — некоторое натуральное число.

Отметим, что λ_1 и λ_2 зависят от свободных параметров a_1, a_2, τ и поэтому $\lambda_1, \lambda_2 \in 2\pi\mathbb{Q}$ для плотного множества троек (a_1, a_2, τ) из некоторой области.

Кастро и Урбано [29] построили минимальные лагранжевы торы в $\mathbb{C}P^2$, которые являются частными случаями торов из теоремы 5.3 при $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ и $(a_1 + a_2)(c_1^2 + c_2^2) - a_1^2 a_2^2 = 0$.

В §5.3 мы покажем, что иерархия Веселова–Новикова [30] задает интегрируемые деформации конечнозонных минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$. Пусть S^5 — единичная сфера в $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{H} : S^5 \to \mathbb{C}P^2$ — расслоение Хопфа. Будем задавать конформное лагранжево погружение $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}P^2$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ как композицию $r : \Omega \to S^5$ и $\mathcal{H}$.

Имеет место лемма

Лемма 5.6 *Компоненты r_j вектор–функции r удовлетворяют уравнению Шредингера*

$$Lr_j = \partial_x^2 r_j + \partial_y^2 r_j + i(\beta_x \partial_x r_j + \beta_y \partial_y r_j) + 4e^v r_j = 0,$$

где $2e^v(dx^2+dy^2)$ *— индуцированная метрика на поверхности* $\varphi(\Omega)$*, а* $\beta(x,y)$ *— лагранжев угол, определяемый равенством*

$$e^{i\beta} = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3(\sigma),$$

z_1, z_2, z_3 *— координаты в* $\mathbb{C}^3$*,* x, y *— координаты в* Ω*,* σ *— репер образованный векторами* $r, \frac{r_x}{|r_x|}, \frac{r_y}{|r_y|}$*.*

Лемма 5.6 позволяет ввести следующее определение.

Лагранжев тор, заданный двояко периодическим конформным отображением

$$\varphi = \mathcal{H} \circ r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2,$$

называется конечнозонным, если отвечающий ему оператор Шредингера L *с периодическими коэффициентами, является конечнозонным на нулевом уровне энергии, т.е. если блоховские функции (совместные собственные функции* L *и операторов трансляций — операторов сдвига на периоды) оператора* L *на нулевом уровне энергии параметризуются римановой поверхностью* Γ *конечного рода. Риманова поверхность* Γ *называется спектром лагранжева тора, а ее род — спектральным родом тора.*

Так как отображение φ двояко периодическое, то компоненты вектор-функции r являются блоховскими функциями оператора L.

Конечнозонные операторы Шредингера по отношению к одному уровню энергии введены Дубровиным, Кричевером и Новиковым [31]. В [31] также указаны данные обратной задачи, по которым восстанавливаются потенциал и магнитное поле и приведены явные формулы.

У минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ лагранжев угол постоянен (см. §5.1), следовательно, им отвечают потенциальные операторы Шредингера

$$L = \partial_x^2 + \partial_y^2 + 4e^v.$$

В этом случае лемма 5.6 является аналогом известного утверждения, что компоненты вектор–функции, задающей конформное минимальное погружение плоской области в трехмерное евклидово пространство, являются гармоническими функциями.

Тор Клиффорда в $\mathbb{C}P^2$ имеет спектральный род 0. Кастро и Урбано [24] и Джойс [22] построили примеры минимальных лагранжевых торов спектральных родов 2 и 4. Отметим, что спектральный род конечнозонного минимального лагранжевого тора является четным, поскольку спектральная кривая конечнозонного потенциального оператора Шредингера обладает голоморфной инволюцией [30].

Шарипов [32] доказал, что метрика минимального тора в S^5 удовлетворяет уравнению Цицейки. Им также построены конечнозонные решения этого уравнения. На самом деле, как уже отмечалось в [33], конструкция Шарипова пригодна для построения всех минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$. Для этого нужно применить к отображению из $\mathbb{R}^2$ в S^5, построенному Шариповым, отображение Хопфа.

Из работы [32] остается неясность по поводу существования минимальных лагранжевых торов произвольных спектральных родов, поскольку в ней не обсуждалась проблема периодичности построенных отображений. Этот пробел восполняет работа Кэрбери и Макинтоша [34], в которой доказано, что для каждого спектрального рода g существует $(\frac{g}{2}-2)$-мерное семейство минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$.

Методами работы [35] можно показать, что все минимальные гладко погруженные лагранжевы торы являются конечнозонными. Действительно, метрика минимального лагранжева тора удовлетворяет уравнению Цицейки

$$\partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 4e^{-2v} - 4e^{v}.$$

Михайлов [36] доказал, что уравнение Цицейки интегрируемо. Отсюда можно показать, что все его гладкие вещественные двояко периодические решения являются конечнозонными. Конечнозонные решения характеризуются тем, что они стационарны относительно некоторого высшего потока [37]. В нашем случае это вытекает из того, что функция $\partial_{t_i} v$, где t_i — высшее время, удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + 8e^{-2v} + 4e^{v})\partial_{t_i} v = 0$$

на торе $\mathbb{R}^2/\Lambda$, где Λ — решетка периодов. Так как спектр эллиптического оператора на торе дискретен, то функции $\partial_{t_i} v$ линейно зависимы и существует высшее время, относительно которого v стационарно.

Основной результат этого параграфа заключается в следующем. Пусть отображение

$$r : \mathbb{R}^2 \to S^5$$

задает конечнозонный минимальный лагранжев тор $T \subset \mathbb{C}P^2$ спектрального рода $g > 4$. Тогда справедлива

Теорема 5.4 [74] *Существует отображение* $\widetilde{r}(t), t = (t'_1, t''_1, t'_2, t''_2 \dots), \widetilde{r}(0) = r$, *задающее деформации тора* T *в классе минимальных лагранжевых торов в* $\mathbb{C}P^2$. *Отображение* $\widetilde{r}$ *удовлетворяет уравнениям*

$$L\widetilde{r} = \partial_x^2 \widetilde{r} + \partial_y^2 \widetilde{r} + 4e^{\widetilde{v}}\widetilde{r} = 0,$$

$$\partial_{t'_n}\widetilde{r} = A'_n\widetilde{r},\ \partial_{t''_n}\widetilde{r} = A''_n\widetilde{r},$$

где A'_n, A''_n *— операторы порядка* $(2n+1)$ *по переменным* (x, y). *Потенциал* $\widetilde{V} = 4e^{\widetilde{v}}, \widetilde{v}(0) = v$, *деформируется согласно иерархии Веселова–Новикова*

$$\frac{\partial L}{\partial t'_n} = [L, A'_n] + B'_n L,\ \frac{\partial L}{\partial t''_n} = [L, A''_n] + B''_n L,$$

где B'_n, B''_n *— операторы порядка* $(2n-1)$ *по переменным* (x, y). *Деформации* $\widetilde{r}(t)$ *сохраняют спектр тора* T *и его конформный тип.*

В этом же параграфе рассматриваются симметрии уравнения Цицейки. Как было показано с уравнением Цицейки

$$v_{z\bar{z}} = e^{-2v} - e^{v}$$

естественным образом связан двумерный оператор Шредингера

$$L = \partial_z\partial_{\bar{z}} + e^{v(z,\bar{z})}.$$

Мы покажем, что симметрии уравнения Цицейки отвечают изоспектральным деформациям этого оператора, заданным иерархией Веселова–Новикова (для первых нескольких уравнений) . Таким образом ситуация полностью аналогична случаю KdV. С уравнением Кортвега–де Фриза

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx})$$

естественным образом связан одномерный оператор Шредингера

$$\partial_x^2 + u$$

и его изоспектральные деформации, определяемые высшими KdV, задают симметрии самого KdV.

Уравнение Цицейки допускает преобразование симметрии вида

$$v_t = f(v, v_z, v_{\bar z}, v_{zz}, v_{z\bar z}, v_{\bar z\bar z}, \dots),$$

если равенство

$$f_{z\bar z} + (2e^{-2v} + e^v)f = 0 \tag{4}$$

выполнено на всех решениях уравнения Цицейки. В силу того, что

$$\frac{d}{dt}(v_{z\bar z} - e^{-2v} + e^v) = f_{z\bar z} + (2e^{-2v} + e^v)f,$$

преобразование симметрии задает поток на пространстве решений.

Теорему 5.4 можно интерпретировать следующим образом.

Теорема 5.5 *Уравнения иерархии Веселова–Новикова задают высшие коммутирующие потоки на пространстве конечнозонных решений уравнения Цицейки, т.е. для высшего уравнения Веселова–Новикова вида*

$$v_{t_n} = f_n(v, v_z, v_{\bar z}, v_{zz}, v_{z\bar z}, v_{\bar z\bar z}, \dots),$$

где $V = e^v$ *— потенциал оператора Шредингера* L*, равенство (4) выполнено на всех конечнозонных решениях уравнения Цицейки.*

Связь между уравнениями Веселова–Новикова (ВН) и уравнением Цицейки, указанная в теореме 5.5, объясняется еще и тем, что как следует из [38], первое стационарное уравнение ВН является следствием уравнения Цицейки, а следовательно, уравнения ВН должны задавать потоки на пространстве решений уравнения Цицейки. Справедлива теорема

- *Стационарное уравнение Веселова–Новикова*

$$[L, A_3] + B_0 L = 0, \tag{5}$$

где

$$L = \partial_z\partial_{\bar z} + e^{v(z,\bar z)},$$
$$A_3 = \partial_z^3 + \partial_{\bar z}^3 - (v_z^2 + v_{zz})\partial_z - (v_{\bar z}^2 + v_{\bar z\bar z})\partial_{\bar z},$$
$$B_0 = -\partial_z(v_z^2 + v_{zz}) - \partial_{\bar z}(v_{\bar z}^2 + v_{\bar z\bar z}),$$

равносильно системе уравнений

$$\partial_z(e^{-2v} - e^v - v_{z\bar z}) + 2v_z(e^{-2v} - e^v - v_{z\bar z}) = 0,$$

$$\partial_{\bar z}(e^{-2v} - e^v - v_{z\bar z}) + 2v_{\bar z}(e^{-2v} - e^v - v_{z\bar z}) = 0.$$

Поскольку класс конечнозонных решений уравнения Цицейки достаточно обширен, то учитывая теорему 5.5, становится очевидно, что уравнения иерархии ВН задают высшие симметрии уравнения Цицейки. Подтверждением этой гипотезы является

Теорема 5.6 [75] *Второе, третье, пятое уравнения Веселова–Новикова заданные формулами (5.36), (5.37), (5.38) (см. §5.3.2) задают высшие симметрии уравнения Цицейки.*

В теореме 5.6 пропущено четвертое уравнение ВН, поскольку оно является следствием уравнения (5), и следовательно, задает тривиальную симметрию $v_{t_4} = 0$.

Отметим, что все симметрии уравнения Цицейки (и соответствующий оператор рекурсии) найдены в [39], а также для эквивалентного уравнения в [40].

В §5.4 мы укажем новый метод построения минимальных лагранжевых (**ML**) поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ с индуцированной диагональной метрикой в терминах функций Бейкера–Ахиезера алгебраических кривых. Результаты этого параграфа опубликованы в [76].

Как уже отмечалось, если на **ML**-торе в $\mathbb{C}P^2$ выбрать изотермические координаты с индуцированной метрикой $ds^2 = e^{v(x,y)}(dx^2 + dy^2)$, то функция $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению Цицейки. Это уравнение допускает представление Лакса со спектральным параметром.

На самом деле изотермические координаты не всегда удобны для описания **ML**-торов в $\mathbb{C}P^2$. В подтверждении этого рассмотрим следующий пример из §5.1. Обозначим через K конус в $\mathbb{R}^3$, заданный уравнением

$$mu_1^2 + nu_2^2 = (m+n)u_3^2,$$

где $m, n \in \mathbb{Z}, m, n > 0$. Через $\tilde{K}$ обозначим пересечение K с единичной сферой

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1.$$

Построим отображение ψ из $\tilde{K} \times S^1$ в $\mathbb{C}P^2$ как композицию $\psi = \mathcal{H} \circ \tilde{\varphi}$, где

$$\tilde{\varphi} : \tilde{K} \times S^1 \to S^5,\ \tilde{\varphi}(P) = (u_1 e^{\pi imy}, u_2 e^{\pi iny}, u_3 e^{\pi i(m+n)y}),$$

$\mathcal{H}$ — проекция Хопфа $\mathcal{H} : S^5 \to \mathbb{C}P^2$, $P \in \tilde{K} \times S^1$, y — координата на S^1.

Образом отображения ψ является либо **ML**-тор, либо **ML**-бутылка Клейна. Топологический тип зависит от того сохраняет или не сохраняет ориентацию эллипса

$$mv_1^2 + nv_2^2 = m + n$$

инволюция

$$(v_1, v_2) \to (v_1 \cos(n\pi), v_2 \cos(m\pi)).$$

Отсюда видно, что эту поверхность можно также задать как образ композиции $\mathcal{H} \circ \varphi$, где $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^5$,

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{\sin(x)\sqrt{m+n}}{\sqrt{2m+n}} e^{\pi imy}, \right.$$

$$\left. \frac{\cos(x)\sqrt{m+n}}{\sqrt{m+2n}} e^{\pi iny}, \sqrt{\frac{n\cos^2(x)}{m+2n} + \frac{m\sin^2(x)}{2m+n}} e^{-\pi i(m+n)y} \right).$$

В координатах x, y индуцированная метрика имеет диагональный вид

$$ds^2 = e^{v_1} dx^2 + e^{v_2} dy^2,$$

причем можно убедится, что $v_1 \neq v_2$. Таким образом с одной стороны **ML**-торы отвечают гладким периодическим решениям уравнения Цицейки (все такие решения выражаются через тэта-функции спектральных кривых), а с другой стороны этот пример наглядно показывает, что существуют координаты x, y, в которых метрика диагональна, и которые более подходят для описания этого **ML**-тора, поскольку в этих координатах тор описывается в элементарных функциях.

В этом параграфе мы построим **ML**-отображение плоскости в $\mathbb{C}P^2$ (с индуцированной диагональной метрикой) по спектральным данным, которые проще чем спектральные данные для решения уравнения Цицейки. А именно мы построим такое отображение по вещественной алгебраической кривой, которая допускает голоморфную инволюцию. В частности, мы не требуем чтобы спектральная кривая была тригональной (как для решений уравнения Цицейки).

Основное отличие нашего метода от метода Шарипова [32] заключается в следующем. Мы не пользуемся представлением Лакса со спектральным параметром. Вместо этого мы в явном виде строим отображение

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^5 \subset \mathbb{C}^3,$$

которое удовлетворяет уравнениям

$$< \varphi, \varphi_x >=< \varphi, \varphi_y >=< \varphi_x, \varphi_y >= 0,$$

где $< .,. >$ — эрмитово произведение в $\mathbb{C}^3$. Композиция отображений $\varphi \circ \mathcal{H}$ дает лагранжево отображение плоскости в $\mathbb{C}P^2$. В теореме 5.10 мы указываем спектральные данные, отвечающие **ML**-отображениям плоскости в $\mathbb{C}P^2$.

В §5.5 дано описание одного семейства минимальных конформно плоских лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^3$, а также одного семейства гамильтоново минимальных конформно плоских лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^3$. Результаты этого параграфа опубликованы в работах [77],[78].

Как и раньше будем задавать конформно плоское минимальное подмногообразие M как образ композиции

$$\varphi = \mathcal{H} \circ r : \mathbb{R}^3 \to S^7 \to \mathbb{C}P^3.$$

Компоненты вектор-функции r удовлетворяют уравнению Шредингера

$$L\tilde{r} = \Delta\tilde{r} + U\tilde{r} = 0,$$

где $\tilde{r} = e^{2v}r$, $ds^2 = e^{v(x,y,z)}(dx^2+dy^2+dz^2)$ — индуцированная метрика на M,

$$U(x,y,z) = \frac{1}{4}(2\Delta v + (\nabla v)^2 + 12e^{2v}).$$

Если отображение φ является периодическим, то компоненты радиус-вектора $\tilde{r}$ являются блоховскими функциями оператора L (собственными для L и для операторов трансляций — операторов сдвига на периоды). Из лагранжевости и минимальности M, а также конформности φ следует, что матрица R

$$R = \begin{pmatrix} r^1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ e^{-v}r^1_x & e^{-v}r^2_x & e^{-v}r^3_x & e^{-v}r^4_x \\ e^{-v}r^1_y & e^{-v}r^2_y & e^{-v}r^3_y & e^{-v}r^4_y \\ e^{-v}r^1_z & e^{-v}r^2_z & e^{-v}r^3_z & e^{-v}r^4_z \end{pmatrix}$$

принадлежит группе $\mathrm{U}(4)$, причем $\det R = const$. С точностью до действия на r некоторой постоянной унитарной матрицы, можно считать, что $\det R = 1$. Таким образом задача построения минимальных конформно плоских подмногообразий сводится к построению отображения $r : \mathbb{R}^3 \to S^7$, такого что $R \in \mathrm{SU}(4)$. Введем матрицы X, Y и Z такие, что

$$R_x = XR,\ R_y = YR,\ R_z = ZR.$$

Так как $R \in \mathrm{SU}(4)$, то X, Y и Z лежат в алгебре Ли $\mathrm{su}(4)$. При этом они удовлетворяют уравнениям совместности

$$X_y - Y_x + [X,Y] = 0,\ X_z - Z_x + [X,Z] = 0,\ Y_z - Z_y + [Y,Z] = 0.$$

Мы рассматриваем полностью интегрируемый случай, когда матрицы X, Y и Z зависят только от одной переменной z. Тогда решением уравнений нулевой кривизны являются матрицы вида (5.49),(5.50) и (5.51) (см. §5.5), при этом v удовлетворяет уравнению

$$v'(z)^2 + e^{2v(z)} + c_3^2 e^{-6v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2) = 0, \tag{6}$$

где c_1,c_2 и c_3 — некоторые вещественные константы, которое после замены интегрируется с помощью абелева интеграла на гиперэллиптической кривой рода 2.

Имеет место

Теорема 5.9 [77] *Если матрицы X, Y, Z зависят только от переменной z, то отображение r, задающее минимальное конформное отображение $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{C}P^3$, с точностью до действия группы* $\mathrm{U}(4)$*, имеет вид*

$$r = \left(P(z)e^{i(\alpha_1 x+\beta_1 y)}, P(z)e^{i(\alpha_2 x+\beta_2 y)}, P(z)e^{-i((\alpha_1+\alpha_2)x+(\beta_1+\beta_2)y)}, P_1(z)\right),$$

$$P(z) = F(z)e^{iG(z)},\ F = \frac{e^{v(z)}}{\sqrt{6(c_1^2+c_2^2)}},\quad G(z) = c_3\int e^{-3v(z)}dz,$$

$$P_1(z) = F_1(z)e^{iG_1(z)},\ F_1(z) = \frac{\sqrt{2(c_1^2+c_2^2)-e^{2v(z)}}}{\sqrt{2(c_1^2+c_2^2)}},$$

$$G_1(z) = c_3\int\frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)}-2(c_1^2+c_2^2)}dz,$$

где α_1, α_2, c_3 — некоторые константы, c_1 и c_2 выражаются через α_1, α_2 по формулам (5.71) и (5.72), $v(z)$ — решение уравнения (6). Если при этом α_1, α_2, c_3 такие, что уравнение (5.68) имеет два отрицательных корня и не имеет кратных корней, $v(z)$ — периодическое решение уравнения (6), α_1, α_2 и c_4 (см. (5.70)) — рациональные числа, то отображение φ является периодическим по переменным x, y и z.

Условия теоремы будут выполнены, например, при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, c_3 = 2$. При этом знаменатель в формуле для $G_1(z)$ не обращается в нуль. В этом случае отображение φ является периодическим по x и y, а периодичности по z можно добиться бесконечно малыми шевелениями $c_3 = 2$.

Кастро и Вранкен [41] рассмотрели минимальные лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}P^3$, которые допускают поле Киллинга единичной длины, интегральные кривые которого совпадают с геодезическими. Они показали, что такие подмногообразия либо получаются из конструкции Браянта [42], либо отвечают решениям уравнения sinh-Gordon. Интересно отметить, что тензор Вейля метрики на многообразиях, получающихся из конструкции Кастро и Вранкена [41] равен 0, следовательно, эти многообразия являются конформно плоскими.

В §5.5.2 мы обобщим теорему 5.9 на случай конформно плоских гамильтоново минимальных лагранжевых торов.

Глава 1

Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга два

1.1 Коммутативные кольца дифференциальных операторов ранга два, отвечающие спектральным кривым рода два

В данном параграфе рассматриваются обыкновенные коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2.

Пусть L_1, L_2 — обыкновенные дифференциальные операторы

$$L_1 = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(x)\frac{d^i}{dx^i}, \quad L_2 = \frac{d^m}{dx^m} + \sum_{i=0}^{m-2} v_i(x)\frac{d^i}{dx^i},$$

Напомним лемму Берчналла–Чаунди.

- *Если $L_1L_2 = L_2L_1$, то существует ненулевой полином Q от двух коммутирующих переменных такой, что $Q(L_1, L_2) = 0$.*

Обозначим через Γ спектральную кривую

$$\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : Q(z, w) = 0\}.$$

Для каждой точки $P \in \Gamma$ найдется совместная собственная функция $\psi(x,P)$ операторов L_1 и L_2. Эта функция имеет существенную особенность в некоторой выделенной точке $q \in \Gamma$, а на $\Gamma - \{q\}$ она мероморфна. При этом

$$L_i\psi = \lambda_i(P)\psi, \tag{1.1}$$

где $\lambda_i(P)$ — некоторая мероморфная функция на Γ с единственным полюсом в точке q. Число l линейно независимых совместных собственных функций, отвечающих общей точке $P \in \Gamma$ называется *рангом* пары L_1, L_2.

Как уже отмечалось во введении, для нахождения операторов достаточно найти функции $\chi_i = \chi_i(x,P)$, которые определяются из равенства

$$\frac{d^l}{dx^l}\psi_j = \chi_{l-1}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\psi_j + \cdots + \chi_0\psi_j.$$

В отличие от функции ψ, которая имеет существенную особенность в выделенной точке q, функции χ_i являются мероморфными. Для нахождения χ_i необходимо решить уравнения Кричевера (см. §1.1.1).

Основной результат этого параграфа заключается в следующем. Пусть $l = 2$ и кривая Γ рода 2 задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = F(z) = z^6 + c_5z^5 + c_4z^4 + c_3z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0, \tag{1.2}$$

где $c_0 \neq 0$. Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma,\ \sigma(z,w) = (z,-w),$$

которая имеет 6 неподвижных точек $(z_i, 0)$, где z_i — точки ветвления (корни уравнения $F(z) = 0$). Мы рассматриваем случай, когда

$$\sigma\chi_1 = \chi_1.$$

Тогда функция χ_1 определена на Γ/σ, т.е. можно считать, что χ_1 зависит только от z и не зависит от w. Функцию χ_0 мы представляем в виде

$$\frac{1}{2}(\chi_0 + \sigma\chi_0) + \frac{1}{2}\sqrt{(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2},$$

где $\chi_0+\sigma\chi_0$ и $(\chi_0-\sigma\chi_0)^2$ также определены на $\mathbb{C}$. Таким образом мы сводим задачу нахождения χ_i на Γ к нахождению трех функций χ_1, $\chi_0+\sigma\chi_0$ и $(\chi_0-\sigma\chi_0)^2$ на $\mathbb{C}$. Смена знака у $\sqrt{(\chi_0-\sigma\chi_0)^2}$ дает функцию $\sigma\chi_0$. Имеет место

Теорема 1.1 *Компоненты $\chi_0(x,P)$ и $\chi_1(x,P)$ матрицы $\frac{d\Psi}{dx}\Psi^{-1}$ имеют следующий вид*

$$\chi_1(x,P)=-\frac{\gamma_1'(x)}{z-\gamma_1(x)}-\frac{\gamma_2'(x)}{z-\gamma_2(x)}-\frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1(x)}-\frac{\gamma_2'(x)}{\gamma_2(x)},$$

$$\chi_0(x,P)=-\frac{1}{2}\frac{H(x)\gamma_1'(x)}{z-\gamma_1(x)}-\frac{1}{2}\frac{H(x)\gamma_2'(x)}{z-\gamma_2(x)}+\frac{1}{2z}+\frac{\kappa_2(x)}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{R(x,z)},$$

$$R(x,z)=\frac{F_1(x)\gamma_1'^2(x)}{(z-\gamma_1(x))^2}+\frac{2G_1(x)\gamma_1'(x)}{z-\gamma_1(x)}+\frac{F_2(x)\gamma_2'^2(x)}{(z-\gamma_2(x))^2}$$

$$+\frac{2G_2(x)\gamma_2'(x)}{z-\gamma_2(x)}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}\left(\frac{2(\gamma_1(x)+\gamma_2(x))}{\gamma_1(x)\gamma_2(x)}+\frac{c_1}{c_0}\right)+\frac{\gamma_1^2(x)\gamma_2^2(x)}{c_0}.$$

Все нули функции R имеют первый порядок и расположены в точках ветвления, все полюсы имеют второй порядок (поэтому функция $\sqrt{R}$ корректно определена на Γ). Функции $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ удовлетворяют нелинейному дифференциальному уравнению, которое интегрируемо в квадратурах относительно $\gamma_1(x)$, если положить

$$\gamma_2(x)=\frac{C-B\gamma_1(x)}{B+A\gamma_1(x)},\ \ A,B,C\in\mathbb{C}. \tag{1.3}$$

В этом случае решение этого уравнения имеет следующий вид

$$\gamma_1^{-1}(y_1)=\int\sqrt{\frac{y_1y_2}{2c_0(y_2-y_1)^3}\left(y_2^2F(y_1)-\frac{y_1^2F(y_2)(B+Ay_1)^4}{(B^2+AC)^2}\right)}dy_1, \tag{1.4}$$

где

$$y_1=\gamma_1(x),\quad y_2=\frac{C-By_1}{B+Ay_1}.$$

Функции $H(x),F_i(x),G_i(x)$ и $\kappa_2(x)$ выражаются через $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ по формулам (1.23), (1.19)–(1.22) и (1.13).

Следствие 1.1 *Оператор, отвечающий функции*

$$\lambda = \frac{1}{2z^3} + \frac{w}{2z^3\sqrt{c_0}} + \frac{c_1}{4z^2c_0} + \frac{1}{z}\left(\frac{c_2}{4c_0} - \frac{c_1^2}{16c_0^2}\right)$$

имеет следующий вид

$$L = \frac{d^6}{dx^6} + f_4\frac{d^4}{dx^4} + f_3\frac{d^3}{dx^3} + f_2\frac{d^2}{dx^2} + f_1\frac{d}{dx} + f_0,$$

где

$$f_4 = \alpha - 3a_0, \;\; f_3 = -6a_0' - 3b_1,$$

$$f_2 = \beta - 7a_0'' - 6b_1' - 3a_1 - 2\alpha a_0 + 3a_0^2,$$

$$f_1 = -2\alpha b_1 + 3a_0b_1 - 3b_2 - 2\alpha a_0' + 6a_0a_0' - 6a_1' - 7b_1'' - 4a_0''',$$

$$f_0 = \gamma - \beta a_0 + \alpha a_0^2 - a_0^3 - 2\alpha a_1 + 3a_0a_1 + 2(a_0')^2$$

$$-2\alpha b_1' - 6b_2' - \alpha a_0'' + 3a_0a_0'' - 7a_1'' - 4b_1''' - a_0^{IV}.$$

Функции $a_0(x), a_1(x), b_1(x)$ *и* $b_2(x)$ *находятся из разложений* χ_0 *и* χ_1 *в ряд по степеням* z

$$\chi_0 = \frac{1}{z} + a_0 + a_1z + O(z^2), \;\; \chi_1 = b_1z + b_2z^2 + O(z^3),$$

$$a_0(x) = \frac{H(x)\gamma_1'(x)}{2\gamma_1(x)} + \frac{H(x)\gamma_2'(x)}{2\gamma_2(x)} + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\gamma_1(x)+\gamma_2(x)}{2\gamma_1(x)\gamma_2(x)} + \frac{c_1}{4c_0},$$

$$a_1(x) = \frac{H(x)\gamma_1'(x)}{2\gamma_1^2(x)} + \frac{H(x)\gamma_2'(x)}{2\gamma_2^2(x)} + \frac{F_1(x)\gamma_1'^2(x)}{4\gamma_1^2(x)} - \frac{G_1(x)\gamma_1'(x)}{2\gamma_1(x)} + \frac{F_2(x)\gamma_2'^2(x)}{4\gamma_2^2(x)}$$

$$-\frac{G_2(x)\gamma_2'(x)}{2\gamma_2(x)} + \frac{\gamma_1^2(x)\gamma_2^2(x)}{4c_0} - \frac{1}{16}\left(\frac{2(\gamma_1(x)+\gamma_2(x))}{\gamma_1(x)\gamma_2(x)} + \frac{c_1}{c_0}\right)^2,$$

$$b_1(x) = \frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1^2(x)} + \frac{\gamma_2'(x)}{\gamma_2^2(x)}, \;\; b_2(x) = \frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1^3(x)} + \frac{\gamma_2'(x)}{\gamma_2^3(x)},$$

α, β *и* γ *— коэффициенты разложения* λ *в ряд*

$$\lambda = \frac{1}{z^3} + \frac{\alpha}{z^2} + \frac{\beta}{z} + \gamma + O(z),$$

$$\alpha = \frac{c_1}{2c_0},\ \beta = \frac{c_2}{2c_0} - \frac{c_1^2}{8c_0^2},\ \gamma = \frac{c_1^3}{32c_0^3} - \frac{c_1c_2}{8c_0^2} + \frac{c_3}{4c_0}.$$

Операторы, коммутирующие с L, легко находятся из уравнений коммутации.

Отметим, что при $c_1 = c_5 = 0,\ c_3 = 8c_0$ и при

$$\gamma_1(x) = -\gamma_2(x) = \frac{1}{x}$$

коэффициенты операторов являются рациональными функциями. Среди таких операторов можно выделить операторы с полиномиальными коэффициентами. Укажем пример. Пусть кривая Γ задана уравнением

$$w^2 = z^6 + 2z^3 + \frac{1}{4}.$$

Тогда операторы

$$L_1 = \partial_x^6 - \frac{3x^4}{16}\partial_x^4 - \frac{3x^3}{2}\partial_x^3 + \frac{3}{256}(x^8 - 576x^2)\partial_x^2 + \left(\frac{3x^7}{32} - 6x\right)\partial_x - \frac{x^{12}}{4096} + \frac{23x^6}{64} - \frac{3}{2},$$

$$L_2 = \partial_x^8 - \frac{x^4}{4}\partial_x^6 - 3x^3\partial_x^5 + \frac{1}{128}(3x^8 - 2368x^2)\partial_x^4 + \frac{1}{8}(3x^7 - 320x)\partial_x^3$$
$$-\left(\frac{x^{12}}{1024} - \frac{45x^6}{16} + 30\right)\partial_x^2 - \left(\frac{3x^{11}}{256} - \frac{35x^5}{4}\right)\partial_x + \frac{x^{16} - 3712x^{10} + 716800x^4}{65536}.$$

$$L_3 = \partial_x^{10} - \frac{5x^4}{16}\partial_x^8 - 5x^3\partial_x^7 + \frac{5}{128}(x^8 - 1024x^2)\partial_x^6 + \frac{5}{16}(3x^7 - 416x)\partial_x^5$$
$$-\left(\frac{5x^{12}}{2048} - \frac{85x^6}{8} + 150\right)\partial_x^4 - \frac{5}{256}(3x^{11} - 3136x^5)\partial_x^3$$
$$+\frac{5(x^{16} - 8192x^{10} + 2437120x^4)}{65536}\partial_x^2 + \frac{5}{4096}(x^{15} - 2464x^9 + 215040x^3)\partial_x$$
$$-\frac{x^{20}}{1048576} + \frac{15x^{14}}{2048} - \frac{1505x^8}{256} + \frac{525x^2}{4}$$

попарно коммутируют. Операторы L_1, L_2 и L_3 задают коммутативное кольцо дифференциальных операторов, изоморфное кольцу мероморфных функций на Γ с полюсом в точке q. Между L_1 и L_2 справедливо следующее алгебраическое соотношение

$$L_2^3 = L_1^4 - 4L_1^3 + 3L_1^2.$$

Через $\widetilde{\Gamma}$ обозначим кривую Берчналла–Чаунди, соответствующую паре операторов L_1 и L_2. Кривая $\widetilde{\Gamma}$ имеет каспидальную особую точку $(0,0)$. Операторы L_1 и L_2 отвечают функциям

$$\lambda_1 = \frac{1}{2z^3} + \frac{w}{z^3} + 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2z^4} + \frac{w}{z^4} + \frac{2}{z},$$

которые задают бирациональную эквивалентность

$$\pi : \Gamma \to \widetilde{\Gamma}, \quad \pi(z,w) = (\lambda_1, \lambda_2).$$

Прообразом каспидальной точки служит точка $\sigma(q)$. Для того, чтобы отображение π являлось морфизмом, необходимо пополнить $\widetilde{\Gamma}$ на бесконечности каспидальной точкой типа $(3,4)$, при этом ее прообразом будет точка q.

1.1.1 Доказательство теоремы 1.1

Рассмотрим сначала общий случай кривой рода g и операторов ранга l. Совместные собственные функции $\psi_j(x,P)$ операторов L_1 и L_2 обладают следующими свойствами [5]. На $\Gamma - \{q\}$ функции ψ_j имеют lg простых полюсов $P_1, \dots, P_{lg}$, причем P_i не зависят от x. В окрестности q справедливо следующее асимптотическое разложение

$$\psi(x,P) = (\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(x) k^{-j})\Psi,$$

где k^{-1} — локальный параметр в окрестности точки q, $\xi_0 = (1,0,\dots,0)$, $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_{l-1})$, Ψ — решение матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\Psi = A\Psi,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ k + g_0(x) & g_1(x) & g_2(x) & \dots & g_{l-2}(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$g_i(x)$ — некоторые функции. Вычеты $v_{ij}(x)$ функций $\psi_j, j < l-1$ в точках P_i пропорциональны вычетам $v_{i,l-1}(x)$ функции ψ_{l-1}

$$v_{ij}(x) = \alpha_{ij} v_{i,l-1}(x).$$

Набор (P_j, α_{ij}) называется *параметрами Тюрина*. Компоненты $\chi_i(x, P)$ матрицы $\frac{d\Psi}{dx}\Psi^{-1}$ (см. введение) обладают следующим свойством [5]. Это мероморфные функции на Γ с lg полюсами

$$P_1(x), \dots, P_{lg}(x).$$

Причем при $x = x_0$ эти точки совпадают с полюсами $P_1, \dots, P_{lg}$ функций ψ_j. В окрестности точки q функции χ_i имеют вид

$$\chi_0(x, P) = k + g_0(x) + O(k^{-1}),$$

$$\chi_j(x, P) = g_j(x) + O(k^{-1}), \quad j < l-1,$$
$$\chi_{l-1}(x, P) = O(k^{-1}).$$

В точках $P_i(x)$ справедливы следующие разложения

$$\chi_j = \frac{c_{ij}(x)}{k - \gamma_i(x)} + d_{ij}(x) + O(k - \gamma_i(x)).$$

Обозначим через $\alpha_{ij}(x)$ отношение

$$\alpha_{ij}(x) = \frac{c_{ij}(x)}{c_{i,l-1}(x)}, \quad 0 \le j \le l-1, \ 1 \le i \le lg.$$

Следующая теорема доказана Кричевером [5].

- *Параметры* $\gamma_i(x), \alpha_{ij}(x), d_{ij}(x), 0 \le j \le l-2, 1 \le i \le lg$ *удовлетворяют уравнениям*
$$c_{i,l-1}(x) = -\gamma_i'(x),$$
$$d_{i0}(x) = \alpha_{i0}(x)\alpha_{i,l-2}(x) + \alpha_{i0}(x)d_{i,l-1}(x) - \alpha_{i0}'(x),$$
$$d_{ij}(x) = \alpha_{ij}(x)\alpha_{i,l-2}(x) - \alpha_{i,j-1}(x) + \alpha_{ij}(x)d_{i,l-1}(x) - \alpha_{ij}'(x), j \ge 1.$$

Отметим, что эти уравнения инвариантны относительно выбора локального параметра в окрестности $P_i(x)$ и q, т.е. при замене локального параметра соответствующие коэффициенты разложений будут также удовлетворять этой системе.

При $g = 2$ и $l = 2$ по теореме Кричевера в окрестности точки $P_i(x)$, $1 \le i \le 4$, функции χ_i имеют вид

$$\chi_0(x, P) = \frac{-\alpha_i(x)\gamma_i'(x)}{k - \gamma_i(x)} + d_{i0}(x) + O(k - \gamma_i(x)), \tag{1.5}$$

$$\chi_1(x, P) = \frac{-\gamma_i'(x)}{k - \gamma_i(x)} + d_{i1}(x) + O(k - \gamma_i(x)). \tag{1.6}$$

Причем имеет место равенство

$$d_{i0}(x) = \alpha_i^2(x) + \alpha_i(x)d_{i1}(x) - \alpha_i'(x), \tag{1.7}$$

а в окрестности q — следующий вид

$$\chi_0(x, P) = k + g_0(x) + O(k^{-1}), \tag{1.8}$$

$$\chi_1(x, P) = O(k^{-1}). \tag{1.9}$$

Пусть Γ задается уравнением (1.2), а точка q имеет координаты $(0, \sqrt{F(0)})$. Выберем в окрестности $P_i(x)$ локальный параметр $z - \gamma_i(x)$, а в окрестности q — локальный параметр z. Пусть $\sigma\chi_1 = \chi_1$. Тогда можно считать, что

$$\sigma P_1(x) = P_3(x), \quad \sigma P_2(x) = P_4(x),$$

следовательно,

$$\gamma_1 = \gamma_3, \quad \gamma_2 = \gamma_4,$$

$$d_{11} = d_{31}, \quad d_{21} = d_{41}.$$

Таким образом в силу (1.6) имеет место равенство

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(\chi_1 + \sigma\chi_1) = \frac{-\gamma_1'}{z - \gamma_1} + \frac{-\gamma_2'}{z - \gamma_2} - \kappa_1,$$

где $\kappa_1(x)$ — некоторая функция.

Так как $\chi_1(q)=0$, то

$$\kappa_1=\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}+\frac{\gamma_2'}{\gamma_2}.$$

Из разложения (1.6) выводим, что

$$d_{11}=\frac{-\gamma_2'}{\gamma_1-\gamma_2}-\kappa_1, d_{21}=\frac{-\gamma_1'}{\gamma_2-\gamma_1}-\kappa_1, \tag{1.10}$$

Далее, из разложений (1.5) и (1.8) получаем

$$\chi_0+\sigma\chi_0=-\frac{(\alpha_1+\alpha_3)\gamma_1'}{z-\gamma_1}-\frac{(\alpha_2+\alpha_4)\gamma_2'}{z-\gamma_2}+\frac{1}{z}+\kappa_2, \tag{1.11}$$

$$(\chi_0-\sigma\chi_0)^2=\frac{(\alpha_3-\alpha_1)^2\gamma_1'^2}{(z-\gamma_1)^2}+\frac{2(d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1)\gamma_1'}{z-\gamma_1}$$

$$+\frac{(\alpha_4-\alpha_2)^2\gamma_2'^2}{(z-\gamma_2)^2}+\frac{2(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)\gamma_2'}{z-\gamma_2}+\frac{1}{z^2}+\frac{V}{z}+\kappa, \tag{1.12}$$

где $\kappa(x),\kappa_2(x)$ и $V(x)$ — некоторые функции. Из равенства (1.11) получаем

$$d_{10}+d_{30}=-\frac{(\alpha_2+\alpha_4)\gamma_2'}{\gamma_1-\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_1}+\kappa_2, \tag{1.13}$$

$$d_{20}+d_{40}=-\frac{(\alpha_1+\alpha_3)\gamma_1'}{\gamma_2-\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\kappa_2.$$

Откуда

$$d_{10}+d_{30}-(d_{20}+d_{40})=-\frac{(\alpha_2+\alpha_4)\gamma_2'}{\gamma_1-\gamma_2}+\frac{(\alpha_1+\alpha_3)\gamma_1'}{\gamma_2-\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}. \tag{1.14}$$

Из формулы (1.12) имеем

$$(\chi_0-\sigma\chi_0)^2=\frac{g}{(z-\gamma_1)^2(z-\gamma_2)^2z^2},$$

где

$$g=z^6\kappa+z^5(V-2\kappa(\gamma_1+\gamma_2)+2(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)\gamma_2'+2(d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1)\gamma_1')$$

$$+z^4(\kappa(\gamma_1^2+\gamma_2^2+4\gamma_1\gamma_2)-2V(\gamma_1+\gamma_2)-2(\gamma_2+2\gamma_1)(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)\gamma_2'$$

$$-2(\gamma_1+2\gamma_2)(d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1)\gamma_1'+(\alpha_4-\alpha_2)^2\gamma_2'^2+(\alpha_3-\alpha_1)^2\gamma_1'^2+1)$$

$$+z^3(-2(\gamma_1\gamma_2^2+\gamma_2\gamma_1^2)\kappa+V(\gamma_1^2+\gamma_2^2+4\gamma_1\gamma_2)$$
$$-2(\gamma_1+\gamma_2)+2(\gamma_1^2+2\gamma_1\gamma_2)(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)\gamma_2'$$
$$+2(\gamma_2^2+2\gamma_1\gamma_2)(d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1)\gamma_1'-2(\alpha_4-\alpha_2)^2\gamma_2'^2\gamma_1-2(\alpha_3-\alpha_1)^2\gamma_1'^2\gamma_2)$$
$$+z^2(\kappa\gamma_1^2\gamma_2^2-V2(\gamma_1\gamma_2^2+\gamma_2\gamma_1^2)+(\gamma_1^2+\gamma_2^2+4\gamma_1\gamma_2)-2(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)\gamma_2'\gamma_2\gamma_1^2$$
$$-2(d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1)\gamma_1'\gamma_1\gamma_2^2+\gamma_1^2(\alpha_4-\alpha_2)^2\gamma_2'^2+\gamma_2^2(\alpha_3-\alpha_1)^2\gamma_1'^2\gamma^2)$$
$$+z(\gamma_1^2\gamma_2^2V-2(\gamma_1\gamma_2^2+\gamma_2\gamma_1^2))+\gamma_1^2\gamma_2^2.$$

Функция $(\chi_0-\sigma\chi_0)^2$ имеет нули в шести точках ветвления. Так как

$$\deg g=6,$$

то нули g совпадают с нулями функции $F(x)$, следовательно, мы имеем тождества

$$V-2\kappa(\gamma_1+\gamma_2)+2(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)\gamma_2'$$
$$+2(d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1)\gamma_1'-c_5\kappa=0, \tag{1.15}$$
$$\kappa(\gamma_1^2+\gamma_2^2+4\gamma_1\gamma_2)-2V(\gamma_1+\gamma_2)-2(\gamma_2+2\gamma_1)(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)\gamma_2'$$
$$-2(\gamma_1+2\gamma_2)(d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1)\gamma_1'+(\alpha_4-\alpha_2)^2\gamma_2'^2$$
$$+(\alpha_3-\alpha_1)^2\gamma_1'^2+1-c_4\kappa=0, \tag{1.16}$$
$$-2(\gamma_1\gamma_2^2+\gamma_2\gamma_1^2)\kappa+V(\gamma_1^2+\gamma_2^2+4\gamma_1\gamma_2)-2(\gamma_1+\gamma_2)$$
$$+2(\gamma_1^2+2\gamma_1\gamma_2)(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)\gamma_2'+2(\gamma_2^2+2\gamma_1\gamma_2)(d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1)\gamma_1'$$
$$-2(\alpha_4-\alpha_2)^2\gamma_2'^2\gamma_1-2(\alpha_3-\alpha_1)^2\gamma_1'^2\gamma_2-c_3\kappa=0, \tag{1.17}$$
$$\kappa\gamma_1^2\gamma_2^2-V2(\gamma_1\gamma_2^2+\gamma_2\gamma_1^2)+(\gamma_1^2+\gamma_2^2+4\gamma_1\gamma_2)-2(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)\gamma_2'\gamma_2\gamma_1^2$$
$$-2(d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1)\gamma_1'\gamma_1\gamma_2^2$$
$$+\gamma_1^2(\alpha_4-\alpha_2)^2\gamma_2'^2+\gamma_2^2(\alpha_3-\alpha_1)^2\gamma_1'^2\gamma^2-c_2\kappa=0, \tag{1.18}$$
$$\gamma_1^2\gamma_2^2V-2(\gamma_1\gamma_2^2+\gamma_2\gamma_1^2)-c_1\kappa=0,\ \gamma_1^2\gamma_2^2-c_0\kappa=0.$$

Из последних двух уравнений получаем

$$\kappa=\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0},\ V=\frac{2(\gamma_1+\gamma_2)}{\gamma_1\gamma_2}+\frac{c_1}{c_0}.$$

Решим систему линейных уравнений (1.15)–(1.18) относительно

$$(\alpha_3-\alpha_1)^2, \quad (\alpha_4-\alpha_2)^2,$$

$$(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2), \quad (d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1).$$

Получим

$$F_1=(\alpha_3-\alpha_1)^2=\frac{\gamma_2^2F(\gamma_1)}{c_0\gamma_1'^2(\gamma_1-\gamma_2)^2}, \tag{1.19}$$

$$F_2=(\alpha_4-\alpha_2)^2=\frac{\gamma_1^2F(\gamma_2)}{c_0\gamma_2'^2(\gamma_2-\gamma_1)^2}, \tag{1.20}$$

$$G_1=(d_{10}-d_{30})(\alpha_3-\alpha_1)=\frac{1}{2(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_1'}\left(\frac{\gamma_1^2F(\gamma_2)}{c_0(\gamma_2-\gamma_1)^2}+\frac{\gamma_2^2F(\gamma_1)}{c_0(\gamma_1-\gamma_2)^2}\right.$$
$$-\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0}(3\gamma_1^2+2\gamma_1\gamma_2+\gamma_2^2)-\frac{2(\gamma_1+\gamma_2)}{\gamma_1}-\frac{c_1\gamma_2}{c_0}+1$$
$$\left.-c_4\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0}-c_5\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0}(\gamma_2+2\gamma_1)\right), \tag{1.21}$$

$$G_2=(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)=\frac{1}{2(\gamma_1-\gamma_2)\gamma_2'}\left(\frac{\gamma_1^2F(\gamma_2)}{c_0(\gamma_2-\gamma_1)^2}+\frac{\gamma_2^2F(\gamma_1)}{c_0(\gamma_1-\gamma_2)^2}\right.$$
$$-\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0}(\gamma_1^2+2\gamma_1\gamma_2+3\gamma_2^2)-\frac{2(\gamma_1+\gamma_2)}{\gamma_2}-\frac{c_1\gamma_1}{c_0}+1$$
$$\left.-c_4\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0}-c_5\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0}(\gamma_1+2\gamma_2)\right), \tag{1.22}$$

Теперь найдем $\alpha_1+\alpha_3$ и $\alpha_4+\alpha_2$. Из уравнений (1.7) имеем тождества

$$d_{10}-d_{30}=\alpha_1^2-\alpha_3^2+d_{11}(\alpha_1-\alpha_3)-(\alpha_{10}'-\alpha_{30}'),$$

$$d_{20}-d_{40}=\alpha_2^2-\alpha_4^2+d_{21}(\alpha_2-\alpha_4)-(\alpha_{20}'-\alpha_{40}').$$

Умножим эти тождества на $\alpha_3-\alpha_1$ и на $\alpha_4-\alpha_2$, получим

$$G_1=(\alpha_1^2-\alpha_3^2)(\alpha_3-\alpha_1)-d_{11}F_1+\frac{1}{2}F_1',$$

$$G_2=(\alpha_2^2-\alpha_4^2)(\alpha_4-\alpha_2)-d_{21}F_2+\frac{1}{2}F_2'.$$

Откуда

$$\alpha_1+\alpha_3=\frac{\frac{1}{2}F_1'-d_{11}F_1-G_1}{F_1},$$

$$\alpha_4+\alpha_2=\frac{\frac{1}{2}F_2'-d_{21}F_2-G_2}{F_2}.$$

Следовательно,

$$\alpha_1^2+\alpha_3^2=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_3)^2+\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_3)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}F_1'-d_{11}F_1-G_1}{F_1}\right)^2+\frac{1}{2}F_1.$$

$$\alpha_2^2+\alpha_4^2=\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_4)^2+\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_4)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}F_2'-d_{21}F_2-G_2}{F_2}\right)^2+\frac{1}{2}F_2.$$

Из уравнений (1.7) выводим

$$d_{10}+d_{30}=\alpha_1^2+\alpha_3^2-(\alpha_1'+\alpha_3')+d_{11}(\alpha_1+\alpha_3),$$

$$d_{20}+d_{40}=\alpha_2^2+\alpha_4^2-(\alpha_2'+\alpha_4')+d_{21}(\alpha_2+\alpha_4).$$

Таким образом

$$d_{10}+d_{30}=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}F_1'-d_{11}F_1-G_1}{F_1}\right)^2+\frac{1}{2}F_1-\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{1}{2}F_1'-d_{11}F_1-G_1}{F_1}\right)$$
$$+d_{11}\left(\frac{\frac{1}{2}F_1'-d_{11}F_1-G_1}{F_1}\right),$$

$$d_{20}+d_{40}=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}F_2'-d_{21}F_2-G_2}{F_2}\right)^2+\frac{1}{2}F_2-\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{1}{2}F_2'-d_{21}F_2-G_2}{F_2}\right)$$
$$+d_{21}\left(\frac{\frac{1}{2}F_2'-d_{21}F_2-G_2}{F_2}\right).$$

Воспользуемся формулами (1.19)–(1.22) и (1.10) для выражения $\alpha_1+\alpha_3$ и $\alpha_2+\alpha_4$ через γ_1 и γ_2. Получим

$$H=\alpha_1+\alpha_3=\frac{\frac{1}{2}F_1'-d_{11}F_1-G_1}{F_1}$$
$$=\frac{-2\gamma_2^2\gamma_1'^2+\gamma_1^2(2\gamma_1'\gamma_2'-\gamma_2\gamma_1'')+\gamma_1\gamma_2(2\gamma_1'^2+\gamma_2\gamma_1'')}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_1-\gamma_2)\gamma_1'}, \tag{1.23}$$

$$\alpha_2+\alpha_4=\frac{\frac{1}{2}F_2'-d_{21}F_2-G_2}{F_2}$$
$$=\frac{-2\gamma_1^2\gamma_2'^2+\gamma_2^2(2\gamma_1'\gamma_2'-\gamma_1\gamma_2'')+\gamma_1\gamma_2(2\gamma_2'^2+\gamma_1\gamma_2'')}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_2'}.$$

Отметим, что в случае выполнения равенства

$$\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4$$

уравнение (1.14) сильно упрощается и принимает вид:

$$\frac{F_1}{2}-\frac{F_2}{2}=\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}.$$

Имеем

$$\alpha_1+\alpha_3-(\alpha_2+\alpha_4)=\frac{2\gamma_1'\gamma_2'(\gamma_1'+\gamma_2')+(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2''\gamma_1'-\gamma_1''\gamma_2')}{(\gamma_1-\gamma_2)\gamma_1'\gamma_2'}.$$

Равенство

$$2\gamma_1'\gamma_2'(\gamma_1'+\gamma_2')+(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2''\gamma_1'-\gamma_1''\gamma_2')=0$$

вытекает из

$$A\gamma_1\gamma_2+B(\gamma_1+\gamma_2)-C=0,\ \ A,B,C\in\mathbb{C}.$$

Таким образом, если γ_2 выражается через γ_1 по формуле (1.3), то уравнение (1.14) принимает следующий вид

$$\frac{\gamma_2^2F(\gamma_1)}{2c_0\gamma_1'^2(\gamma_1-\gamma_2)^2}-\frac{\gamma_1^2F(\gamma_2)(B+Ay_1)^4}{2c_0\gamma_1'^2(B^2+AC)^2(\gamma_1-\gamma_2)^2}=\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2},$$

которое интегрируемо в квадратурах (см. (1.4)). Теорема 1.1 доказана.

С помощью полученных формул найдем коэффициенты оператора шестого порядка. Из равенства

$$\psi_i''=\chi_0\psi_i+\chi_1\psi_i'$$

выразим производные высокого порядка функции ψ_i через ψ_i,ψ_i',χ_0 и χ_1 и подставим полученные выражения в

$$(\partial_x^6+f_5\partial_x^5+f_4\partial_x^4+f_3\partial_x^3+f_2\partial_x^2+f_1\partial_x+f_0)\psi_i=\lambda\psi_i.$$

Получим

$$P_1\psi_i + P_2\psi_i' = \lambda\psi_i,$$

где

$$P_1 = \chi_0^{IV} + 4\chi_1'''\chi_0 + 6\chi_1''\chi_0' + 4\chi_1'\chi_0'' + \chi_1\chi_0''' + 4(\chi_0')^2 + 7\chi_0\chi_0'' + 8(\chi_1')^2\chi_0 + 9\chi_1\chi_1''\chi_0$$

$$+7\chi_1\chi_1'\chi_0' + \chi_1^2\chi_0'' + 6\chi_1'\chi_0^2 + 9\chi_1\chi_0\chi_0' + 9\chi_1'\chi_1^2\chi_0 + \chi_1^3\chi_0' + \chi_0^3 + 3\chi_1^2\chi_0^2 + \chi_1^4\chi_0$$

$$+f_5(\chi_0''' + 3\chi_1''\chi_0 + 3\chi_1'\chi_0' + \chi_1\chi_0'' + 4\chi_0\chi_0' + 5\chi_1\chi_1'\chi_0 + \chi_1^2\chi_0' + 2\chi_1\chi_0^2 + \chi_1^3\chi_0)$$

$$+f_4(\chi_0'' + 2\chi_1'\chi_0 + \chi_1\chi_0' + \chi_0^2 + \chi_1^2\chi_0) + f_3(\chi_0' + \chi_1\chi_0) + f_2\chi_0 + f_0,$$

$$P_2 = 4\chi_0''' + 7\chi_1''\chi_0 + 12\chi_1'\chi_0' + 9\chi_1\chi_0'' + 6\chi_0\chi_0' + 15\chi_1'\chi_1\chi_0 + 9\chi_1^2\chi_0' + 3\chi_1\chi_0^2 + 4\chi_1^3\chi_0$$

$$+\chi_1^{IV} + 10\chi_1''\chi_1' + 5\chi_1\chi_1''' + 15(\chi_1')^2\chi_1 + 10\chi_1'\chi_1^3 + 10\chi_1''\chi_1^2 + \chi_1^5$$

$$+f_5(3\chi_0'' + 4\chi_1'\chi_0 + 5\chi_1\chi_0' + \chi_0^2 + 3\chi_1^2\chi_0 + \chi_1''' + 3(\chi_1')^2 + 4\chi_1\chi_1'' + 6\chi_1'\chi_1^2 + \chi_1^4)$$

$$+f_4(2\chi_0' + 2\chi_1\chi_0 + \chi_1'' + 3\chi_1\chi_1' + \chi_1^3) + f_3(\chi_0 + \chi_1' + \chi_1^2) + f_2\chi_1 + f_1.$$

Из равенства (2) и из того, что χ_0 и χ_1 не зависят от выбора x_0 следует

$$P_1 = \lambda,\ P_2 = 0.$$

Коэффициенты f_j находятся из разложений χ_i и λ в ряд по степеням z в окрестности q.

1.1.2 Коммутирующие дифференциальные операторы ранга два, отвечающие спектральным кривым рода $g > 2$

В этом разделе мы обсудим обобщение конструкции из предыдущего параграфа на гиперэллиптические спектральные кривые рода $g > 2$ [64].

В качестве спектральной кривой Γ возьмем гиперэллиптическую кривую, заданную уравнением

$$w^2 = F(z) = z^{2g+2} + c_{2g+1}z^{2g+1} + \dots + c_0,$$

где $c_0 \neq 0$. Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию $\sigma : (z, w) \to (z, -w)$. Пусть $q = (0, \sqrt{c_0})$. Следуя предыдущему параграфу будем предполагать, что $\sigma P_k = P_{g+k}, k = 1, \dots, g$, а функции $\chi_0(x, P)$ и $\chi_1(x, P)$ имеют вид

$$\chi_0(x,P) = -\frac{1}{2}\frac{H_1(x)\gamma_1'(x)}{z-\gamma_1(x)} - \dots - \frac{1}{2}\frac{H_g(x)\gamma_g'(x)}{z-\gamma_g(x)} + \frac{1}{2z} + \frac{\kappa(x)}{2} +$$

$$(-1)^g \frac{1}{2}\frac{w\gamma_1(x)\dots\gamma_g(x)}{z(z-\gamma_1(x))\dots(z-\gamma_g(x))},$$

$$\chi_1(x,P) = -\frac{\gamma_1'(x)}{z-\gamma_1(x)} - \dots - \frac{\gamma_g'(x)}{z-\gamma_g(x)} - \frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1(x)} - \dots - \frac{\gamma_g'(x)}{\gamma_g(x)}.$$

В этом случае по указанной выше схеме уравнения (1.7) сводятся к $g-1$ нелинейным дифференциальным уравнениям на $\gamma_1, \dots, \gamma_g$.

Основное наше наблюдение заключается в следующем. Для того чтобы найти частные решения этих уравнений в качестве спектральной кривой нужно взять кривую, заданную уравнением

$$w^2 = z^{2g+2} + c_{g+1}z^{g+1} + c_0,$$

и положить

$$\gamma_2 = a_2\gamma_1, \dots, \gamma_g = a_g\gamma_1, \ a_j \in \mathbb{C},$$

где γ_1 удовлетворяет уравнению

$$(\gamma_1')^2 = \gamma_1^{g+2} + c\gamma_1, \ c \in \mathbb{C}.$$

Тогда дифференциальные уравнения на γ_k сводятся к алгебраическим уравнениям на a_k, c, c_{g+1}, c_0.

Из-за громоздкости формул при $g = 3$, мы этот случай здесь опустим.

Пусть $g = 4$,

$$F(z) = z^{10} - 3z^5 + 1.$$

Функции γ_j имеют вид

$$\gamma_1 = \frac{-a}{\sqrt{x}}, \ \gamma_2 = \frac{a}{\sqrt{x}}, \ \gamma_3 = \frac{b}{\sqrt{x}}, \ \gamma_4 = \frac{-b}{\sqrt{x}},$$

$$a=(-1)^{\frac{1}{4}}(1+i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}},\ b=\frac{1}{2}(-1)^{\frac{1}{4}}(1+i\sqrt{3})^{\frac{5}{4}}.$$

Функции χ_0 и χ_1 имеют вид

$$\chi_0=-\frac{2\sqrt{2}x^3z-12\sqrt{2}xz^2+2x^4z^3-12x^2z^4+(24+\sqrt{2}x^5)z^5-24(1+w)}{24z(2+\sqrt{2}xz^2+x^2z^4)},$$

$$\chi_1=\frac{z^2(\sqrt{2}+2xz^2)}{2+\sqrt{2}xz^2+x^2z^4}.$$

Оператор, отвечающий мероморфной функции

$$\lambda=\frac{1}{2z^5}+\frac{w}{2z^5}+\frac{3}{4}$$

на Γ с единственным полюсом пятого порядка в q имеет вид

$$L_1=\partial_x^{10}+\frac{5x^3}{12\sqrt{2}}\partial_x^8+\frac{5x^2}{\sqrt{2}}\partial_x^7+\frac{5}{144}(396\sqrt{2}x+x^6)\partial_x^6+\frac{5}{8}(36\sqrt{2}+x^5)\partial_x^5+$$

$$\frac{5x^4(3528+\sqrt{2}x^5)}{3456}\partial_x^4+\frac{5x^3(760+\sqrt{2}x^5)}{192}\partial_x^3+\frac{5x^2(622080+3384\sqrt{2}x^5+x^{10})}{82944}\partial_x^2+$$

$$\frac{5x(36288+960\sqrt{2}x^5+x^{10})}{6912}\partial_x+\frac{23}{4}+\frac{61x^5}{32\sqrt{2}}+\frac{5x^{10}}{1536}+\frac{x^{15}}{995328\sqrt{2}}.$$

Оператор, коммутирующий с L_1 имеет вид

$$L_2=\partial_x^{12}+\frac{x^3}{2\sqrt{2}}\partial_x^{10}+\frac{15x^2}{2\sqrt{2}}\partial_x^9+\frac{2424\sqrt{2}x+5x^6}{96}\partial_x^8+\left(\frac{109}{\sqrt{2}}+\frac{5x^5}{4}\right)\partial_x^7+$$

$$\left(\frac{109x^4}{8}+\frac{5x^9}{864\sqrt{2}}\right)\partial_x^6+\frac{9680x^3+10\sqrt{2}x^8}{128}\partial_x^5+\frac{x^2(6072192+26064\sqrt{2}x^5+5x^{10}}{27648}\partial_x^4+$$

$$\left(294x+\frac{377x^6}{32\sqrt{2}}+\frac{5x^{11}}{1152}\right)\partial_x^3+\frac{42964992+6535296\sqrt{2}x^5+14736x^{10}+\sqrt{2}x^{15}}{331776}\partial_x^2+$$

$$\frac{28237824\sqrt{2}x^4+181376x^9+40\sqrt{2}x^{14}}{884736}\partial_x+$$

$$\frac{463822848\sqrt{2}x^3+9092736x^8+5832\sqrt{2}x^{13}+x^{18}}{23887872}.$$

1.2 Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы

В этом параграфе построены некоторые обыкновенные формально самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2, причем функция Бейкера–Ахиезера этих операторов имеет существенную особенность в точке Вейерштрасса.

Основной результат этого параграфа заключается в следующем. Пусть $l = 2$ и кривая Γ рода 2 является гладким пополнением бесконечно удаленной точкой ∞ кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = F(z) = z^5 + c_3z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0.$$

Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, \quad \sigma(z, w) = (z, -w),$$

которая имеет 6 неподвижных точек ∞, $(z_i, 0)$, где z_i — точки ветвления (корни уравнения $F(z) = 0$).

Мы рассматриваем случай, когда

$$\sigma\chi_1 = \chi_1.$$

Справедлива

Теорема 1.2 *Имеют место равенства*

$$\chi_1 = -\frac{\gamma'}{z-\gamma} - \frac{\gamma'}{z-(\gamma+c)},$$

$$\chi_0 = -\frac{1}{2}\frac{H_1\gamma'}{z-\gamma} - \frac{1}{2}\frac{H_2\gamma'}{z-(\gamma+c)} + \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2}\frac{w}{(z-\gamma)(z-(\gamma+c))},$$

где

$$\kappa = \frac{F(\gamma) - 4\gamma'^4 + 8c\gamma'^2\gamma'' - c^2\gamma''^2 + 2c^2\gamma'\gamma'''}{2c^2\gamma'^2},$$

$$\gamma^{-1}(y) = \int \left(\frac{4}{3P(y)}\right)^{\frac{1}{4}} dy, \tag{1.24}$$

$$P = y^5+\frac{5}{2}cy^4+\frac{1}{3}(10c^2+3c_3)y^3+\frac{1}{2}(5c_3+2c_2+3cc_3)y^2+(c^4+c_1+cc_2+c^2c_3)y+\delta,$$

$y = \gamma(x), \delta, c \in \mathbb{C}$. Функции $H_i(x)$ выражаются через $\gamma(x)$ по формулам (1.27)–(1.29).

Следствие 1.2 *Оператор, отвечающий функции z имеет вид*

$$L = L^* = \partial_x^4 - \kappa\partial_x^2 - \kappa'\partial_x + \frac{\kappa^2}{4} - \frac{\kappa''}{2} - \gamma - \frac{c}{2}.$$

Укажем пример. Пусть кривая Γ задается уравнением

$$w^2 = z^5 - \frac{10}{3}z^3 + \frac{7}{3}z$$

и пусть

$$c = 2, \quad \delta = 1, \quad \gamma = \frac{1024}{x^4} - 1.$$

Тогда L имеет вид

$$\partial_x^4+\left(\frac{x^6}{49152} - \frac{425}{6x^2}\right)\partial_x^2+\left(\frac{x^5}{8192} + \frac{425}{3x^3}\right)\partial_x+\frac{x^{12}}{9663676416}-\frac{245x^4}{589824}+\frac{2569}{144x^4}.$$

Оператор десятого порядка, отвечающий функции w, мы здесь не приводим из-за его громоздкости.

1.2.1 Доказательство теоремы 1.2

Выберем в окрестности $P_i(x)$ локальный параметр $(z-\gamma_i(x))$, а в окрестности ∞ — локальный параметр $k^{-1} = \frac{2}{\sqrt{z}}$. Так как $\sigma\chi_1 = \chi_1$, то можно считать, что

$$\sigma P_1(x) = P_3(x), \quad \sigma P_2(x) = P_4(x),$$

следовательно,

$$\gamma_1 = \gamma_3, \quad \gamma_2 = \gamma_4,$$

$$d_{11} = d_{31}, \quad d_{21} = d_{41}.$$

Таким образом в силу (1.6) и (1.9) имеют место равенства

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(\chi_1 + \sigma\chi_1) = \frac{-\gamma_1'}{z-\gamma_1} + \frac{-\gamma_2'}{z-\gamma_2},$$

$$d_{11} = \frac{-\gamma_2'}{\gamma_1 - \gamma_2}, \ d_{21} = \frac{-\gamma_1'}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Так как функция $\chi_0 + \sigma\chi_0$ определена на $\mathbb{C}$ (не зависит от w), то $\chi_0 + \sigma\chi_0$ не может иметь полюс первого порядка в ∞, следовательно, из (1.8) и (1.6) получаем

$$\chi_0 + \sigma\chi_0 = -\frac{(\alpha_1 + \alpha_3)\gamma_1'}{z - \gamma_1} - \frac{(\alpha_2 + \alpha_4)\gamma_2'}{z - \gamma_2} + \kappa, \tag{1.25}$$

$$(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2 = \frac{(\alpha_3 - \alpha_1)^2\gamma_1'^2}{(z - \gamma_1)^2} + \frac{2(d_{10} - d_{30})(\alpha_3 - \alpha_1)\gamma_1'}{z - \gamma_1}$$
$$+ \frac{(\alpha_4 - \alpha_2)^2\gamma_2'^2}{(z - \gamma_2)^2} + \frac{2(d_{20} - d_{40})(\alpha_4 - \alpha_2)\gamma_2'}{z - \gamma_2} + z + \kappa_1,$$

где $\kappa(x)$ и $\kappa_1(x)$ — некоторые функции. Из равенства (1.25) получаем

$$d_{10} + d_{30} = -\frac{(\alpha_2 + \alpha_4)\gamma_2'}{\gamma_1 - \gamma_2} + \kappa,$$

$$d_{20} + d_{40} = -\frac{(\alpha_1 + \alpha_3)\gamma_1'}{\gamma_2 - \gamma_1} + \kappa,$$

$$d_{10} + d_{30} - (d_{20} + d_{40}) = -\frac{(\alpha_2 + \alpha_4)\gamma_2'}{\gamma_1 - \gamma_2} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_3)\gamma_1'}{\gamma_2 - \gamma_1}. \tag{1.26}$$

Функция $(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2$ имеет нули в пяти точках ветвления $(z_i, 0)$, следовательно, имеет место равенство

$$F(z) = (\chi_0 - \sigma\chi_0)^2(z - \gamma_1)^2(z - \gamma_2)^2,$$

откуда

$$F_1 = (\alpha_3 - \alpha_1)^2 = \frac{F(\gamma_1)}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2\gamma_1'^2},$$

$$F_2 = (\alpha_4 - \alpha_2)^2 = \frac{F(\gamma_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2\gamma_2'^2},$$

$$G_1 = (d_{10} - d_{30})(\alpha_3 - \alpha_1) = \frac{1}{2(\gamma_1 - \gamma_2)^3\gamma_1'}\left(-2c_0 + 3\gamma_1^5 - 5\gamma_1^4\gamma_2\right.$$
$$\left.-c_1\gamma_2 - 3c_3\gamma_1^2\gamma_2 - \gamma_1(c_1 + 2c_2\gamma_2) + \gamma_1^3 c_3\right),$$

$$G_2=(d_{20}-d_{40})(\alpha_4-\alpha_2)=\frac{1}{2(\gamma_1-\gamma_2)^3\gamma_2'}\big(2c_0+c_1\gamma_2-c_3\gamma_2^2$$
$$-3\gamma_2^5+\gamma_1(c_1+2c_2\gamma_2+3c_3\gamma_2^2+5\gamma_2^4))\big).$$

Теперь найдем $\alpha_1+\alpha_3$ и $\alpha_4+\alpha_2$. Из уравнений (1.7) имеем тождества

$$d_{10}-d_{30}=\alpha_1^2-\alpha_3^2+d_{11}(\alpha_1-\alpha_3)-(\alpha_1'-\alpha_3'),$$

$$d_{20}-d_{40}=\alpha_2^2-\alpha_4^2+d_{21}(\alpha_2-\alpha_4)-(\alpha_2'-\alpha_4').$$

Умножим эти тождества на $\alpha_3-\alpha_1$ и на $\alpha_4-\alpha_2$, получим

$$G_1=(\alpha_1^2-\alpha_3^2)(\alpha_3-\alpha_1)-d_{11}F_1+\frac{F_1'}{2},$$

$$G_2=(\alpha_2^2-\alpha_4^2)(\alpha_4-\alpha_2)-d_{21}F_2+\frac{F_2'}{2}.$$

Откуда

$$H_1=\alpha_1+\alpha_3=\frac{\frac{1}{2}F_1'-d_{11}F_1-G_1}{F_1}=\frac{2\gamma_1'\gamma_2'+(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_1''}{(\gamma_1-\gamma_2)\gamma_1'}, \tag{1.27}$$

$$H_2=\alpha_2+\alpha_4=\frac{\frac{1}{2}F_2'-d_{21}F_2-G_2}{F_2}=\frac{-2\gamma_1'\gamma_2'+(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_2''}{(\gamma_1-\gamma_2)\gamma_2'}. \tag{1.28}$$

Следовательно,

$$\alpha_1^2+\alpha_3^2=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_3)^2+\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_3)^2=\frac{1}{2}H_1^2+\frac{1}{2}F_1,$$

$$\alpha_2^2+\alpha_4^2=\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_4)^2+\frac{1}{2}(\alpha_2-\alpha_4)^2=\frac{1}{2}H_2^2+\frac{1}{2}F_2.$$

Из уравнений (1.7) выводим

$$d_{10}+d_{30}=\alpha_1^2+\alpha_3^2-(\alpha_1'+\alpha_3')+d_{11}(\alpha_1+\alpha_3),$$

$$d_{20}+d_{40}=\alpha_2^2+\alpha_4^2-(\alpha_2'+\alpha_4')+d_{21}(\alpha_2+\alpha_4).$$

Значит,

$$d_{10}+d_{30}=\frac{H_1^2}{2}+\frac{F_1}{2}-H_1'+d_{11}H_1,$$

$$d_{20} + d_{40} = \frac{H_2^2}{2} + \frac{F_2}{2} - H_2' + d_{21} H_2.$$

Таким образом мы выразили $\alpha_1 + \alpha_3$, $\alpha_2 + \alpha_4$, $d_{10} + d_{30}$ и $d_{20} + d_{40}$ через γ_1 и γ_2. Подставим полученные выражения в (1.28). Получим уравнение на γ_1 и γ_2:

$$4\gamma_1'^4\gamma_2'^2 + \gamma_2'^2(c_0 + c_3\gamma_1^3 + c_4\gamma_1^4 + \gamma_1^5 - \gamma_2^2\gamma_1''^2 + \gamma_1^2(c_2 - \gamma_1''^2) + \gamma_1(c_1 + 2\gamma_2\gamma_1''^2))$$

$$+2(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_1'^3\gamma_2'\gamma_2''+2(\gamma_1-\gamma_2)\gamma_1'\gamma_2'^2((\gamma_1-\gamma_2)\gamma_1'''-\gamma_2'\gamma_1'')-\gamma_1'^2(c_0+c_3\gamma_2^3+c_4\gamma_2^4+\gamma_2^5$$

$$+4\gamma_2'^4-\gamma_1^2\gamma_2''^2+6\gamma_1\gamma_2'^2(\gamma_1''+\gamma_2'')+2\gamma_1^2\gamma_2'\gamma_2'''+\gamma_2^2(c_2-\gamma_2''^2+2\gamma_2'\gamma_2''')+\gamma_2(c_1+2\gamma_1\gamma_2''^2$$

$$-6\gamma_2'^2(\gamma_1'' + \gamma_2'') - 4\gamma_1\gamma_2'\gamma_2''')) = 0.$$

При

$$\gamma_1 = \gamma, \quad \gamma_2 = \gamma + c, \tag{1.29}$$

это уравнение принимает вид

$$(c^4 + c_1 + cc_2 + c^2c_3) + (5c_3 + 2c_2 + 3cc_3)\gamma + (10c^2 + 3c_3)\gamma^2$$

$$+10c\gamma^3 + 5\gamma^4 - 16\gamma'^2\gamma'' = 0,$$

которое интегрируется в квадратурах (см. (1.24)). Теорема 1.2 доказана.

Глава 2

Разностные коммутирующие операторы Кричевера–Новикова с полиномиальными коэффициентами

В этой главе мы построим дискретные коммутирующие операторы ранга 2, отвечающие спектральной кривой рода 1, коэффициенты которых являются полиномами от дискретной переменной n.

2.1 Уравнения Кричевера–Новикова на дискретную динамику параметров Тюрина

Как уже отмечалось во введении, для коммутирующих разностных операторов

$$L_1 = \sum_{N_-}^{N_+} u_i(n)T^i, \quad L_2 = \sum_{M_-}^{M_+} v_i(n)T^i,$$

где $n \in \mathbb{Z}$ — дискретная переменная, T — оператор сдвига по дискретной переменной

$$Tf(n) = f(n+1),$$

существует спектральная кривая Γ, заданная в $\mathbb{C}^2$ некоторым полиномом $Q(\lambda,\mu)$, которая параметризует их совместные собственные функции и собственные значения

$$L_1\psi(n,P)=\lambda\psi(n,P),\quad L_2\psi(n,P)=\mu\psi(n,P),\quad P=(\lambda,\mu)\in\Gamma.$$

Пусть спектральная кривая Γ задана в $\mathbb{C}^2$ с координатами (z,w) уравнением

$$w^2=F(z)=z^4+c_2z^2+c_1z+1$$

и пусть $q=(0,1)\in\Gamma$ — выделенная точка. Кривая Γ допускает инволюцию

$$\sigma:\Gamma\to\Gamma,\ \ \sigma(z,w)=(z,-w).$$

При $l=2$ матрица $\chi(n,P)$ (см. введение) имеет вид

$$\chi(n,P)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \chi_1(n,P) & \chi_2(n,P)\end{pmatrix},\quad P=(z,w)\in\Gamma.$$

Мы рассматриваем случай, когда инволюция σ не изменяет χ_1, т.е.

$$\chi_1(n,P)=\chi_1(n,\sigma(P)).$$

Имеет место

Теорема 2.1 *Функции $\chi_1(x,P)$ и $\chi_2(x,P)$ имеют вид*

$$\chi_1(n,P)=\frac{c(n)}{z-\gamma(n)}+\frac{c(n)}{\gamma(n)-\gamma(n+1)},$$

$$\chi_2(n,P)=\frac{1}{2z}+\frac{a(n)}{2(z-\gamma(n))}+\frac{w\gamma(n)}{2z(\gamma(n)-z)}+d(n),$$

где

$$c(n)=\frac{\gamma(n-1)(a^2(n)-F(\gamma(n))}{4\gamma(n)(\gamma(n)-\gamma(n-1))},\tag{2.1}$$

$$d(n)=\frac{(a(n+1)-1)\gamma(n)+(a(n)+1)\gamma(n+1)}{2(\gamma(n)-\gamma(n+1))\gamma(n+1)},$$

$\gamma(n),a(n)$ — произвольные функции дискретной переменной $n\in\mathbb{Z}$.

Функция $\lambda_1(z)$ на кривой Γ, имеющая единственный полюс второго порядка в точке q, выглядит следующим образом

$$\lambda_1 = \frac{1}{2z^2} + \frac{c_1}{4z} + \frac{w}{2z^2}.$$

Обозначим через $b_i(n), e_i(n)$ и p_i коэффициенты разложений функций χ_1, χ_2 и λ_1 в ряд в окрестности q:

$$\chi_1(n,z) = b_0(n) + b_1(n)z + \ldots,$$

$$\chi_2(n,z) = \frac{1}{z} + e_0(n) + e_1(n)z + \ldots,$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{z^2} + \frac{p_1}{z} + p_0 + \ldots,$$

$$p_0 = -\frac{c_1^2}{16} + \frac{c_2}{4}, \quad p_1 = \frac{c_1}{2}.$$

Коэффициенты $b_i, e_i,\ i = 0, 1$ выражаются через $\gamma(n), a(n)$ по формулам (2.5)–(2.8). Ниже мы объясним как с помощью теоремы 2.1 найти коммутирующие разностные операторы, и в частности, оператор $L(\lambda_1)$, отвечающий λ_1.

Следствие 2.1 *Оператор $L(\lambda_1)$ имеет следующий вид*

$$L(\lambda_1) = T^2 + u_1(n)T + u_0(n) + u_{-1}(n)T^{-1} + u_{-2}(n)T^{-2},$$

где

$$u_1(n) = p_1 - e_0(n) - e_0(n+1),$$

$$u_0(n) = p_0 - b_0(n) - b_0(n+1) - p_1 e_0(n) + e_0^2(n) - e_1(n) - e_1(n+1),$$

$$u_{-1}(n) = -b_1(n) + b_0(n)\left(-p_1 - \frac{b_1(n-1)}{b_0(n-1)} + e_0(n-1) + e_0(n)\right),$$

$$u_{-2}(n) = b_0(n)b_0(n-1).$$

Основным результатом этой главы является

Теорема 2.2 *Если функциональные параметры $a(n), \gamma(n)$ положить равными*

$$a(n) = n + 1,\ \gamma(n) = n,$$

то операторы имеют полиномиальные по n коэффициенты. При этом

$$L_2 = T^2 + 2(n+2)T - \left(\frac{n^4}{2} + n^3 - \frac{1}{2}(1-c_2)n^2 - \frac{1}{2}(8-c_1-c_2)n\right) -$$

$$-\frac{1}{2}(n^3 + (c_2-1)n + c_1 - 2)(n^2+n-1)T^{-1}+$$

$$\frac{1}{16}(n^3+(c_2-1)n+c_1-2)(n^3-3n^2+(2+c_2)n+c_1-c_2-2)(n+1)(n-2)T^{-2}.$$

Оператор третьего порядка мы не приводим в теореме 2.2 из-за его громоздкости. Укажем пример. Пусть спектральная кривая задана уравнением

$$w^2 = z^4 + z^2 + 1,$$

тогда

$$L_2 = T^2 + 2(n+2)T - \frac{1}{2}\left(n^4 + 2n^3 - 7n - 5\right) - \frac{1}{2}\left(n^3 - 2\right)\left(n^2 + n - 1\right)T^{-1}$$

$$+\frac{1}{16}\left(n^3 - 3n^2 + 3n - 3\right)(n+1)(n-2)\,T^{-2},$$

$$L_3 = T^3 + \left(3n + \frac{15}{2}\right)T^2 - \frac{3}{4}\left(n^4 + 4n^3 + 5n^2 - 8n - 14\right)T$$

$$-\frac{3}{4}\left(2n^5 + 7n^4 + 10n^3 + n^2 - 12n - 5\right)$$

$$+\frac{3}{16}\left(n^8 - 2n^6 - 12n^5 - 3n^4 + 10n^3 + 20n^2 + 6n - 12\right)T^{-1}$$

$$+\frac{3}{32}n\left(2n^2 - n - 5\right)\left(n^6 - 3n^5 + 3n^4 - 5n^3 + 6n^2 - 6n + 6\right)T^{-2}-$$

$$\frac{1}{64}(n-3)\left(n^2-1\right)\left(n^3-2\right)\left(n^3-6n^2+12n-10\right)\left(n^3-3n^2+3n-3\right)T^{-3}.$$

Напомним уравнения Кричевера–Новикова на дискретную динамику параметров Тюрина.

Как уже отмечалось, функцию $\psi(n,P)$ при $l>1$ найти в явном виде не удается. Обозначим через $\Psi(n,P)$ матрицу Вронского

$$\Psi^{ij}(n,P) = \psi^j(n+i),$$

где $\psi^j(n,P)$, $1 \leq j \leq l$ — некоторый базис в пространстве совместных собственных функций. Как показано в [12] число нулей функции $\det\Psi(n,P)$ равно lg, где g — род спектральной кривой Γ. Обозначим их через

$$\gamma_1(n), \ldots, \gamma_{lg}(n).$$

Через $\alpha_j(n)$ обозначим векторы такие, что

$$\alpha_j(n)\Psi(n,\gamma_j(n)) = 0.$$

Эти векторы определены с точностью до пропорциональности. Набор пар $(\gamma_j(n),\alpha_j(n))$ называется параметрами Тюрина. Параметры Тюрина однозначно определяют стабильное голоморфное расслоение ранга l над кривой Γ. Следующая теорема [12] определяет дискретную динамику параметров Тюрина.

- Матричная функция $\chi(n,P)$ имеет простые полюса в точках $\gamma_j(n)$. Имеют место соотношения на вычеты матричных элементов

  $$\alpha_s^j(n)\mathrm{Res}_{\gamma_s(n)}\chi^{mi}(n,P) = \alpha_s^i(n)\mathrm{Res}_{\gamma_s(n)}\chi^{mj}(n,P). \tag{2.2}$$

  Точки $\gamma_s(n+1)$ являются нулями определителя матрицы $\chi(n,P)$, т.е.

  $$\det\chi(n,\gamma_s(n+1)) = 0. \tag{2.3}$$

  Вектор $\alpha_j(n+1)$ удовлетворяет уравнению

  $$\alpha_j(n+1)\chi(n,\gamma_j(n+1)) = 0. \tag{2.4}$$

Кроме полюсов $\gamma_j(n)$ одна из компонент χ имеет простой полюс в выделенной точке q.

Из теоремы Римана–Роха следует, что матричная функция $\chi(n,P)$ однозначно восстанавливается по параметрам Тюрина $(\gamma_j(n),\alpha_j(n))$ и l произвольным функциональным параметрам.

Эта теорема позволяет найти операторы ранга 2, отвечающие эллиптической кривой. Ниже мы приведем соответствующую теорему для простоты только в случае, когда голоморфная инволюция на эллиптической кривой переставляет местами полюса функции χ_1. Представим эллиптическую кривую Γ как фактор $\mathbb{C}/\Lambda$, где Λ — некоторая решетка в $\mathbb{C}$ и пусть z — координата в $\mathbb{C}$. Предположим, что точки $\gamma_1(n)$ и $\gamma_2(n)$ переставляются голоморфной инволюцией на Γ

$$\sigma(\gamma_1(n)) = \gamma_2(n),$$

где $\sigma(z) = -z$. Имеет место теорема [12]

- Оператор отвечающий функции $\wp(z)$ имеет вид

$$L = L_2^2 - \wp(\gamma(n)) - \wp(\gamma(n-1)),$$

  где

$$L_2 = T + v(n) + c(n)T^{-1},$$

$$c(n+1) = \frac{1}{4}(s^2(n) - 1)F(\gamma(n+1), \gamma(n))F(\gamma(n-1), \gamma(n)),$$

$$v(n+1) = \frac{1}{2}(s(n)F(\gamma(n+1), \gamma(n)) - s(n+1)F(\gamma(n), \gamma(n+1)),$$

$$F(u, v) = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta(v),$$

  $s(n), \gamma(n)$ — произвольные функциональные параметры.

Из приведенных формул для коэффициентов оператора L видно, что коэффициенты выражены через функциональные параметры $s(n)$ и $\gamma(n)$ с помощью $\wp$ и ζ-функций Вейерштрасса. В следствии 2.1 и теореме 2.2 найдены условия, когда эти коэффициенты являются элементарными функциями, и в частности, полиномами.

2.2 Доказательство теорем 2.1 и 2.2

Из нашего предположения об инвариантности $\chi_1(n,P),\ P=(z,w)\in\Gamma$ под действием инволюции σ следует, что $\chi_1(n,P)$ имеет вид

$$\chi_1(n,P)=\frac{c(n)}{z-\gamma(n)}+d_0(n),$$

где $c(n),\gamma(n)$ и $d_0(n)$ — некоторые функции дискретной переменной. Отметим, что функция $\chi_1(n,P)$ имеет полюсы в точках

$$P(n)=(\gamma(n),\sqrt{F(\gamma(n))}),\quad \sigma P(n)=(\gamma(n),-\sqrt{F(\gamma(n))}).$$

Из равенств (2.3), которые в нашем случае эквивалентны

$$\chi_1(n,P(n+1))=\chi_1(n,\sigma P(n+1))=0,$$

получаем

$$\chi_1(n,P)=\frac{c(n)}{z-\gamma(n)}+\frac{c(n)}{\gamma(n)-\gamma(n+1)}.$$

Функцию χ_2 будем искать в виде

$$\chi_2(n,P)=\frac{1}{2z}+\frac{a(n)}{2(z-\gamma(n))}+\frac{w\gamma(n)}{2z(\gamma(n)-z)}+d(n),$$

где $a(n)$ и $d(n)$ — некоторые функции. Отметим, что $\chi_2(n,P)$ имеет полюсы в точках $P(n),\sigma P(n)$ и Q, при этом $\mathrm{Res}_Q\chi_2=1$.

Векторы α_1 и α_2 определены с точностью до пропорциональности, поэтому можно считать, что они имеют вид

$$\alpha_1(n)=(a_1(n),1),\quad \alpha_2(n)=(a_2(n),1).$$

Тогда из (2.4) получаем

$$a_1(n)=-\chi_2(n-1,P(n))=$$

$$\frac{1}{2\gamma(n)}+\frac{a(n-1)}{2(\gamma(n)-\gamma(n-1))}+\frac{\sqrt{F(\gamma(n))}\gamma(n-1)}{2\gamma(n)(\gamma(n-1)-\gamma(n))}+d(n-1),$$

$$a_2(n) = -\chi_2(n-1, \sigma P(n)) =$$

$$\frac{1}{2\gamma(n)} + \frac{a(n-1)}{2(\gamma(n)-\gamma(n-1))} - \frac{\sqrt{F(\gamma(n))}\gamma(n-1)}{2\gamma(n)(\gamma(n-1)-\gamma(n))} + d(n-1).$$

Далее, вычеты функций χ_1 и χ_2 в полюсах $P(n)$ и $\sigma P(n)$ равны

$$\mathrm{Res}_{P(n)}\chi_1 = \mathrm{Res}_{\sigma P(n)}\chi_1 = c(n),$$

$$\mathrm{Res}_{P(n)}\chi_2 = \frac{1}{2}(a(n) - \sqrt{F(\gamma(n))}),$$

$$\mathrm{Res}_{\sigma P(n)}\chi_2 = \frac{1}{2}(a(n) + \sqrt{F(\gamma(n))}).$$

Из равенств (2.2), которые в нашем случае принимают вид

$$\mathrm{Res}_{P(n)}\chi_1 = a_1(n)\mathrm{Res}_{P(n)}\chi_2,$$

$$\mathrm{Res}_{\sigma P(n)}\chi_1 = a_2(n)\mathrm{Res}_{\sigma P(n)}\chi_2,$$

получаем

$$c(n) = \frac{\gamma(n-1)(a^2(n) - F(\gamma(n))}{4\gamma(n)(\gamma(n)-\gamma(n-1)},$$

$$d(n) = \frac{(a(n+1)-1)\gamma(n) + (a(n)+1)\gamma(n+1)}{2(\gamma(n)-\gamma(n+1))\gamma(n+1)}.$$

Теорема 2.1 доказана.

Теперь мы можем найти коэффициенты оператора L_2. Выразим $\psi(n+2, P)$ и $\psi(n-2, P)$ через $\psi(n-1, P)$, $\psi(n, P)$, χ_1 и χ_2. Для этого воспользуемся тождеством

$$\psi(n+1) = \psi(n-1)\chi_1(n) + \psi(n)\chi_2(n).$$

Откуда

$$\psi(n+2) = \psi(n-1)\chi_1(n)\chi_2(n+1) + \psi(n)(\chi_1(n+1) + \chi_2(n)\chi_2(n+1)),$$

$$\psi(n-2) = -\psi(n-1)\frac{\chi_2(n-1)}{\chi_1(n-1)} + \frac{\psi(n)}{\chi_1(n-1)}.$$

Теперь заменим $T^2\psi(n)$ и $T^{-2}\psi(n)$ в равенстве

$$L_2\psi = (T^2 + u_1(n)T + u_0(n) + u_{-1}(n)T^{-1} + u_{-2}(n)T^{-2})\psi(n) = \lambda_1\psi(n)$$

на соответствующие выражения. Получим

$$P_1(n,P)\psi(n,P) + P_2(n,P)\psi(n-1,P) = \lambda_1\psi(n,P),$$

где

$$P_1(n) = \chi_1(n+1) + \chi_2(n+1)\chi_2(n) + u_1(n)\chi_2(n) + u_0(n) + \frac{u_{-2}(n)}{\chi_1(n-1)},$$

$$P_2(n) = \chi_2(n+1)\chi_1(n) + u_1(n)\chi_1(n) + u_{-1}(n) - u_{-2}(n)\frac{\chi_2(n-1)}{\chi_1(n-1)}.$$

В пространстве совместных собственных функций операторов L_2 и L_3 можно выбрать базис ψ_1 и ψ_2 нормированный условиями

$$\psi_1(n_0,P) = 1, \quad \psi_2(n_0,P) = 0,$$

при этом функции χ_1, χ_2 не зависят от точки нормировки n_0 (см. [12]), следовательно, мы имеем тождества

$$P_1(n,P) - \lambda_1 = 0, \quad P_2(n,P) = 0.$$

Теперь, поскольку функции χ_1 и χ_2 нами найдены в теореме 1, коэффициенты $u_i(n)$ оператора L_2 можно найти из разложений $P_1 - \lambda_1$ и P_2 в ряд в окрестности точки q.

Коэффициенты b_j, e_j разложений χ_1 и χ_2 в ряд в окрестности q выражаются через функциональные параметры $a(n)$ и $\gamma(n)$ по формулам

$$b_0(n) = \frac{\gamma(n-1)\gamma(n+1)(F(\gamma(n)) - a^2(n))}{4(\gamma(n-1)-\gamma(n))(\gamma(n)-\gamma(n+1))\gamma(n)^2}, \tag{2.5}$$

$$b_1(n) = \frac{\gamma(n-1)(a^2(n) - F(\gamma(n))}{4(\gamma(n-1)-\gamma(n))\gamma^3(n)}, \tag{2.6}$$

$$e_0(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2} + \frac{1}{\gamma(n)} - \frac{a(n)}{\gamma(n)} + \right.$$

$$\left. \frac{(a(n+1)-1)\gamma(n)+(a(n)+1)\gamma(n+1)}{(\gamma(n)-\gamma(n+1))\gamma(n+1)} \right), \tag{2.7}$$

$$e_1(n) = \frac{8-8a(n)+4c_1\gamma(n)-(c_1^2-4c_2)\gamma^2(n)}{16\gamma^2(n)}. \tag{2.8}$$

Аналогично находится оператор, отвечающий мероморфной функции с полюсом третьего порядка в q. Прямой проверкой устанавливается, что при

$$a(n) = n+1, \ \ \gamma(n) = n$$

коэффициенты операторов являются полиномами по n. Теорема 2.2 доказана.

Глава 3

Коммутирующие дифференциальные операторы нескольких переменных с матричными коэффициентами, отвечающие многомерным алгебраическим многообразиям

В этой главе мы построим коммутативные кольца дифференциальных операторов нескольких переменных с матричными коэффициентами, чьи совместные собственные вектор-функции и собственные числа параметризуются точками многомерных алгебраических многообразий, а также связанные с ними эволюционные уравнения.

3.1 Формулировка основных результатов

Обозначим через X^g главно поляризованное абелево многообразие

$$X^g = \mathbb{C}^g/\{\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g\},$$

где Ω — симметричная комплексная матрица с положительно определенной мнимой частью. Через Q обозначим неособый тэта-дивизор, заданный уравнением $\vartheta(z) = 0$, где $\vartheta(z)$ — тэта-функция. Введем обозначения

$$Y_{a_j} = \{z \in X^g : \vartheta_j(z - a_j) = 0,\ a_j \in X^g\},$$

$$Y^k = Y_{a_1} \cap \cdots \cap Y_{a_k},$$

$$Q^k = Y^k \cap Q, k < g - 1.$$

Далее будем предполагать, что многообразие Y^j трансверсально пересекается с $Y_{a_{j+s}}$ и с $Y, j + s \leq k$, предположим, что Y^j и Q^j являются гладкими неприводимыми и пусть также набор $a_1, \ldots, a_k$ находится в общем положении (т.е. принадлежит некоторому открытому всюду плотному множеству в $X^g \times \cdots \times X^g$).

Имеет место

Теорема 3.1 *Существует вложение L_k кольца мероморфных функций на многообразии Y^k с полюсом на Q^k в кольцо $g! \times g!$-матричных дифференциальных операторов по $g - k$ переменным с аналитическими в окрестности 0 коэффициентами*

$$L_k : \mathcal{A}_k \to \mathrm{Mat}(g!, g - k).$$

Образом вложения является коммутативное кольцо матричных дифференциальных операторов по $(g - k)$ переменным.

Двумерные операторы $L_k(\mathcal{A}_k)$ с двояко-периодическими коэффициентами являются конечнозонными на любом уровне энергии E, т.е. блоховские вектор-функции (собственные одновременно для оператора $L_k(\lambda), \lambda \in \mathcal{A}_k$ и для операторов сдвига на периоды) параметризуются римановой поверхностью конечного рода, заданной в спектральной поверхности уравнением $\lambda = E$.

Если размерность Y^k равна 2, то используя формулу присоединения и теорему Лефшеца о вложении, можно показать, что размерность Кодаиры спектральной поверхности Y^k равна 2, т.е. эта поверхность является поверхностью общего типа.

Теорему 3.1 мы докажем, используя результаты Накаяшики [15] (см. также [16]), который построил мономорфизм кольца мероморфных функций на X^g с полюсом на Y в кольцо g-мерных $g! \times g!$-матричных дифференциальных операторов. Двумерные 2×2-матричные такие операторы (операторы Накаяшики) изучались в работах автора [17] и [18]. В частности, в [18] доказано, что не существует двумерных вещественных операторов Накаяшики конечнозонных на любом уровне энергии с гладкими двояко-периодическими коэффициентами, но существуют двумерные вещественные конечнозонные на любом уровне энергии операторы Накаяшики с сингулярными двояко-периодическими коэффициентами. В [18] также указаны гладкие вещественные операторы Накаяшики, среди которых имеется оператор второго порядка H, по диагонали которого стоят операторы Шредингера в двояко-периодических магнитных полях и с двояко-периодическими потенциалами вида

$$(\partial_{y_1} - A_1)^2 + (\partial_{y_2} - A_2)^2 + u(y),\ y = (y_1, y_2).$$

Магнитно-блоховские вектор-функции оператора H (собственные одновременно для H и для операторов магнитных трансляций T_j^*, $T_j^*\varphi(y) = \varphi(y+e_j)\exp(2\pi y_j)$, $j = 1, 2$, e_j — периоды) на каждом уровне энергии параметризуются римановой поверхностью конечного рода. Это свойство является аналогом конечнозонности на любом уровне энергии для операторов с двояко-периодическими коэффициентами.

В частном случае, когда $g = 3$, $r = 1$, а в качестве спектральной поверхности служит тэта-дивизор, теорема 1 была доказана Накаяшики [15].

Ротштейн в [19] построил другой пример коммутирующих матричных дифференциальных операторов. В этом примере $g = 5, r = 1$, размерность матриц $N = 5$, а в качестве спектральной поверхности служит поверхность Фано.

Напомним конструкцию Кричевера построения коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов ранга 1. Пусть Γ — риманова поверхность рода g, $P = p_1 + \cdots + p_g$ — неспециальный положительный дивизор на Γ, ∞ — точка на Γ, отличная от точек дивизора P, k^{-1} — локальный параметр в ∞, $k^{-1}(\infty) = 0$. Существует функция Бейкера–Ахиезера $\psi(p, x), p \in \Gamma$, которая мероморфна на $\Gamma \backslash \infty$, множество ее полюсов совпадает с P и не зависит от x, в окрестности ∞ функция

$\psi \exp(-kx)$ аналитична. Для любой мероморфной функции $f(p)$ на Γ с единственным полюсом в ∞ существует единственный дифференциальный оператор $L(f)$ такой, что

$$L(f)\psi = f\psi.$$

Для различных f операторы $L(f)$ попарно коммутируют. Отсюда вытекает сопоставление спектральных данных коммутирующих операторов Берчналла–Чаунди–Кричевера и спектральных данных операторов $L_k(\mathcal{A}_k)$

$$\{\Gamma, \infty, P, f\} \longleftrightarrow \{Y^k, Q^k, Q_c^k, \lambda\},$$

где $Q_c^k = Y^k \cap Y_c, c \in X^g$ — некоторый ненулевой элемент.

Как и в одномерном случае можно построить операторы L_α, коэффициенты которых зависят от времени и удовлетворяют эволюционным уравнениям

$$[\partial_{t_\alpha} - L_\alpha, \partial_{t_\beta} - L_\beta] = 0,$$

где L_α и L_β — $g! \times g!$-матричные дифференциальные операторы по $g-k$ переменным, коэффициенты которых зависят от t_α и t_β, α и β принадлежат счетному множеству индексов.

Как уже отмечалось в [18] коэффициенты операторов Накаяшики не могут удовлетворять эволюционным уравнениям типа иерархии Кадомцева–Петвиашвили.

В параграфе 3.2, используя преобразование Фурье–Мукаи, мы введем модуль Бейкера–Ахиезера над кольцом дифференциальных операторов, элементы которого выражаются через векторные тэта-функции. Теорема 3.1 вытекает из теоремы 3.2 о свободности модуля Бейкера–Ахиезера.

3.2 Модули Бейкера–Ахиезера

В этом параграфе мы сформулируем теорему Накаяшики [15]. Используя преобразование Фурье–Мукаи, мы введем модули Бейкера–Ахиезера M_c^j над кольцами дифференциальных операторов $\mathcal{D}_j$. В следствии 3.2 будет показано, что отображение ограничения функций из M_c^j на подмногообразие $Y^{j+1} \subset Y^j$ задает эпиморфизм $M_c^j \to M_c^{j+1}$. В теореме 3.2 будет доказана свободность $\mathcal{D}_j$-модуля M_c^j. В следствии 3.3 мы покажем, что коэффициенты операторов $L_k(\mathcal{A}_k)$ удовлетворяют эволюционным уравнениям.

Через $\mathrm{Pic}^0(X^g)$ обозначим многообразие Пикара X^g. В нашем случае X^g и $\mathrm{Pic}^0(X^g)$ изоморфны. Обозначим через $\mathcal{P}$ расслоение Пуанкаре над $X^g \times \mathrm{Pic}^0(X^g)$. Сечения $\mathcal{P}$ при подъеме на $\mathbf{C}^g \times \mathbf{C}^g$ задаются функциями $f(z,x)$ такими, что

$$f(z+\Omega m_1+n_1, x+\Omega m_2+n_2) = \exp(-2\pi i(\langle m_1,x\rangle + \langle m_2,z\rangle))f(z,x),$$

где $m_j, n_j \in \mathbf{Z}^g$.

Пусть Y является нулями тэта-функции ϑ, которая обладает свойством

$$\vartheta(z+\Omega m+n) = \exp(-\pi i\langle m,\Omega m\rangle - 2\pi i\langle m,z\rangle)\vartheta(z).$$

Через $\mathcal{L}_c$ обозначим линейное расслоение над X^g, сечения которого задаются функциями $f(z)$ на $\mathbf{C}^g$ со свойством

$$f(z+\Omega m+n) = \exp(-2\pi i\langle m,c\rangle)f(z), m,n \in \mathbf{Z}^g, c \in \mathbf{C}^g. \tag{3.1}$$

Отметим, что расслоение $\mathcal{L}_c$ инвариантно относительно сдвигов на элементы X^g. Пусть $\mathcal{L}$ — пространство глобальных сечений расслоения $\mathcal{L}_0$ с полюсом на Y, π — проекция $X^g \times \mathrm{Pic}^0(X^g) \to X^g$. Обозначим через $F(Y,\mathcal{L}_0)(U)$ пространство мероморфных сечений расслоения $\pi^*\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{P}$ над $X^g \times U$ с полюсом на $Y \times U$, где U — открытое подмножество в $\mathrm{Pic}^0(X^g)$. При фиксированном $x \in U$ пространство $F(Y,\mathcal{L}_0)(U)$ совпадает с пространством $\cup_{j=1}^{\infty}\mathrm{H}^0(X^g,\mathcal{L}_x(jY))$. Через $\mathcal{L}_x(jY)$ будем иногда обозначать расслоение $\mathcal{L}_x \otimes [jY]$, где $[jY]$ — линейное расслоение, ассоциированное с дивизором jY. Расслоения и соответствующие им пучки аналитических сечений мы для простоты обозначаем одним и тем же символом. Пространство $\mathrm{H}^0(X^g, \mathcal{L}_x(jY))$ можно отождествить с пространством глобальных сечений расслоения $\mathcal{L}_x$ с полюсом на Y, причем порядок полюса не превышает j.

Пространство $F(Y, \mathcal{L}_0)(U)$ называется преобразованием Фурье–Мукаи над U пространства $\mathcal{L}$.

На $F(Y, \mathcal{L}_0)(U)$ действуют операторы ковариантного дифференцирования

$$\nabla_j = \partial_{x_j} - \partial_{z_j} \log \vartheta(z) : F(Y, \mathcal{L}_0)(U) \to F(Y, \mathcal{L}_0)(U),$$
$$\nabla_k \nabla_j = \nabla_j \nabla_k,\ k, j = 1, \ldots, g,$$

которые снабжают $F(Y, \mathcal{L}_0)(U)$ структурой модуля над кольцом

$$\mathcal{O}_U[\nabla_1, \ldots, \nabla_g],$$

где $\mathcal{O}_U$ — кольцо аналитических функций на U. Из построения следует, что $F(Y, \mathcal{L}_0)(U)$ является также модулем над кольцом мероморфных функций $\mathcal{A}_0$ на X^g с полюсом на Y.

Обозначим через $\mathcal{D}_g$ кольцо дифференциальных операторов

$$\mathcal{O}_g[\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_g}],$$

где $\mathcal{O}_g$ — кольцо аналитических функций по переменным $x_1, \ldots, x_g$, определенных в окрестности $0 \in \mathbf{C}^g$. Накаяшики [15] ввел модуль Бейкера–Ахиезера

$$M_c = \cup_{n=1}^{\infty} M_c(n)$$

над кольцом дифференциальных операторов $\mathcal{D}_g$, где

$$M_c(n) = \left\{ f(z,x) \exp\left(-\sum_{j=1}^{g} x_j \partial_{z_j} \log \vartheta(z) \right), f(z,x) \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{L}_{c+x}(nY)) \right\}.$$

Нам понадобится еще один $\mathcal{D}_g$-модуль

$$\mathcal{D}_g M_c(n) = \left\{ \sum d\varphi,\ d \in \mathcal{D}_g, \varphi \in M_c(n) \right\}.$$

Элементы M_c можно выразить через тэта-функции.

В [15] доказана

Теорема Накаяшики. *Для c общего положения M_c — свободный $\mathcal{D}_g$-модуль ранга $g!$. Справедливо равенство $M_c = \mathcal{D}_g M_c(g)$.*

Равенство $M_c = \mathcal{D}_g M_c(g)$ означает, что $\mathcal{D}_g$-модуль M_c порождается элементами из $M_c(g)$.

Обозначим через Φ_c вектор-столбец, составленный из элементов базиса $\mathcal{D}_g$-модуля M_c

$$\Phi_c = (\phi_{1,c}(z,x), \dots, \phi_{g!,c}(z,x))^\top.$$

Следствие 3.1 [15]. *Существует кольцевое вложение*

$$L_0 : \mathcal{A}_0 \to \mathrm{Mat}(g!, g),$$

определенное равенством

$$L_0(\lambda)\Phi_c = \lambda\Phi_c, \lambda \in \mathcal{A}_0.$$

Образом вложения является коммутативное кольцо матричных дифференциальных операторов по g-переменным.

Перейдем к нашей конструкции.

Через $\mathcal{L}_c^k$ обозначим линейное расслоение над Y^k, сечения которого задаются функциями $f(z)$ на $Y^k \subset \mathbf{C}^g$ со свойством (3.1).

Введем модуль Бейкера–Ахиезера

$$M_c^k = \cup_{n=1}^{\infty} M_c^k(n)$$

над $\mathcal{D}_{g-k}$, где

$$M_c^k(n) = \left\{ f(z,x) \exp\left(-\sum_{j=1}^{g} x_j \partial_{z_j} \log \vartheta(z) \right), f(z,x) \in \mathrm{H}^0(Y^k, \mathcal{L}_{c+x}^k(nQ^k)) \right\}.$$

Справедлива

Теорема 3.2 *Для c общего положения с точностью до линейной замены координат M_c^k — свободный $\mathcal{D}_{g-k}$-модуль ранга $g!$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

Лемма 3.1 *Отображение ограничения*

$$\pi_j : \mathrm{H}^0(Y^j, \mathcal{L}^j_{c+x}(nQ^j)) \to \mathrm{H}^0(Y^{j+1}, \mathcal{L}^{j+1}_{c+x}(nQ^{j+1})),$$

$$\pi_j(\varphi) = \varphi|_{Y^{j+1}},\ n \geq 1, j \geq 0$$

является эпиморфизмом для x в общем положении.

Через $Y^0, \mathcal{L}^0_c$ и Q^0 мы обозначаем соответственно $X^g, \mathcal{L}_c$ и Y.

Доказательство. Пусть F — линейное расслоение над X^g, инвариантное относительно сдвигов. Через F_c обозначим расслоение $F \otimes \mathcal{P}_c$, где $\mathcal{P}_c$ — ограничение расслоения Пуанкаре на $X^g \times \{c\}$. В [15] (см. пример 5.8 и предложение 5.10) доказано, что

$$\mathrm{H}^i(X^g, F_c(nY)) = 0, i \geq 1, n \geq 1, \tag{3.2}$$

$$\mathrm{H}^i(X^g, F_c(nY)) = 0, i \neq g, n \leq -1 \tag{3.3}$$

и для точки c в общем положении при $i \geq 0$ выполнено равенство

$$\mathrm{H}^i(X^g, F_c) = 0. \tag{3.4}$$

Отметим, что расслоение

$$\mathcal{L}_c \otimes [sY] \otimes [-Y_{a_1}] \otimes \cdots \otimes [-Y_{a_s}]$$

инвариантно относительно сдвигов, где $1 \leq s \leq k$, поскольку таковыми являются $\mathcal{L}_c$ и $[Y] \otimes [-Y_{a_j}]$. Следовательно,

$$\mathrm{H}^i(X^g, \mathcal{L}_c \otimes [nY] \otimes [-Y_{a_1}] \otimes \cdots \otimes [-Y_{a_s}]) = 0, \tag{3.5}$$

где $1 \leq i < g, n \in \mathbf{Z}$. Имеется точная последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{L}^j_c \otimes [nQ^j] \otimes [-Y^{j+1}] \to \mathcal{L}^j_c \otimes [nQ^j] \to \mathcal{L}^{j+1}_c \otimes [nQ^{j+1}] \to 0. \tag{3.6}$$

Из длинной точной когомологической последовательности, отвечающей этой последовательности пучков, следует, что для доказательства сюръективности π_j нам достаточно установить равенство

$$\mathrm{H}^i(Y^j, \mathcal{L}^j_c \otimes [nQ^j] \otimes [-Y^{j+1}]) = 0. \tag{3.7}$$

Из (3.5) немедленно вытекает сюръективность π_0. Для доказательства (3.7) рассмотрим следующую точную последовательность

$$0 \to \mathcal{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+1}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+s}})] \to$$

$$\to \mathcal{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+2}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+s}})] \to$$

$$\to \mathcal{L}_c^{j+1} \otimes [nQ^{j+1}] \otimes [-(Y^{j+1} \cap Y_{a_{j+2}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^{j+1} \cap Y_{a_{j+s}})] \to 0, \quad (3.8)$$

где $j + s \leq k$. Из длинных точных когомологических последовательностей, отвечающих (3.6) и (3.8), используя (3.2)–(3.4), индукцией по j получаем

$$\mathrm{H}^i(Y^j, \mathcal{L}_c^j \otimes [nQ^j] \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+1}})] \otimes \dots \otimes [-(Y^j \cap Y_{a_{j+s}})]) = 0, \qquad (3.9)$$

где $1 \leq i < g - j, j + s \leq k$. Следовательно, отображение π_j сюръективно. Лемма доказана.

Отметим также, что, если $n > g$, то равенство (3.9) выполнено при $i \geq 1$.

Из леммы 3.1 вытекает

Следствие 3.2. *Отображение ограничения*

$$\pi_j : M_c^j \to M_c^{j+1}, \ \pi_j(\varphi) = \varphi|_{Y^{j+1}}$$

является эпиморфизмом для с в общем положении.

Обозначим через S_n^g размерность пространства дифференциальных операторов по g переменным с постоянными коэффициентами, степень которых не превышает $n - 1$. Нетрудно проверить, что

$$S_n^g = C_{n+g-1}^{n-1} = \frac{n(n+1)\dots(n+g-1)}{g!}.$$

Введем еще одно обозначение

$$\mathcal{F}_j(n) = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}_{g-j}} M_c^j,$$

$$\mathcal{F}_0(n) = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}_g} M_c.$$

Справедлива

Лемма 3.2 *Имеет место равенство*

$$\mathcal{F}_{j+1}(n) = \mathcal{F}_j(n) - \mathcal{F}_j(n-1).$$

Доказательство. Любой элемент, принадлежащий $\mathrm{Ker}\ \pi_j$, представим единственным образом в виде

$$\frac{\vartheta(z-a_{j+1})}{\vartheta(z)}\varphi,\ \varphi \in M^j_{c+a_{j+1}}.$$

Следовательно, в силу сюръективности π_j получаем требуемое равенство. Лемма 3.2 доказана.

Введем обозначение

$$\alpha_k = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}_g} M_c(k)/\mathcal{D}^1_g M_c(k-1),$$

где $\mathcal{D}^1_g$ — операторы первого порядка.

Выберем однородный базис

$$\psi_{ij},\ 1 \le i \le g, 1 \le j \le \alpha_i$$

в $\mathcal{D}_g$-модуле M_c, который обладает свойствами:
1. элементы $\psi_{kj}, 1 \le j \le \alpha_k$ порождают $M_c(k)/\mathcal{D}^1_g M_c(k-1)$ над $\mathcal{O}_g$
2. ограничения ψ_{ki} на Y^j порождают $\mathcal{D}_{g-j}$-модуль M^j_c.

В силу свободности $\mathcal{D}_g$-модуля M_c справедливо равенство

$$\mathcal{F}_0(n) = \alpha^g_1 S^g_n + \cdots + \alpha^g_g S^g_{n-g+1}.$$

Докажем следующую лемму.
Лемма 3.3 *Имеет место равенство*

$$\mathcal{F}_j(n) = \alpha^g_1 S^{g-j}_n + \cdots + \alpha^g_g S^{g-j}_{n-g+1}.$$

Доказательство. Доказывать лемму будем индукцией по j. При $j=0$ равенство уже установлено. Предположим, что равенство доказано при $j=s$. Тогда по лемме 3.2 имеем

$$\mathcal{F}_{s+1}(n) = \mathcal{F}_s(n) - \mathcal{F}_s(n-1) =$$

$$\alpha_1^g(S_n^{g-j} - S_{n-1}^{g-j}) + \cdots + \alpha_g^g(S_{n-g+1}^{g-j} - S_{n-g}^{g-j}) = \alpha_1^g S_n^{g-j-1} + \cdots + \alpha_g^g S_{n-g+1}^{g-j-1}.$$

Лемма 3.3 доказана.

Через $\mathcal{D}_{g-j}\Psi^j \subset M_c^j$ обозначим $\mathcal{D}_{g-j}$-модуль, порожденный элементами базиса ψ_{ik}

$$\mathcal{D}_{g-j}\Psi^j = \{\psi|_{Y^j},\ \psi = \sum d_{ik}\psi_{ik},\ d_{ik} \in \mathcal{D}_{g-j}\}.$$

Предложение 3.1 *Существует однородный базис ψ_{ik} и линейная замена координат x такие, что*

$$\partial_{g-j}\psi_{ik}|_{Y^{j+1}} \in \mathcal{D}_{g-j-1}\Psi^{j+1}.$$

Для доказательства предложения 3.1 нам необходимо установить несколько вспомогательных утверждений. Прежде всего нам понадобится знать структуру ядра отображения π_j. Введем обозначение

$$K_j = \mathrm{Ker}\ \pi_j.$$

Справедлива

Лемма 3.4 *Ядро K_j является свободным $\mathcal{D}_{g-j}$-модулем ранга $g!$.*

Доказательство. Любой элемент из K_j однозначно представим в виде

$$\frac{\vartheta(z - a_{j+1})}{\vartheta(z)}\varphi,\ z \in Y^{j+1},$$

где $\varphi \in M_{c+a_{j+1}}^j$. Следовательно, $\mathcal{D}_{g-j}$-модули K_j и $M_{c+a_{j+1}}^j$ изоморфны. Лемма 3.4 доказана.

Справедлива

Лемма 3.5 *После подходящей линейной замены координат существует дифференциальный оператор некоторой степени N_{ik} вида*

$$P_{ik} = b_1\partial_1^{N_{ik}} + \cdots + \partial_{g-j}^{N_{ik}} + \cdots \in \mathcal{D}_{g-j},$$

такой, что

$$P_{ik}\psi_{ik}|_{Y^{k+1}} = 0.$$

Отметим, что коэффициент при $\partial_{g-j}^{N_{ik}}$ в операторе P_{ik} равен 1.

Доказательство. По лемме 3.3 ранг M_c^{j+1} равен $\mathcal{F}_{j+1}(n)$ и является полиномом по n степени $g-j-1$. Размерность пространства дифференциальных операторов по $g-j$ переменным (с постоянными коэффициентами) степени n является полиномом по n степени $g-j$. Следовательно, для больших N_{ik} указанный дифференциальный оператор существует. Лемма 3.5 доказана.

Теперь перейдем к доказательству предложения 3.1.

Обозначим через

$$K_j(n) = K_j \cap M_c^j(n+1).$$

Введем однородный базис φ_{ik} в $\mathcal{D}_{g-j}$-модуле K_j, где $1 \le i \le g, 1 \le k \le \alpha_i$. Обозначим через Ψ^j вектор-столбец, составленный из элементов базиса $\psi_{ik}|_{Y^j}$ $\mathcal{D}_{g-j}$-модуля M_c^j, а через Φ^j вектор-столбец, составленный из элементов φ_{ik}. Обозначим через G матричный оператор с компонентами из $\mathcal{D}_{g-j}$, такой что

$$G\Psi^j = \Phi^j.$$

Обозначим через P диагональную матрицу, составленную из операторов P_{ik}. По построению операторов P_{ik} все компоненты вектор-столбца $P\Psi^j$ принадлежат $\mathcal{D}_{g-j}$-модулю K_j, следовательно, существует матричный оператор I такой, что

$$I\Phi^j = P\Psi^j,$$

значит,

$$IG\Psi^j = P\Psi^j,$$

откуда

$$IG = P. \tag{3.10}$$

Далее мы будем рассматривать вместо $\mathcal{D}_{g-j}$-модуля M_c^j градуированный $\mathrm{gr}\mathcal{D}_{g-j}$-модуль $\mathrm{gr}M_c^j$

$$\mathrm{gr}\mathcal{D}_{g-j} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \mathrm{gr}_s\mathcal{D}_{g-j},$$

где $\mathrm{gr}_s\mathcal{D}_{g-j}$ — однородные операторы порядка s,

$$\mathrm{gr}M_c^j = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \mathrm{gr}_s M_c^j,\ \mathrm{gr}_s M_c^j = M_c^j(s)/M_c^j(s-1).$$

В этом случае в равенстве (3.10) все компоненты матриц являются дифференциальными операторами, у которых все мономы одной и той же степени (т.е. можно считать, что вместо операторов стоят их символы).

Сначала выберем произвольные базисы ψ_{ik} и φ_{ik}. Имеем

$$\varphi_{11} = f_{11,11}^1 \partial_1 \psi_{11} + \dots + f_{11,11}^{g-j} \partial_{g-j} \psi_{11} + g_{11,21}\psi_{21} + \dots + g_{11,2a_2}\psi_{2a_2}.$$

Еще раз отметим, что это равенство мы рассматриваем в $\mathrm{gr}\mathcal{D}_{g-j}$-модуле $\mathrm{gr}M_c^j$. Возможны следующие три случая, которые мы подробно разберем.
Случай 1. Если $f_{11,11}^{g-j} \neq 0$, то элемент ψ_{11} удовлетворяет условию предложения 3.1.
Случай 2. Если $f_{11,11}^{g-j} = 0$ и $g_{11,21}\psi_{21} + \dots + g_{11,2a_2}\psi_{2a_2} \neq 0$, то введем новый элемент ψ_{21}, равный $g_{11,21}\psi_{21} + \dots + g_{11,2a_2}\psi_{2a_2} - \partial_{g-j}\psi_{11}$. В новом разложении φ_{11} коэффициент при $\partial_{g-j}\psi_{11}$ не равен нулю. Мы приходим к случаю 1.
Случай 3. Предположим, что

$$f_{11,11}^{g-j} = 0,\ g_{11,21}\psi_{21} + \dots + g_{11,2a_2}\psi_{2a_2} = 0.$$

Профакторизуем равенство (3.10) по идеалу порожденному $\partial_1, \dots, \partial_{g-j-1}$. Тогда в равенстве (3.10) в матрице G будет нулевая строчка, но ранг матрицы P максимален, что не возможно. Следовательно, случай 3 не возможен.

Далее будем строить базис ψ_{ik} по индукции. Предположим, что мы построили элементы ψ_{ik} при $1 \leq i \leq p$. Построим элементы $\psi_{i+11}, \dots, \psi_{i+1\alpha_{i+1}}$.

Имеем

$$\varphi_{i+1s} = d_{i+1s,11}\psi_{11} + \dots + d_{i+1s,ia_i}\psi_{i\alpha_i} +$$
$$+ f_{i+1s,i+11}^1 \partial_1 \psi_{i+11} + \dots + f_{i+1s,i+11}^{g-j} \partial_{g-j} \psi_{i+11} + \dots$$

$$+f^{1}_{i+1s,i+1\alpha_{i+1}}\partial_1\psi_{i+1\alpha_{i+1}}+\dots+f^{g-j}_{i+1s,i+1\alpha_{i+1}}\partial_{g-j}\psi_{i+1\alpha_{i+1}}+\dots$$
$$g_{i+1s,i+21}\psi_{i+21}+\dots+g_{i+1s,i+2\alpha_{i+2}}\psi_{i+2\alpha_{i+2}},$$

где $1\le s\le a_{i+1}$. Мы можем предполагать, что в операторах $d_{il,ks}$ не входят производные ∂_{g-j}. Их мы можем исключить беря подходящие линейные комбинации с производными φ_{ik}, при $i\le p$.

Рассмотрим матрицу, составленную из α_{i+1} строк

$$\left(f^{g-i}_{i+1s,i+11},\dots,f^{g-j}_{i+1s,i+1\alpha_{i+1}},g_{i+1s,i+21},\dots,g_{i+1s,i+2\alpha_{i+2}}\right),$$

где $1\le s\le a_{i+1}$. Если ранг этой матрицы равен α_{i+1}, то беря линейные комбинации φ_{is} и выбирая подходящим образом $\psi_{i+21},\dots,\psi_{i+2a_{i+2}}$ (аналогично как мы делали для φ_{11}), мы можем добиться того, что в разложении φ_{i+1s} по базису ψ_{ik} участвуют только одна производная ∂_{g-j}, а именно $\partial_{g-j}\psi_{i+1s}$. И в этом случае шаг индукции установлен.

Если же ранг указанной матрицы меньше чем a_{i+1}, то линейными комбинациями φ_{i+1s} можно добиться того, чтобы в разложении φ_{i+1s_0} для некоторого s_0 не участвуют производные ∂_{g-j} и не участвуют элементы ψ_{i+2k}. Мы уже показали, что такого не может быть. Предложение 3.1 доказано.

Теорема 3.2 вытекает из следствия 3.2, леммы 3.3 и предложения 3.1.

Покажем как из теоремы 3.2 вывести теорему 3.1. Обозначим через

$$\Phi_c=(\phi_{1,c}(z,x),\dots,\phi_{N,c}(z,x))^{\top}$$

базис в $\mathcal{D}_{g-k}$-модуле M^k_c, тогда по теореме 3.2 для $\lambda\in\mathcal{A}_k$ существует единственный оператор $L_k(\lambda)\in\mathrm{Mat}(N,g-k)$ такой, что

$$L_k(\lambda)\Phi_c=\lambda\Phi_c.$$

Для различных λ операторы $L_k(\lambda)$ попарно коммутируют. Теорема 3.1 доказана.

Обозначим через $T_j\in\mathrm{Mat}(N,g-k)$ оператор порядка g, определенный равенством

$$T_j\Phi_c=\partial_{t_j}\Phi_c,$$

время $t_j, 1 \le j \le k$ мы отождествляем с переменной x_{g-k}. Справедливы равенства

$$[L_k(\lambda), T_j - \partial_{t_j}]\Phi = 0,$$

$$[T_m - \partial_{t_m}, T_n - \partial_{t_n}]\Phi = 0.$$

Тогда из теоремы 3.2 вытекает

Следствие 3.3 *Справедливы эволюционные уравнения*

$$\frac{\partial L_k(\lambda)}{\partial t_j} = [L_k(\lambda), T_j], \ \ \lambda \in \mathcal{A}_k,$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t_n} - \frac{\partial T_n}{\partial t_m} = [T_n, T_m].$$

Разделим каждую вектор-функцию $\phi_{j,c}(z,x)$ на

$$\exp\left(-\sum_{j=g-k+1}^{g} \frac{x_j}{s}\partial_{z_j} \log\vartheta(z)\right),$$

затем заменим $x = (x_1, \dots, x_g)$ на

$$(x,t) = (x_1, \dots, x_{g-k}, \sum_m t_{1,m}, \dots, \sum_m t_{k,m}),$$

где $m = (m_1, \dots, m_g) \in \mathbf{Z}^g, \ m_1 + \dots + m_g \ge 2, \ m_i \ge 0$, и, наконец, умножим на

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{k}\sum_m \frac{t_{j,m}}{s}(\partial_{z_{g-k+j}} \log\vartheta(z) + \partial_z^m \log\vartheta(z))\right),$$

где $\partial_z^m \log\vartheta(z) = \partial_{z_1}^{m_1} \dots \partial_{z_g}^{m_g} \log\vartheta(z)$. Получим вектор-функцию $\psi_{j,c}(z,x,t)$, которая представляется в виде суммы вектор-функций следующего вида

$$g(x,t)\frac{\theta^{r,sn}(z + \frac{(x,t)+c}{sn})}{\vartheta^n(z)} \exp\left(-\sum_{j=1}^{g-k} \frac{x_j}{s}\partial_{z_j} \log\vartheta(z) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{k}\sum_m \frac{t_{j,m}}{s}(\partial_{z_{g-k+j}} \log\vartheta(z) + \partial_z^m \log\vartheta(z))\right).$$

Тогда для

$$\Psi = (\psi_{1,c}(z,x,t), \dots, \psi_{N,c}(z,x,t))^\top$$

справедливо равенство

$$L_{j,m}\Psi = \partial_{t_{j,m}}\Psi.$$

По теореме 3.2 имеет место эволюционные уравнения

$$[\partial_{t_{j,m}} - L_{j,m}, \partial_{t_{i,n}} - L_{i,n}] = 0.$$

Глава 4

Ортогональные криволинейные системы координат в $\mathbb{R}^n$ и фробениусовы многообразия

4.1 Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым

В данном параграфе мы изучаем предельный случай конструкции Кричевера построения криволинейных ортогональных систем координат, отвечающий сингулярным спектральным кривым.

Теория ортогональных систем координат была очень популярна среди дифференциальных геометров в 19-ом веке и в первой половине 20-го века (Дюпен, Гаусс, Ламе, Бианки, Дарбу) и задача классификации была в основном решена к началу 20-го века (см. книгу Дарбу [43], подытоживающую этот этап развития теории). Интерес к таким координатам связан как с нахождением систем, разрешимых методом разделения переменных, так и с современными задачами теории систем гидродинамического типа и топологической теории поля (Дубровин, Новиков, Царев, Кричевер, см. ссылки в [20, 21]).

В задаче явного построения таких систем существенный прорыв был достигнут Захаровым [21], на примере метода одевания впервые применившим методы теории интегрируемых систем к этой задаче. На метод конечнозонного интегрирования этот подход был распространен Кричевером [20]. При этом изначальными данными для построения таких систем являются риманова поверхность, т.е. спектральная кривая, которая в работе [20] подразумевалась несингулярной, и некоторые дополнительные величины, с ней связанные. Мы кратко напоминаем конструкции Захарова и Кричевера в §4.1.1.

В случае, когда спектральная кривая является сингулярной и приводимой, причем такой что все ее неприводимые компоненты являются гладкими рациональными комплексными кривыми, процедура построения криволинейных систем координат сильно упрощается и сводится к несложным вычислениям с элементарными функциями (см. §4.1.2). При этом мы показываем как в эту схему вкладываются хорошо известные системы координат, такие как полярные координаты на плоскости, цилиндрические координаты в трехмерном пространстве и сферические координаты в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 3$ (мы излагаем эти построения вместе с построением некоторых других систем в §4.1.3).

Заметим, что обратные задачи с такими спектральными кривыми уже изучались в связи с их приложениями (см., например, работу [44] по теории поверхностей и работу [45] по системам Хитчина). Хотя этот случай очень специален, эта работа также показывает, что отвечающие ему явные решения являются очень важными в приложениях.

4.1.1 Методы построения ортогональных криволинейных координат

Предварительные сведения

Криволинейная система координат $u = (u^1, \dots, u^n)$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется n-ортогональной, если метрика в этой системе координат имеет вид

$$ds^2 = H_1^2(du^1)^2 + \dots + H_n^2(du^n)^2.$$

При этом функции $H_j = H_j(u)$ называются коэффициентами Ламе и условие зануления тензора кривизны имеет вид

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial u^k}\frac{\partial H_i}{\partial u^j} + \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial u^j}\frac{\partial H_i}{\partial u^k}, \quad i \neq j \neq k, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_i}{\partial u^j}\right) + \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial u^i}\right) + \sum_{k \neq i \neq j} \frac{1}{H_k^2}\frac{\partial H_i}{\partial u^k}\frac{\partial H_j}{\partial u^k} = 0, \quad i \neq j. \tag{4.2}$$

Число уравнений в системах (4.1) и (4.2) равно соответственно $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ и $\frac{n(n-1)}{2}$, причем уравнения (4.1) эквивалентны условию $R_{ijik} = 0, j \neq k$, а уравнения (4.2) эквивалентны условию $R_{ijij} = 0$. Остальные компоненты тензора R_{ijkl} для диагональной метрики зануляются автоматически. Таким образом система уравнений (4.1)–(4.2) на коэффициенты Ламе сильно переопределена. Общее решение этой системы параметризуется $\frac{n(n-1)}{2}$ функциями от двух переменных.

Порядок системы (4.1)–(4.2) можно понизить, если ввести коэффициенты вращения

$$\beta_{ij} = \frac{\partial_{u^i} H_j}{H_i}, \quad i \neq j. \tag{4.3}$$

Тогда уравнения (4.1) и (4.2) принимают вид

$$\partial_{u^k}\beta_{ij} = \beta_{ik}\beta_{kj}, \quad i \neq j \neq k, \tag{4.4}$$

$$\partial_{u^i}\beta_{ij} + \partial_{u^j}\beta_{ji} + \sum_{k \neq i,j} \beta_{ki}\beta_{kj} = 0, \quad i \neq j. \tag{4.5}$$

Если решение β_{ij} этой системы известно, то коэффициенты Ламе находятся из уравнений (4.3) как решение задачи Коши

$$H_i(0, \ldots, 0, u^i, 0, \ldots, 0) = h_i(u^i).$$

При этом решение зависит от начальных данных этой задачи, т.е. от n функций h_i одной переменной. Отметим, что совместность уравнений (4.3) эквивалентна уравнениям (4.4).

Проблема погружения, т.е. определение евклидовых координат $x = (x^1, \ldots, x^n)$ как функций от $u = (u^1, \ldots, u^n)$, сводится к решению переопределенной системы линейных уравнений

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_l \Gamma^l_{ij} \partial_{u^l} x^k, \tag{4.6}$$

где символы Кристоффеля в нашем случае имеют вид

$$\Gamma^k_{ij} = 0, \ i \neq j \neq k; \quad \Gamma^k_{kj} = \frac{\partial_{u^j} H_k}{H_k}; \quad \Gamma^k_{ii} = -\frac{H_i \partial_{u^k} H_i}{(H_k)^2}, \ i \neq k.$$

Система уравнений (4.6) совместна в силу уравнений (4.1) и (4.2) и определяет n-ортогональную систему координат с точностью до движений $\mathbb{R}^n$.

Метод Захарова [21]

Абстрактная задача n волн имеет вид

$$\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}(I_j \partial_{u^i} Q I_k - I_i Q I_j Q I_k) = 0, \tag{4.7}$$

где $Q(u)$ — неизвестная $(n \times n)$-матричная функция, матрицы $I_j = I_j(u^j)$ попарно коммутируют, $\varepsilon_{ijk} = 1$, при $i > j > k$, а при нечетной перестановке индексов ε_{ijk} меняет знак.

Возьмем в качестве I_j диагональные матрицы с диагональю

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

(единица на j-ом месте). Уравнения (4.7) принимают вид

$$\partial_{u^j} Q_{ik} = Q_{ij} Q_{jk},$$

т.е. совпадают с (4.4). Рассмотрим вспомогательную функцию $\widetilde{Q} = \tilde{Q}(u, s)$, где $s = u^{n+1}$ — дополнительная переменная, удовлетворяющую уравнениям

$$\partial_{u^j}[I_i, \widetilde{Q}] - \partial_{u^i}[I_j, \widetilde{Q}] + I_i \partial_s \widetilde{Q} I_j - I_j \partial_s \widetilde{Q} I_i - [[I_i, \widetilde{Q}], [I_j, \widetilde{Q}]] = 0, \tag{4.8}$$

где $i, j = 1, \dots, n+1$ и I_{n+1} — единичная матрица. Можно показать, что, если $\widetilde{Q}$ удовлетворяет уравнениям (4.8), то при фиксированном значении s матричная функция $\widetilde{Q}$ является решением задачи n волн. Система (4.8) допускает представление Лакса:

$$[L_i, L_j] = 0, \quad L_j = \partial_{u^j} + I_j\partial_s + [I_j, \widetilde{Q}].$$

Метод одевания заключается в следующей процедуре. Рассмотрим интегральное уравнение типа Марченко:

$$K(s, s', u) = F(s, s', u) + \int_s^\infty K(s, q, u)F(q, s', u)dq, \tag{4.9}$$

где $F(s, s', u)$ матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\partial_{u^i} F + I_i\partial_s F + \partial_{s'} F I_i = 0, \tag{4.10}$$

и уравнение (4.9) имеет единственное решение. Тогда функция

$$\tilde{Q}(s, u) = K(s, s, u) \tag{4.11}$$

удовлетворяет уравнениям (4.8) и, следовательно, при любом фиксированном значении s функция $Q(u) = \widetilde{Q}(s, u)$ удовлетворяет уравнениям (4.7). Если при этом выполняется дифференциальная редукция

$$\partial_{s'} F_{ij}(s, s', u) + \partial_s F_{ji}(s', s, u) = 0, \tag{4.12}$$

где F_{ij} — компоненты матрицы F, то $\widetilde{Q}$ удовлетворяет также уравнениям (4.5).

Система из уравнений (4.10) и (4.12) допускает следующее решение [21]:

- *Пусть* $\Phi_{ij}(x, y), i < j$ — $\frac{n(n-1)}{2}$ *произвольных функций от двух переменных и* $\Phi_{ii}(x, y)$ — n *произвольных антисимметричных функций:*

  $$\Phi_{ii}(x, y) = -\Phi_{ii}(y, x).$$

  Положим

  $$F_{ij} = \partial_s \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j), \ i < j,$$

$$F_{ji} = \partial_s \Phi_{ij}(s' - u^i, s - u^j),$$
$$F_{ii} = \partial_s \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i).$$

Матричная функция $F = (F_{ij})$ удовлетворяет уравнениям (4.10) и (4.12), и следовательно, решение K уравнения (4.9) с такой матрицей F дает при любом фиксированном значении s коэффициенты вращения ортогональной системы координат: $Q_{ij}(u) = K_{ij}(s, s, u)$, т.е. решение систем (4.4)–(4.5).

Замечание 4.1. Мы имеем $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ функциональных параметров $\Phi_{ij}, i \leq j$, а общее решение зависит от $\frac{n(n-1)}{2}$ функциональных параметров, поэтому, как объяснено в [21], этот метод дает эквивалентные классы одеваний.

Этот метод был использован при описании пучков метрик постоянной секционной кривизны и для построения N-ортогональных координат в пространствах ненулевой постоянной секционной кривизны [46].

Метод Кричевера [20]

Пусть Γ — гладкая связная комплексная алгебраическая кривая. Возьмем три дивизора на Γ:

$$P = P_1 + \cdots + P_n, \quad D = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{g+l-1}, \quad R = R_1 + \cdots + R_l,$$

где g — род кривой Γ, $P_i, \gamma_j, R_k \in \Gamma$. Обозначим через k_i^{-1} некоторый локальный параметр на Γ около P_i, $i = 1, \ldots, n$.

Функцией Бейкера–Ахиезера, отвечающей спектральным данным

$$S = \{P, D, R\}$$

называется функция $\psi(u^1, \ldots, u^n, z)$, $z \in \Gamma$ такая, что:

1) $\psi \exp(-u^i k_i)$ аналитична в окрестности P_i, $i = 1, \ldots, n$;
2) ψ мероморфна на $\Gamma \backslash \{\cup P_i\}$ с полюсами в γ_j, $j = 1, \ldots, g + l - 1$;
3) $\psi(u, R_k) = 1$, $k = 1, \ldots, l$.

В случае дивизора D общего положения такая функция существует и единственна и выражается через тэта-функцию кривой Γ [20].

Если кривая Γ не связна, то предполагается, что ограничение функции Бейкера–Ахиезера на каждую связную компоненту удовлетворяет перечисленным выше условиям.

Возьмем дополнительный дивизор $Q = Q_1 + \cdots + Q_n$ на Γ такой, что $Q_i \in \Gamma \setminus \{P \cup D \cup R\}, i = 1, \dots, n$ и обозначим через x^j следующую функцию

$$x^j(u^1, \dots, u^n) = \psi(u^1, \dots, u^n, Q_j), \; j = 1, \dots, n.$$

Имеет место следующая теорема Кричевера [20]:

- *Пусть Γ допускает голоморфную инволюцию $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ такую, что*

  1) эта инволюция имеет в точности $2m, m \leq n$, неподвижных точек $P_1, \dots, P_n$ из P и $2m - n$ точек из Q;

  2) $\sigma(Q) = Q$, т.е. инволюция либо переставляет точки из Q, либо оставляет их неподвижными:

  $$\sigma(Q_k) = Q_{\sigma(k)}, \quad k = 1, \dots, n;$$

  3) $\sigma(k_i^{-1}) = -k_i^{-1}$ в окрестности P_i, $i = 1, \dots, n$;

  4) существует мероморфный дифференциал Ω на Γ такой, что его дивизоры нулей и полюсов имеют вид

  $$(\Omega)_0 = D + \sigma D + P, \quad (\Omega)_\infty = R + \sigma R + Q.$$

  Предполагается, что $\Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ является гладкой алгебраической кривой.

  Тогда, как это легко показать, Ω является поднятием некоторого мероморфного дифференциала Ω_0 на Γ_0 и справедливы следующие равенства:

  $$\sum_{k,l} \eta_{kl} \partial_{u^i} x^k \partial_{u^j} x^l = \varepsilon_i^2 h_i^2 \delta_{ij},$$

где

$$h_i = \lim_{P \to P_i} \left(\psi e^{-u^i k_i} \right), \quad \eta_{kl} = \delta_{k,\sigma(l)} \mathrm{res}_{Q_k} \Omega_0,^{1}$$

и

$$\Omega_0 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_i^2 \lambda_i + O(\lambda_i) \right) d\lambda_i, \ \lambda_i = k_i^{-2}, \quad \textit{в точке } P_i, \ i = 1, \dots, n.$$

Замечание 4.2. Эта теорема останется верной если вместо 1) мы предположим, что функции $\psi \exp(-f^i(u^i)k_i)$ аналитичны в окрестности P_i, где f^i — некоторые функции одной переменной, $i = 1, \dots, n$. Поэтому мы не будем различать ортогональные системы координат, которые получаются заменами вида

$$u^i \to f^i(u^i).$$

Замечание 4.3. Теорема Кричевера дает конструкцию этих координат используя формализм функций Бейкера–Ахиезера. На самом деле, как следует из доказательства, функция Бейкера–Ахиезера останется единственной, если заменить условие $\psi(u, R_k) = 1, i = 1, \dots, l$ на

$$\psi(u, R_k) = d_k, \quad k = 1, \dots, l, \tag{4.13}$$

где все константы d_k не обращаются в нуль. Более того, мы можем даже предполагать, что константы d_k не обращаются одновременно в нуль:

$$|d_1|^2 + \dots + |d_l|^2 \neq 0, \tag{4.14}$$

и после этого предположения главный результат [20] останется верным.

Для выделения случаев, когда Теорема дает положительно определенные метрики, необходимо наложить некоторые дополнительные условия на спектральные данные [20]:

---

[1] В окрестности несингулярной неподвижной точки Q_i инволюции σ существует параметр k такой, что $\sigma(k) = -k, k(Q_i) = 0$. Поэтому $\lambda = k^2$ является локальным параметром в окрестности Q_i на Γ/σ и мы имеем $\Omega = \left(\frac{a}{k} + \dots\right) dk, \Omega_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\lambda} + \dots\right) d\lambda$, что влечет $\mathrm{res}_{Q_i}\Omega_0 = \frac{1}{2}\mathrm{res}_{Q_i}\Omega$.

- *Если существует антиголоморфная инволюция* $\tau : \Gamma \to \Gamma$ *такая, что все неподвижные точки* σ *неподвижны при* τ *и*

$$\tau^*(\Omega) = \overline{\Omega}$$

(для этого достаточно предположить, что $\tau(k_i^{-1}) = \overline{k_i^{-1}}$ *в окрестности* $P_i, i = 1, \dots, n$ *и* τ *отображает дивизоры* Q, R *и* D *в себя:* $\tau(Q) = Q, \tau(R) = R, \tau(D) = D$*, хотя эти дивизоры не обязательно состоят из неподвижных точек* τ*), тогда коэффициенты* $H_i(u)$ *являются вещественными при* $u^1, \dots, u^n \in \mathbb{R}$.

При этом мы имеем

- $u^1, \dots, u^n$ *являются* n*-ортогональными координатами в плоском* n*-мерном пространстве с метрикой* $\eta_{kl} dx^k dx^l$. [2]

- *Если все точки из* Q *неподвижны под действием* σ *и*

$$\mathrm{res}_{Q_1} \Omega_0 = \dots = \mathrm{res}_{Q_n} \Omega_0 = \eta_0^2 > 0, \tag{4.15}$$

то функции $x^1(u^1, \dots, u^n), \dots, x^n(u^1, \dots, u^n)$ *решают задачу погружения для* n*-ортогональных координат* $u^1, \dots, u^n$ *и* $ds^2 = H_1^2(du^1)^2 + \dots + H_n^2(du^n)^2$*, где*

$$H_i = \frac{\varepsilon_i h_i}{\eta_0}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Аналог конструкции Кричевера для дискретных ортогональных систем был развит в [47].

Результат Кричевера позволяет предположить, что n-ортогональные системы координат, которые выражаются в терминах элементарных функций отвечают предельным случаям, когда спектральная кривая является сингулярной.

---

[2]Несложно видеть, что если существуют точки Q_k и $Q_l, l = \sigma(k)$, которые переставляются инволюцией, то метрика η является неопределенной.

4.1.2 Системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым

Пусть Γ — алгебраическая комплексная кривая с особенностями. Тогда существует морфизм несингулярной алгебраической кривой Γ_{nm}:

$$\pi : \Gamma_{\mathrm{nm}} \to \Gamma,$$

такой что

1) в Γ_{nm} выделено конечное множество точек S с отношением эквивалентности $\sim$ на этом множестве и отображение π переводит S в точности в множество особых точек $\mathrm{Sing} = \mathrm{Sing}\,\Gamma$ кривой Γ, причем прообраз каждой точки из Sing состоит из класса эквивалентных точек;

2) отображение $\pi : \Gamma_{\mathrm{nm}} \setminus S \to \Gamma \setminus \mathrm{Sing}$ является гладкой взаимно однозначной проекцией;

3) любое регулярное отображение $F : X \to \Gamma$ несингулярного алгебраического многообразия X с всюду плотным образом $F(X) \subset \Gamma$ пропускается через Γ_{nm}, т.е. $F = \pi G$ для некоторого регулярного отображения $G : X \to \Gamma_{\mathrm{nm}}$.

Отображение π с такими свойствами называется нормализацией кривой Γ и определяется этими условиями однозначно. Род кривой Γ_{nm} называется геометрическим родом кривой Γ и обозначается через $p_g(\Gamma)$.

Однако в формулу Римана–Роха входит другой род: арифметический род $p_a(\Gamma)$, который складывается из геометрического рода и положительного вклада сингулярностей (точек из Sing). Для несингулярной кривой мы имеем $p_a = p_g$.

Например, рассмотрим случай кратных точек, когда на Γ_{nm} выделены s наборов $D_1, \dots, D_s$, состоящих из $r_1, \dots, r_s$ точек, все из которых различны. Пусть Γ получается склейкой точек из каждого набора в одну. Тогда

$$p_a(\Gamma) = p_g(\Gamma) + \sum_{i=1}^{s} (r_i - 1).$$

Мероморфная 1-форма ω на Γ_{nm} задает регулярный дифференциал на

Γ, если для любой точки из $P \in \mathrm{Sing}$ мы имеем

$$\sum_{\pi^{-1}(P)} \mathrm{Res}\,(f\omega) = 0$$

для всех мероморфных функций f на Γ_{nm}, которые опускаются до функций на Γ, т.е. принимают в точках из каждого дивизора D_i одно и то же значение и не имеют полюсов в $\pi^{-1}(P)$. Регулярные дифференциалы могут иметь полюсы в прообразах особых точек. Размерность пространства регулярных дифференциалов равна, как легко видеть, $p_a(\Gamma)$.

В общем случае все эти понятия излагаются в [48] (для нужд конечнозонного интегрирования даны очень краткие изложения в [49, 44]). Напомним теорему Римана–Роха для сингулярных кривых.

Пусть $L(D)$ — пространство мероморфных функций на Γ с полюсами в точках из $D = \sum n_P P$ порядка $\leq n_P$ и $\Omega(D)$ — пространство регулярных дифференциалов на Γ, имеющих в каждой точке $P \in \mathrm{Sing}$ нуль порядка не меньше, чем n_P. Теорема Римана–Роха утверждает, что

$$\dim L(D) - \dim \Omega(D) = \deg D + 1 - p_a(\Gamma).$$

Для дивизора D, где $\deg D > p_a$, общего положения мы имеем $\dim \Omega(D) = 0$ и теорема Римана–Роха принимает вид

$$\dim L(D) = \deg D + 1 - p_a(\Gamma).$$

Теорема 4.1 *Теорема Кричевера (см. выше) останется справедливой для сингулярной алгебраической кривой, если в формулировке заменить g на $p_a(\Gamma)$, т.е. на арифметический род Γ и предположение о гладкости кривой Γ/σ заменить на условие, что $P_1, \ldots, P_n$ и полюсы Ω являются несингулярными точками.*

Более того, мы можем предполагать, что ψ удовлетворяет условиям (4.13) и (4.14) вместо $\psi(u, R_k) = 1, k = 1, \ldots, l$.

Доказательство этой теоремы по существу такое же как и доказательство Кричевера в [20]. Единственность ψ устанавливается из общей теории функций Бейкера–Ахиезера. В случаях, изучаемых в предыдущих параграфах единственность тривиальна, т.к. мы работаем с рациональными кривыми. Тождество

$$\sum_{k,l} \eta_{kl} \partial_{u^i} x^k \partial_{u^j} x^l - \varepsilon_i^2 h_i^2 \delta_{ij} = 0$$

эквивалентно тождеству

$$\sum \operatorname{res} \left(\partial_{u^i} \psi(u, X) \partial_{u^j} \psi(u, \sigma(X)) \Omega \right) = 0,$$

и получается из него прямыми вычислениями вычетов.

Замечание 4.4 (основное). В случае, когда $\Gamma_{\rm nm}$ есть объединение гладких рациональных кривых, т.е. $\mathbb{C}P^1$, процедура построения функций Бейкера–Ахиезера и ортогональных координат очень проста: она сводится к простым вычислениям с элементарными функциями и не идет дальше решения систем линейных уравнений. В то же время сингулярные кривые арифметического рода g получаются вырождением из несингулярных кривых того же рода. При этом наследуются качественные свойства соответствующих этим кривым решений нелинейных уравнений, т.е. эти решения являются достаточно сложными.

Мы ограничимся самым простым случаем, когда Γ — приводимая кривая, состоящая из компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, каждая из которых изоморфна $\mathbb{C}P^1$. Эти компоненты могут попарно пересекаться по некоторым точкам.

Регулярный дифференциал Ω на Γ задается набором дифференциалов $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ на $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, которые могут иметь полюсы в точках пересечения компонент, причем, если P — точка пересечения компонент $\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_r}$, то

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname{res}_P \, \Omega_{i_k} = 0.$$

Арифметический род p_a — это размерность пространства голоморфных регулярных дифференциалов, т.е. таких дифференциалов, что Ω_j могут иметь полюса только в точках пересечения различных компонент.

Для различных комбинаторных конфигураций рациональных компонент и точек пересечения Теорема 4.1 переписывается в абсолютно элементарной форме и конструкция ортогональных координат сводится к решению некоторых систем линейных уравнений. Проще продемонстрировать это на примерах, которые мы приводим ниже. Для простоты мы подразумеваем, что на каждой компоненте задан какой-то комплексный параметр.

2-ортогональные системы координат

Пример 4.1. Пусть Γ состоит из двух экземпляров $\mathbb{C}P^1$, т.е. из Γ_1 и Γ_2, которые пересекаются по двум точкам:

$$a \sim b, \quad (-a) \sim (-b), \qquad \{a, -a\} \subset \Gamma_1, \{b, -b\} \subset \Gamma_2$$

(см. рис. 4.1). Имеем $p_a(\Gamma) = 1$.

Функция Бейкера–Ахиезера принимает вид

$$\psi_1(u^1, u^2, z_1) = e^{u^1 z_1} \left(f_0(u^1, u^2) + \frac{f_1(u^1, u^2)}{z_1 - \alpha_1} + \dots + \frac{f_k(u^1, u^2)}{z_1 - \alpha_{s_1}} \right), \ z_1 \in \Gamma_1,$$

$$\psi_2(u^1, u^2, z_2) = e^{u^2 z_2} \left(g_0(u^1, u^2) + \frac{g_1(u^1, u^2)}{z_2 - \beta_1} + \dots + \frac{g_n(u^1, u^2)}{z_2 - \beta_{s_2}} \right), \ z_2 \in \Gamma_2.$$

$$\psi_1(a) = \psi_2(b), \quad \psi_1(-a) = \psi_2(-b). \tag{4.16}$$

Она имеет две существенные особенности в точках $P_1 = \infty \in \Gamma_1$ и $P_2 = \infty \in \Gamma_2$.

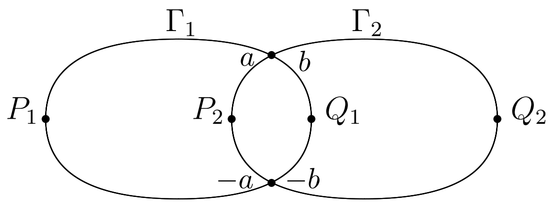


Рис. 4.1.

Общее условие нормировки имеет вид

$$\psi_1(R_{1,i}) = d_{1,i}, \quad \psi_2(R_{2,j}) = d_{2,j}, \tag{4.17}$$

где $R_{1,i} \in \Gamma_1, i = 1, \ldots, l_1$ и $R_{2,j} \in \Gamma_2, j = 1, \ldots, l_2$. Мы также имеем

$$l = l_1 + l_2 = s_1 + s_2.$$

Пусть

$$\Omega_1 = \frac{(z_1^2 - \alpha_1^2)\ldots(z_1^2 - \alpha_{l_1}^2)}{z_1(z_1^2 - a^2)(z_1^2 - R_{1,1}^2)\ldots(z_1^2 - R_{1,l_1}^2)} dz_1,$$

$$\Omega_2 = \frac{(z_2^2 - \beta_1^2)\ldots(z_2^2 - \beta_{l_2}^2)}{z_2(z_2^2 - b^2)(z_2^2 - R_{2,1}^2)\ldots(z_2^2 - R_{2,l_2}^2)} dz_2.$$

Положим

$$Q_1 = 0 \in \Gamma_1, \quad Q_2 = 0 \in \Gamma_2.$$

Если справедливы следующие равенства

$$\mathrm{res}_a \Omega_1 = -\mathrm{res}_b \Omega_2, \quad \mathrm{res}_{-a} \Omega_1 = -\mathrm{res}_{-b} \Omega_2, \quad \mathrm{res}_{Q_1} \Omega_1 = \mathrm{res}_{Q_2} \Omega_2,$$

то дифференциал Ω заданный Ω_1 и Ω_2 является регулярным и условие (4.15) выполнено. В этом случае, согласно теореме 4.1, координаты u^1 и u^2 такие, что

$$x^1(u) = \psi_1(u, 0), \quad x^2(u) = \psi_2(u, 0),$$

являются ортогональными.

Рассмотрим простейший случай $l_1 = 0$ и $l_2 = 1$.

Тогда

$$\psi_1 = e^{u^1 z_1} f_0(u^1, u^2), \quad \psi_2 = e^{u^2 z_2} \left(g_0(u^1, u^2) + \frac{g_1(u^1, u^2)}{z_2 - c} \right).$$

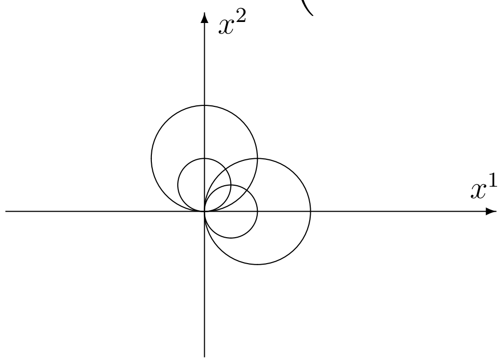


Рис. 4.2.

Условие склейки в точках пересечения и условие нормировки принимают вид

$$\psi_1(a) = \psi_2(b), \quad \psi_1(-a) = \psi_2(-b), \quad \psi_2(r) = 1, \ r = R \in \Gamma_2,$$

откуда

$$\psi_1 = e^{u^1 z_1} \left(\frac{2b(c-r)e^{au^1+(b-r)u^2}}{(b+c)(b-r)e^{2bu^2} - (b+r)(b-c)e^{2au^1}} \right),$$

$$\psi_2 = e^{u^2 z_2} \left(\frac{e^{-ru^2}((b-c)e^{2au^1} + (b+c)e^{2bu^2})(c-r)}{(b+c)(b-r)e^{2bu^2} - (b-c)(b+r)e^{2au^1}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{z_2 - c} \frac{(b^2-c^2)(r-c)e^{-ru^2}(e^{2au^1} - e^{2bu^2})}{(b+c)(r-b)e^{2bu^2} + (b-c)(b+r)e^{2au^1}} \right).$$

Дифференциал Ω определяется посредством дифференциалов

$$\Omega_1 = -\frac{1}{z_1(z_1^2 - a^2)} dz_1, \ \Omega_2 = -\frac{(z_2^2 - c^2)}{z_2(z_2^2 - b^2)(z_2^2 - r^2)} dz_2.$$

Имеем следующее условие регулярности Ω:

$$\mathrm{res}_a \Omega_1 = \mathrm{res}_{-a} \Omega_1 = -\frac{1}{2a^2} = -\mathrm{res}_b \Omega_2 = -\mathrm{res}_{-b} \Omega_2 = \frac{(b^2 - c^2)}{2b^2(b^2 - r^2)},$$

и условие (4.15) принимает вид

$$\mathrm{res}_{Q_1} \Omega_1 = \frac{1}{a^2} = \mathrm{res}_{Q_2} \Omega_2 = \frac{c^2}{r^2 b^2},$$

что влечет

$$a = \frac{br}{c}, \ r = \frac{b}{\sqrt{2 + \frac{b^2}{c^2}}}.$$

После замены $u^1 = \log y^1, \ u^2 = \log y^2$ формулы для координат записываются как

$$x^1 = \frac{-2b(r-c)}{(c-b)(b+r)} (y^2)^{-r} \frac{\frac{(y^2)^b}{(y^1)^a}}{1 + \frac{(b+c)(b-r)}{(c-b)(b+r)} \frac{(y^2)^{2b}}{(y^1)^{2a}}},$$

$$x^2 = \frac{b(c-r)}{c(b+r)}(y^2)^{-r} \frac{1 + \frac{(b+c)}{(c-b)} \frac{(y^2)^{2b}}{(y^1)^{2a}}}{1 + \frac{(b+c)(b-r)}{(c-b)(b+r)} \frac{(y^2)^{2b}}{(y^1)^{2a}}}$$

и прямыми вычислениями получаем

$$(x^1)^2 + \left(x^2 - (y^2)^{-r} \frac{b(c-r)}{c(b^2-r^2)}\right)^2 = (y^2)^{-2r} \frac{b^2(c-r)^2}{c^2(b^2-r^2)^2}.$$

Следовательно, координатные линии $y^2 = \mathrm{const}$, т.е. $u^2 = \mathrm{const}$, являются окружностями с центрами на оси x^2. При $b = \pm 1$ эти окружности касаются оси x^1, а второе семейство координатных линий состоит из окружностей с центрами на оси x^1 и касающихся оси x^2 (см. рис. 4.2).

Пример 4.2. Пусть кривая Γ — такая же как и в Примере 4.1, только пусть все существенные особенности лежат на одной компоненте, гомеоморфной $\mathbb{C}P^1$, а дивизор Q лежит на другой компоненте (см. рис. 4.3):

$$P_1 = \infty,\ P_2 = 0 \in \Gamma_1, \quad Q_1 = \infty,\ Q_2 = 0 \in \Gamma_2.$$

Зададим функцию Бейкера–Ахиезера следующим образом:

$$\psi_1(u, z_1) = e^{u^1 z_1 + \frac{u^2}{z_1}} \left(f_0(u) + \frac{f_1(u)}{z_1 - \alpha_1} + \cdots + \frac{f_k(u)}{z_1 - \alpha_{s_1}}\right),\ z_1 \in \Gamma_1;$$

$$\psi_2(u, z_2) = g_0(u) + \frac{g_1(u)}{z_2 - \beta_1} + \cdots + \frac{g_n(u)}{z_2 - \beta_{s_2}},\ z_2 \in \Gamma_2.$$

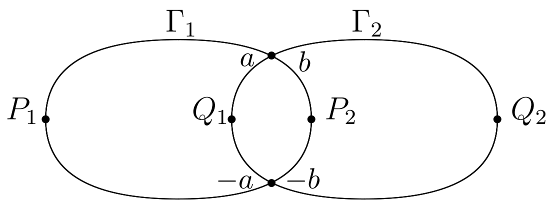


Рис. 4.3.

Условия склейки и нормировки имеют тот же вид, что и (4.16) и (4.17). Пусть

$$\Omega_1 = \frac{z_1(z_1^2-\alpha_1^2)\dots(z_1^2-\alpha_{l_1-1}^2)}{(z_1^2-a^2)(z_1^2-R_{1,1}^2)\dots(z_1^2-R_{1,l_1}^2)}dz_1,$$

$$\Omega_2 = \frac{(z_2^2-\beta_1^2)\dots(z_2^2-\beta_{l_2+1}^2)}{z_2(z_2^2-b^2)(z_2^2-R_{2,1}^2)\dots(z_2^2-R_{2,l_2}^2)}dz_2.$$

По теореме 4.1, если

$$\mathrm{res}_a\Omega_1 = -\mathrm{res}_b\Omega_2,\ \mathrm{res}_{-a}\Omega_1 = -\mathrm{res}_{-b}\Omega_2,\ \mathrm{res}_{Q_1}\Omega_2 = \mathrm{res}_{Q_2}\Omega_2,$$

то

$$\partial_{u^1}x^1\partial_{u^2}x^1 + \partial_{u^1}x^2\partial_{u^2}x^2 = 0.$$

Рассмотрим простейший случай:

$$l_1 = s_2 = 1,\ l_2 = s_1 = 0,\ r = R \in \Gamma_1,\ d_{1,1} = 1.$$

Тогда

$$\psi_1 = e^{u^1 z_1 + \frac{u^2}{z_1}} f(u), \quad \psi_2 = g_0(u) + \frac{g_1(u)}{z_2 - c},$$

$$\Omega_1 = \frac{z_1}{(z_1^2-a^2)(z_1^2-r^2)}dz_1, \quad \Omega_2 = \frac{(z_2^2-c^2)}{z_2(z_2^2-b^2)}dz_2.$$

Имеем

$$\mathrm{res}_a\Omega_1 = \mathrm{res}_{-a}\Omega_1 = \frac{1}{2(a^2-r^2)}, \quad \mathrm{res}_b\Omega_2 = \mathrm{res}_{-b}\Omega_2 = \frac{(b^2-c^2)}{2b^2},$$

$$\mathrm{res}_{Q_1}\Omega_2 = -1, \quad \mathrm{res}_{Q_2}\Omega_2 = \frac{c^2}{b^2},$$

и условия регулярности Ω и (4.15) выполнены, когда

$$b = \pm ic, \quad a^2 - r^2 = -\frac{1}{2}.$$

Для частного решения

$$b = i,\ c = -1,\ a = \frac{i}{2},\ r = \frac{1}{2},$$

формулы погружения принимают вид

$$x^1 = e^{-\frac{u^1}{2} - 2u^2} \left(\cos\left(\frac{u^1}{2} - 2u^2\right) + \sin\left(\frac{u^1}{2} - 2u^2\right) \right),$$

$$x^2 = e^{-\frac{u^1}{2} - 2u^2} \left(\cos\left(\frac{u^1}{2} - 2u^2\right) - \sin\left(\frac{u^1}{2} - 2u^2\right) \right).$$

После замены

$$y^1 = \frac{u^1}{2},\ y^2 = 2u^2$$

получим

$$x^1 = e^{-y^1 - y^2}(\cos(y^1 - y^2) + \sin(y^1 - y^2)),$$

$$x^2 = e^{-y^1 - y^2}(\cos(y^1 - y^2) - \sin(y^1 - y^2)).$$

При этом “прямые” $y^1 + y^2 = \mathrm{const}$ отвечают окружностям с центрами в $x = 0$, а “прямые” $y^1 - y^2 = \mathrm{const}$ задают в x-пространстве лучи, выходящие из начала координат.

3-ортогональные системы координат

Пример 4.3. Пусть Γ состоит из трех компонент Γ_1, Γ_2 и Γ_3, гомеоморфных $\mathbb{C}P^1$, пересекающихся по четырем точкам, как это показано на рис. 4.4:

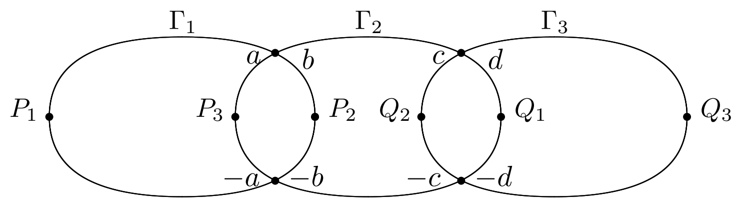


Рис. 4.4.

$$\pm a \sim \pm b, \quad \pm c \sim \pm d, \quad \pm a \in \Gamma_1,\ \pm b, \pm c \in \Gamma_2, \quad \pm d \in \Gamma_3.$$

Положим

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, \quad P_2 = 0 \in \Gamma_1, \quad P_3 = \infty \in \Gamma_2,$$

$$Q_1 = 0 \in \Gamma_2, \quad Q_2 = \infty \in \Gamma_3, \quad Q_3 = 0 \in \Gamma_3,$$
$$l = 1, \quad r = R \in \Gamma_1, \quad \psi_1(r) = 1.$$

Имеем

$$\psi_1(u, z_1) = e^{u^1 z_1 + \frac{u^2}{z_1}} f(u), \quad z_1 \in \Gamma_1,$$
$$\psi_2(u, z_2) = e^{u^3 z_2} \left(g_0(u) + \frac{g_1(u)}{z_2 - \beta} \right), \quad z_2 \in \Gamma_2,$$
$$\psi_3(u, z_3) = h_0(u) + \frac{h_1(u)}{z_3 - \gamma}, \quad z_3 \in \Gamma_3,$$

а также

$$\psi_1(\pm a) = \psi_2(\pm b), \ \psi_2(\pm c) = \psi_3(\pm d), \quad \psi_1(r) = 1.$$

Возьмем Ω заданный дифференциалами

$$\Omega_1 = \frac{z_1 dz_1}{(z_1^2 - a^2)(r^2 - z_1^2)}, \quad \Omega_2 = \frac{(\beta^2 - z_2^2) dz_2}{z_2(z_2^2 - b^2)(z_2^2 - c^2)}, \quad \Omega_3 = \frac{(\gamma^2 - z_3^2) dz_3}{z_3(z_3^2 - d^2)}.$$

Условие регулярности Ω и условие (4.15) выполнено при

$$a^2 = -\frac{1}{12}, \ b = -\frac{1}{3}, \ c = d = i, \ \beta = bc, \ \gamma = -1$$

и в этом случае мы имеем

$$x^1 = \sqrt{2} e^{-\frac{u^1}{2} - 2u^2} \cos\left(\frac{1}{12}(3\pi + 2\sqrt{3}(u^1 - 2(6u^2 + u^3))) \right),$$

$$x^2 = \sqrt{2} e^{-\frac{u^1}{2} - 2u^2} \left(\cos\left(\frac{u^1 - 2(6u^2 + u^3)}{2\sqrt{3}} \right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + u^3 \right) + \right.$$
$$\left. \sin\left(\frac{u^1 - 2(6u^2 + u^3)}{2\sqrt{3}} \right) \cos\left(\frac{\pi}{12} + u^3 \right) \right),$$

$$x^3 = \sqrt{2} e^{-\frac{u^1}{2} - 2u^2} \left(\cos\left(\frac{u^1 - 2(6u^2 + u^3)}{2\sqrt{3}} \right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + u^3 \right) - \right.$$
$$\left. \sin\left(\frac{u^1 - 2(6u^2 + u^3)}{2\sqrt{3}} \right) \sin\left(\frac{\pi}{12} + u^3 \right) \right).$$

Непосредственно проверяется, что

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 3e^{-u^1 - 4u^2},$$

$$x^1 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{1+\sqrt{3}}{2}x^3\right)\cos u^3 - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}x^3\right)\sin u^3 = 0,$$

$$2(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)\sin\left(\frac{u^1 - 2(6u^2 + u^3)}{\sqrt{3}}\right) = 0.$$

Таким образом "плоскости" $u^3 = \mathrm{const}$ задают плоскости, проходящие через точку $x = 0$, "плоскости" $u^1 + 4u^2 = \mathrm{const}$ задают сферы с центрами в $x = 0$, а "плоскости" $u^1 - 2(6u^2 + u^3) = \mathrm{const}$ задают конусы с вершинами в $x = 0$.

4.1.3 Классические системы координат

Евклидова система координат. Пусть Γ является объединением n экземпляров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$. Положим

$$P_j = \infty, \quad Q_j = 0, \quad R_j = -1 \in \Gamma_j, \quad \psi_j(R_j) = 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда дифференциал Ω задается дифференциалами

$$\Omega_j = \frac{dz_j}{z_j(z_j^2 - 1)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

на компонентах Γ. Функция Бейкера–Ахиезера ψ равна

$$\psi_j = e^{u^j z_j} f_j(u^j), \quad j = 1, \dots, n$$

и мы получаем евклидовы координаты в $\mathbb{R}^n$ (см. Замечание 4.2):

$$x^j = e^{u^j}.$$

Полярные координаты. Пусть Γ состоит из пяти неприводимых компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$, которые пересекаются, как показано на рис. 4.5:

$$\{0 \in \Gamma_1\} \sim \{0 \in \Gamma_2\}, \quad \{a \in \Gamma_2\} \sim \{b_1 \in \Gamma_3\}, \quad \{-a \in \Gamma_2\} \sim \{b_2 \in \Gamma_4\},$$

$$\{c_1 \in \Gamma_3\} \sim \{d \in \Gamma_5\}, \quad \{c_2 \in \Gamma_4\} \sim \{-d \in \Gamma_5\}.$$

Зададим инволюцию σ на Γ следующим образом:

a) на Γ_1, Γ_2 и Γ_3 инволюция имеет вид

$$\sigma(z_j) = -z_j;$$

b) Γ_3 и Γ_4 переставляются под действием σ и точки $b_1, c_1, \infty \in \Gamma_3$ отображаются в точки $b_2, c_2, \infty \in \Gamma_4$ соответственно.

Несложно проверить, что

$$\sigma(z_3) = \frac{b_2 - c_2}{b_1 - c_1} z_3 + \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 - c_1},$$

$$\sigma(z_4) = \frac{b_1 - c_1}{b_2 - c_2} z_4 + \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_2 - c_2}.$$

Положим

$$\beta_1 = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_2 - c_2}, \ \beta_2 = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 - c_1},$$

тогда $0 \in \Gamma_3$ отображается по действием σ в $\beta_2 \in \Gamma_4$, а $0 \in \Gamma_4$ отображается в $\beta_1 \in \Gamma_3$.

В качестве дивизоров $P = P_1 + P_2$ и $Q = Q_1 + Q_2$ возьмем

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, \quad P_2 = \infty \in \Gamma_2, \quad Q_1 = 0 \in \Gamma_5, \quad Q_2 = \infty \in \Gamma_5.$$

Возьмем в качестве $D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ дивизор

$$\gamma_1 = 0 \in \Gamma_3, \quad \gamma_2 = 0 \in \Gamma_4, \quad \gamma_3 = \alpha \in \Gamma_5.$$

Так как $\deg D = g + l - 1 = 3$ и $g = p_a(\Gamma) = 1$, мы имеем $l = 3$. Положим

$$R_1 = -1 \in \Gamma_1, \quad R_2 = \infty \in \Gamma_4, \quad R_3 = \infty \in \Gamma_5.$$

Тогда функция Бейкера–Ахиезера принимает вид

$$\psi_1(u, z_1) = e^{u^1 z_1} f_1(u), \quad \psi_2(u, z_2) = e^{u^2 z_2} f_2(u),$$

$$\psi_3(u, z_3) = \frac{f_3(u)}{z_3} + \widehat{f}_3(u), \quad \psi_4(u, z_4) = \frac{f_4(u)}{z_4} + \widehat{f}_4(u),$$

$$\psi_5(u, z_5) = f_5(u) + \frac{\widehat{f}_5(u)}{z_5 - \alpha}.$$

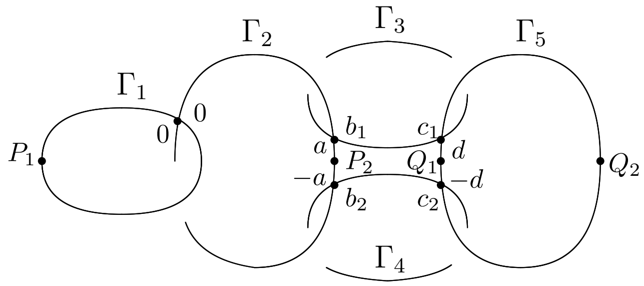


Рис. 4.5.

Имеем

$$\psi_1(u,0) = \psi_2(u,0), \quad \psi_2(u,a) = \psi_3(u,b_1), \quad \psi_2(u,-a) = \psi_4(u,b_2),$$

$$\psi_3(u,c_1) = \psi_5(u,d), \quad \psi_4(u,c_2) = \psi_5(u,-d).$$

Возьмем следующие условия нормировки:

$$\psi_1(u,-1) = 1, \quad \psi_3(u,\infty) = 0, \ \psi_4(u,\infty) = 0.$$

Это дает

$$f_1 = e^{u^1}, \quad f_2 = e^{u^1}, \quad f_3 = e^{u^1+au^2}, \quad \widehat{f}_3 = 0, \quad f_4 = e^{u^1-au^2}, \quad \widehat{f}_4 = 0,$$

$$f_5 = \frac{e^{u^1-au^2}(b_1c_2e^{2au^2}(d-\alpha) + b_2c_1(d+\alpha))}{2c_1c_2d},$$

$$\widehat{f}_5 = \frac{e^{u^1-au^2}(-b_2c_1 + e^{2au^2}b_1c_2)(d^2-\alpha^2)}{2c_1c_2d}.$$

Прямыми вычислениями легко проверить, что при

$$a = i, \quad b_1 = \bar{b}_2 = \frac{i}{2}, \quad c_1 = \bar{c}_2 = \frac{i-1}{2}, \quad d = -i\alpha$$

дифференциал Ω, заданный дифференциалами

$$\Omega_1 = -\frac{dz_1}{z_1(z_1^2-1)}, \ \Omega_2 = -\frac{dz_2}{z_2(z_2^2-a^2)}, \ \Omega_3 = -\frac{z_3(z_3-\beta_1)dz_3}{(z_3-b_1)(z_3-c_1)},$$

$$\Omega_4 = -\frac{z_4(z_4-\beta_2)dz_3}{(z_4-b_2)(z_4-c_2)}, \ \Omega_5 = -\frac{(z_5^2-\alpha^2)dz_5}{z_5(z_5^2-d^2)},$$

регулярен на Γ и удовлетворяет условию (4.15), а

$$x^1 = \psi_5(Q_1) = r\cos\varphi, \quad x^2 = \psi_5(Q_2) = r\sin\varphi,$$

где $r = e^{u^1}$ и $\varphi = u^2$.

Замечание 4.5. Мы видим, что значения α и d не определены однозначно, а имеется только соотношение $\alpha = id$. Поэтому, как и в случае метода одевания, в этой конструкции одной и той же метрике отвечают классы эквивалентных спектральных данных (см. Замечание 4.1.)

Цилиндрические координаты. В качестве Γ возьмем несвязное объединение кривой из предыдущего примера $\widehat{\Gamma}$ (полярные координаты) и копию Γ_6 кривой $\mathbb{C}P^1$. Все данные относящиеся к $\widehat{\Gamma}$ — те же самые, что и в предыдущем примере. На Γ_6 возьмем $Q_3 = 0, P_3 = \infty, R_4 = -1$ и $\psi(R_4) = 1$. Тогда мы имеем $\psi_6(u^3) = e^{u^3(z_6+1)}$ и

$$x^1 = \psi_5(Q_1) = r\cos\varphi, \quad x^2 = \psi_5(Q_2) = r\sin\varphi, \quad x^3 = \psi_6(Q_3) = z,$$

где $r = e^{u^1}, \varphi = u^2$ и $z = u^3$.

Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$. Кривая Γ состоит из 9 неприводимых компонент, которые пересекаются, как это показано на рис. 4.6:

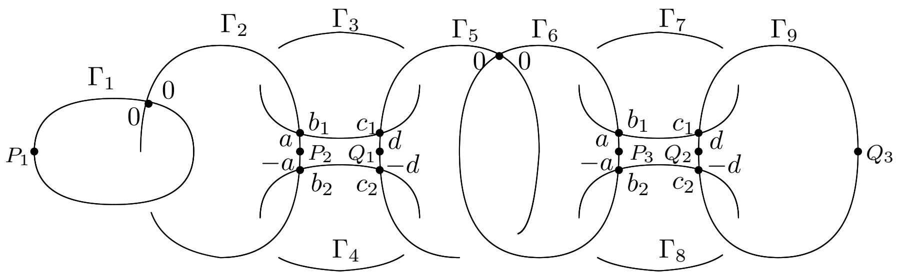


Рис. 4.6.

$$\{0 \in \Gamma_1\} \sim \{0 \in \Gamma_2\}, \quad \{a \in \Gamma_2\} \sim \{b_1 \in \Gamma_3\}, \quad \{-a \in \Gamma_2\} \sim \{b_2 \in \Gamma_4\},$$

$$\{c_1 \in \Gamma_3\} \sim \{d \in \Gamma_5\}, \quad \{c_2 \in \Gamma_4\} \sim \{-d \in \Gamma_5\}, \quad \{0 \in \Gamma_5\} \sim \{0 \in \Gamma_6\},$$

$$\{a \in \Gamma_6\} \sim \{b_1 \in \Gamma_7\}, \quad \{-a \in \Gamma_6\} \sim \{b_2 \in \Gamma_8\},$$
$$\{c_1 \in \Gamma_7\} \sim \{d \in \Gamma_9\}, \quad \{c_2 \in \Gamma_8\} \sim \{-d \in \Gamma_9\},$$

где, для простоты, мы обозначаем одним и тем же символом точки в разных компонентах, если координаты этих точек совпадают (например, a в Γ_2 и Γ_6).

Возьмем

$$Q_1 = \infty \in \Gamma_5, \quad Q_2 = \infty \in \Gamma_9, \quad Q_3 = 0 \in \Gamma_9,$$

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, \quad P_2 = \infty \in \Gamma_2, \quad P_3 = \infty \in \Gamma_6$$

и выберем дивизор D следующим образом

$$\gamma_1 = 0 \in \Gamma_3, \quad \gamma_2 = 0 \in \Gamma_4, \quad \gamma_3 = \alpha \in \Gamma_5,$$

$$\gamma_4 = 0 \in \Gamma_7, \quad \gamma_5 = 0 \in \Gamma_8, \quad \gamma_6 = \alpha \in \Gamma_9.$$

Имеем $p_a(\gamma) = 2$, $\deg D = 6$, и следовательно, $l = 5$. Положим

$$R_1 = -1 \in \Gamma_1, \quad R_2 = \infty \in \Gamma_3, \quad R_3 = \infty \in \Gamma_4, R_4 = \infty \in \Gamma_7, \quad R_5 = \infty \in \Gamma_8.$$

Функция Бейкера–Ахиезера записывается следующим образом

$$\psi_1 = e^{u^1 z_1} f_1(u), \quad \psi_2 = e^{u^2 z_2} f_2(u), \quad \psi_3 = \frac{f_3(u)}{z_3} + \widehat{f}_3(u),$$

$$\psi_4 = \frac{f_4(u)}{z_4} + \widehat{f}_4(u), \quad \psi_5 = f_5(u) + \frac{\widehat{f}_5(u)}{(z_5 - \alpha)}, \quad \psi_6 = e^{u^3 z_6} f_6(u),$$

$$\psi_7 = \frac{f_7(u)}{z_7} + \widehat{f}_7(u), \quad \psi_8 = \frac{f_8(u)}{z_8} + \widehat{f}_8(u), \quad \psi_9 = f_9(u) + \frac{\widehat{f}_9(u)}{z_9 - \alpha}.$$

Имеем следующие условия склейки (для краткости мы опускаем переменные u):

$$\psi_1(0) = \psi_2(0), \quad \psi_2(a) = \psi_3(b_1), \quad \psi_2(-a) = \psi_4(b_2), \quad \psi_3(c_1) = \psi_5(d),$$

$$\psi_4(c_2) = \psi_5(-d), \quad \psi_5(0) = \psi_6(0), \quad \psi_6(a) = \psi_7(b_1), \quad \psi_6(-a) = \psi_8(b_2),$$

$$\psi_7(c_1) = \psi_9(d), \quad \psi_8(c_2) = \psi_9(-d).$$

Возьмем следующие условия нормировки:

$$\psi_1(u,-1) = 1,\ \psi_3(u,\infty) = 0,\ \psi_4(u,\infty) = 0,\ \psi_7(u,\infty) = 0,\ \psi_8(u,\infty) = 0.$$

Пусть a, b_1, b_2, c_1, c_2, d принимают те же значения, что и в случае полярных координат и тогда регулярная форма Ω строится как и в этом случае. Прямыми вычислениями получаем

$$x^1 = \psi_5(Q_1) = r\sin\varphi,$$

$$x^2 = \psi_9(Q_2) = r\cos\varphi\sin\theta, \quad x^3 = \psi_9(Q_3) = r\cos\varphi\cos\theta,$$

где $r = e^{u^1}, \varphi = u^2$ и $\theta = u^3$.

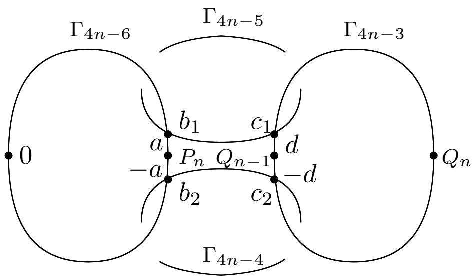
Сферические координаты в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\Gamma^{(n-1)}$ — спектральная кривая и $\psi^{(n-1)}$ — функции Бейкера–Ахиезера для $(n-1)$-мерных сферических координат. Спектральная кривая $\Gamma^{(n)}$ для n-мерных сферических координат строится как объединение $\Gamma^{(n-1)}$ и кривой, изображенной на рис. 4.7. При этом эти кривые пересекаются по точкам $0 \in \Gamma_{4n-7} \subset \Gamma^{(n-1)}$ и $0 \in \Gamma_{4n-6}$ (заметим, что число неприводимых компонент $\Gamma^{(k)}$ равно $4k-3$). Кроме того мы имеем

$$P_n = \infty \in \Gamma_{4n-6}, \quad Q_{n-1} = \infty, \quad Q_n = 0 \in \Gamma_{4n-3}.$$

На $\Gamma^{(n-1)}$ функция Бейкера–Ахиезера совпадает с $\psi^{(n-1)}$ и на дополнительных компонентах она определяется следующим образом:

$$\psi_{4n-6} = e^{u^n z_{4n-6}} f_{4n-6}(u), \quad \psi_{4n-5} = \frac{f_{4n-5}(u)}{z_{4n-5}},$$

$$\psi_{4n-4} = \frac{f_{4n-4}(u)}{z_{4n-4}}, \quad \psi_{4n-3} = f_{4n-3}(u) + \frac{\widehat{f}_{4n-3}(u)}{z_{4n-3}-\alpha}.$$



Γ_{4n-6}
Γ_{4n-5}
Γ_{4n-3}
b_1
c_1
a
d
0
P_n
Q_{n-1}
Q_n
$-a$
$-d$
b_2
c_2
Γ_{4n-4}

Рис. 4.7.

4.2 Примеры алгебраических фробениусовых многообразий

В этом параграфе мы продемонстрируем, как построить явные примеры фробениусовых многообразий с помощью аналитических методов конечнозонного интегрирования. При этом мы применим схему Кричевера для построения решений уравнений ассоциативности [20]. Хотя достаточно ясно, что решения уравнений ассоциативности, отвечающие гладким спектральным кривым не являются квазиоднородными, мы покажем, что в сильно вырожденном случае, когда спектральная кривая состоит из рациональных неприводимых компонент, решения могут быть квазиоднородными. Расширение этих решений до фробениусовых многообразий достигается использованием технической алгебраической леммы, изложенной в §4.2.4.

До недавнего времени все известные фробениусовы многообразия исчерпывались примерами Дубровина фробениусовых структур на пространствах орбит групп Кокстера (в этом случае Дубровин использовал плоскую метрику Саито на пространстве орбит и такие решения уравнений WDVV, отвечающие особенностям типа A_n, были найдены в [50]) и на пространствах Гурвица, квантовыми когомологиями и расширенными пространствами модулей комплексных структур на многообразиях Калаби–Яу [51]. В [52] этот список был расширен Шрамченко, "удвоившей" фробениусовы структуры Дубровина на пространствах Гурвица (многообразия Шрамченко имеют удвоенную размерность пространств Гурвица).

Во всех указанных случаях многообразие с такой структурой имеет свой собственный геометрический смысл и только квантовые когомологии могут не быть полупростыми, т.е. в касательной фробениусовой алгебре в общей точке могут содержаться нильпотентные элементы. Наши примеры всегда не обладают свойством полупростоты (таким образом они не связаны напрямую с изомонодромными деформациями, см. [53]) и получаются аналитическими методами без какого-либо указания на их связи с другими геометрическими объектами. Эти примеры являются алгебраическими в том смысле, что корреляторы $c_{ijk} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}$ являются алгебраическими функциями.

4.2.1 Некоторые предварительные факты о егоровских метриках и фробениусовых многообразиях

Для заданного симметричного тензора $\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\alpha}$, уравнения ассоциативности на функцию F имеют вид

$$\frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\lambda} \eta^{\lambda\mu} \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\gamma \partial t^\delta \partial t^\mu} = \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\gamma \partial t^\beta \partial t^\lambda} \eta^{\lambda\mu} \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\alpha \partial t^\delta \partial t^\mu}, \tag{4.18}$$

где $t = (t^1, \ldots, t^n)$ и индексы изменяются от 1 до n. Они эквивалентны условию, что конечномерная алгебра с образующими $e_1, \ldots, e_n$ и коммутативным умножением

$$e_\alpha \cdot e_\beta = c^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma, \quad c_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^3 F(t)}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}, \quad c^\gamma_{\alpha\beta} = \eta^{\gamma\delta} c_{\alpha\beta\delta},$$

является ассоциативной, т.е. мы имеем

$$(e_\alpha \cdot e_\beta) \cdot e_\gamma = e_\alpha \cdot (e_\beta \cdot e_\gamma) \quad \text{для всех } \alpha, \beta, \gamma.$$

Эти уравнения первоначально появились в топологической теории поля, где вместе с условиями

$$c_{1\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n; \quad \eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma,$$

где метрика $\eta_{\alpha\beta}$ — постоянная, и

$$F(\lambda^{d_1} t^1, \ldots, \lambda^{d_n} t^n) = \lambda^{d_F} F(t^1, \ldots, t^n) \tag{4.19}$$

(условие квазиоднородности) они образуют систему уравнений Виттена–Дийкграфа–Верлинде–Верлинде (WDVV) [54, 50].

Условие квазиоднородности обобщается следующим образом: предполагается, что существует векторное поле $E = (q^\alpha_\beta t^\beta + r^\alpha)\partial_\alpha$ такое, что

$E^\alpha \partial_\alpha F = d_F F$ (в случае (4.19) мы имеем $E = d_1 t^1 \partial_1 + \cdots + d_n t^n \partial_n$) и это обобщение покрывает случай квантовых когомологий.

Так как, согласно [50], важно только, чтобы корреляторы c_{ijk}, т.е. третьи производные F, были квазиоднородны в смысле (4.19), существует другое обобщение квазиоднородности, которое выглядит следующим образом

$$E^\alpha \partial_\alpha F = d_F F + (\text{полином второго порядка по } t^1, \dots, t^n).$$

Это обобщение важно для нас потому, что в наших примерах часть показателей d_i равны -1.

Геометрической формой решений уравнений WDVV является понятие фробениусова многообразия, введенное Дубровиным [53], открывшим богатые дифференциально–геометрические свойства уравнений WDVV, что положило начало фробениусовой геометрии.

Существует важное соотношение между фробениусовыми многообразиями и егоровскими метриками, также открытое Дубровиным [55].

Метрика

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n H_i^2(u) \left(du^i\right)^2 \tag{4.20}$$

называется егоровской, если коэффициенты вращения

$$\beta_{ij} = \frac{\partial_i H_j}{H_i}, \ i \neq j,$$

являются симметричными: $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Рассмотрим метрики Дарбу–Егорова, т.е. плоские егоровские метрики

$$\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \sum_{i=1}^n H_i^2(u) \left(du^i\right)^2,$$

где $x^1, \dots, x^n$ — плоские координаты в некоторой области, в которой коэффициенты $\eta_{\alpha\beta}$ постоянны. Имеем

$$\eta^{\alpha\beta} = \sum_i H_i^{-2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^i}$$

и условие плоскости метрики вместе с симметричностью коэффициентов вращения влечет, что существует функция F, называемая препотенциалом, такая, что

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i=1}^{n} H_i^2 \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^i}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} \qquad (4.21)$$

и имеют место уравнения ассоциативности:

$$c^\lambda_{\alpha\beta} c^\mu_{\lambda\gamma} = c^\mu_{\alpha\lambda} c^\lambda_{\beta\gamma} \quad \text{для всех } \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n,$$

где

$$c^\alpha_{\beta\gamma} = \sum_i \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^i}{\partial x^\gamma}.$$

При условии, что ассоциативная алгебра полупроста, обратное также верно: можно построить по решению $F(t)$ уравнений ассоциативности егоровскую метрику, удовлетворяющую (4.21).

4.2.2 Конечнозонное построение егоровских метрик и фробениусовых многообразий

Условие, что формула (4.20) определяет евклидову метрику

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

в некоторой области (без предположения, что коэффициенты вращения симметричны) означает, что $u^1, \dots, u^n$ — криволинейные n-ортогональные координаты в этой области и это условие записывается в виде уравнений Дарбу.

Первым методы интегрируемых систем для построения явных решений системы Дарбу применил Захаров [21], использовавший метод одевания. Впоследствии этот подход был распространен Кричевером на метод конечнозонного интегрирования.

В предыдущем параграфе мы уже применили процедуру Кричевера к сильно вырожденному случаю, когда спектральная кривая приводима и все ее неприводимые компоненты рациональны. В этом случае процедура построения решений сводится к линейным уравнениям.

В этом параграфе мы рассмотрим те же спектральные кривые.

Пусть Γ приводимая алгебраическая кривая такая, что все ее неприводимые компоненты $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ изоморфны $\mathbb{C}P^1$ и все сингулярности на Γ являются точками пересечений различных компонент.

Регулярный дифференциал Ω на Γ задается мероморфными дифференциалами $\Omega_1, \ldots, \Omega_s$ на компонентах такими, что каждый такой дифференциал может иметь только простые полюсы и только в точках пересечения компонент, причем сумма вычетов в каждой точке пересечения компонент равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{r} \mathrm{res}_{\mathrm{P}} \Omega_{i_j} = 0, \quad P \in \Gamma_{i_1} \cap \cdots \cap \Gamma_{i_r}.$$

Возьмем три дивизора на Γ:

$$P = P_1 + \cdots + P_n, \quad D = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{g_a+l-1}, \quad R = R_1 + \cdots + R_l,$$

где g_a арифметический род Γ. Обозначим через k_i^{-1} некоторый локальный параметр около P_i, $i = 1, \ldots, n$. Говорят, что $\psi(u^1, \ldots, u^n, z)$, $z \in \Gamma$ есть функция Бейкера–Ахиезера, отвечающая данным $S = \{P, D, R\}$, если

1) $\psi \exp(-u^i k_i)$ аналитична около P_i, $i = 1, \ldots, n$;

2) ψ мероморфна на $\Gamma \backslash \{\cup P_i\}$ с полюсами в γ_j, $j = 1, \ldots, g_a + l - 1$;

3) $\psi(u, R_k) = 1$, $k = 1, \ldots, l$.

Возьмем дополнительный дивизор $Q = Q_1 + \cdots + Q_n$ на Γ такой, что $Q_i \in \Gamma \setminus \{P \cup D \cup R\}, i = 1, \ldots, n$, и положим

$$x^j(u^1, \ldots, u^n) = \psi(u^1, \ldots, u^n, Q_j), \ j = 1, \ldots, n.$$

Для таких кривых с помощью схемы Кричевера получаем (см. §4.2):

- Пусть Γ допускает голоморфную инволюцию $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ такую, что

  1) σ имеет в точности $2m, m \leq n$ неподвижных точек $P_1, \ldots, P_n \in P$ и $2m - n$ точек из Q;

2) $\sigma(Q) = Q$, т.е. точки из Q либо неподвижны, либо переставляются инволюцией:

$$\sigma(Q_k) = Q_{\sigma(k)}, \quad k = 1, \dots, n;$$

3) $\sigma(k_i^{-1}) = -k_i^{-1}$ около P_i, $i = 1, \dots, n$;

4) существует регулярный дифференциал Ω на Γ такой, что его дивизор нулей и полюсов имеет вид

$$(\Omega)_0 = D + \sigma D + P, \quad (\Omega)_\infty = R + \sigma R + Q.$$

Тогда Ω является поднятием некоторого мероморфного дифференциала Ω_0 с $\Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ и мы имеем

$$\sum_{k,l} \eta_{kl} \partial_{u^i} x^k \partial_{u^j} x^l = \varepsilon_i^2 h_i^2 \delta_{ij},$$

где

$$h_i = \lim_{P \to P_i} \left(\psi e^{-u^i k_i} \right), \quad \eta_{kl} = \delta_{k,\sigma(l)} \mathrm{res}_{Q_k} \Omega_0,$$

и

$$\Omega_0 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_i^2 \lambda_i + O(\lambda_i) \right) d\lambda_i, \;\; \lambda_i = k_i^{-2}, \text{ в } P_i, \; i = 1, \dots, n.$$

Более того, если существует антиголоморфная инволюция

$$\tau : \Gamma \to \Gamma$$

такая, что все неподвижные точки σ неподвижны при τ и

$$\tau^*(\Omega) = \overline{\Omega}$$

то коэффициенты $H_i(u)$ вещественны для $u^1, \dots, u^n \in \mathbb{R}$ и $u^1, \dots, u^n$ являются n-ортогональными координатами в плоском n-пространстве с метрикой $\eta_{kl} dx^k dx^l$.

Следующая теорема выделяет специальный случай, когда эта конструкция приводит к метрикам Дарбу–Егорова и квазиоднородным решениям уравнений ассоциативности.

Теорема 4.2 *1) Пусть каждая компонента* $\Gamma_i, i = 1, \dots, n$ *содержит пару точек* $P_i = \infty$, $Q_i = 0$ *и* $k_i^{-1} = z_i$ *— глобальный параметр на* Γ_i. *Предположим также, что каждая точка пересечения* $a \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$ *различных компонент имеет одинаковые координаты на обеих компонентах:*

$$z_i(a) = z_j(a),$$

и инволюция σ *на каждой компоненте имеет вид*

$$\sigma(z_i) = -z_i.$$

Тогда метрика

$$ds^2 = \eta_{kl} dx^k dx^l = \sum_i \left(\varepsilon_i^2 h_i^2\right) \left(du^i\right)^2, \quad h_i = h_i(u^1, \dots, u^n),\ i = 1, \dots, n,$$

построенная по этим спектральным данным, является метрикой Дарбу–Егорова.

2) Более того, предположим, что спектральная кривая связна и функция Бейкера–Ахиезера нормирована в одной точке r*:*

$$\psi(u, r) = 1, \quad R = r \in \Gamma.$$

Тогда функции

$$c_{\alpha\beta\gamma}(x) = \sum_{i=1}^{n} H_i^2 \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^i}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^i}{\partial x^\gamma}, \quad H_i = \varepsilon_i h_i,$$

являются однородными

$$c_{\alpha\beta\gamma}(\lambda x^1, \dots, \lambda x^n) = \frac{1}{\lambda} c_{\alpha\beta\gamma}(x^1, \dots, x^n).$$

Доказательство первого утверждения следует схеме Кричевера [20]. Возьмем мероморфную функцию $f : \Gamma \to \mathbb{C}$, определенную на компонентах параметрами z_i, $i = 1, \dots, n$:

$$f(w) = z_i(w) \quad \text{для } w \in \Gamma_i.$$

Тогда дифференциал

$$\omega = f(z) \frac{\partial_i \psi(u,z)}{h_i(u)} \frac{\partial_j \psi(u,\sigma(z))}{h_j(u)}$$

имеет полюсы только в P_i и P_j с вычетами β_{ij} и $-\beta_{ji}$, что влечет

$$\sum \operatorname{res} \omega = \beta_{ij} - \beta_{ji} = 0.$$

Доказательство второго утверждения немедленно вытекает из лемм 4.1 и 4.2.

Лемма 4.1 *В условиях теоремы 4.2, мы имеем равенство*

$$x^j(u^1 + \mu, \ldots, u^n + \mu) = e^{-r\mu} x^j(u^1, \ldots, u^n).$$

Доказательство. На компонентах Γ_j функция равна

$$\psi_j(z_j) = e^{u^j z_j} \left(f_{j0}(u) + \frac{f_{j1}(u)}{z_j - \gamma_1^j} + \cdots + \frac{f_{jk_j}(u)}{z_j - \gamma_{k_j}^j} \right).$$

Пусть $r \in \Gamma_p$. Тогда условие $\psi(r) = 1$ записывается как

$$f_{p0}(u) + \frac{f_{p1}(u)}{r - \gamma_1^p} + \cdots + \frac{f_{pk_p}(u)}{r - \gamma_{k_p}^p} = e^{-ru^p}. \tag{4.22}$$

Если компоненты Γ_i и Γ_j пересекаются в некоторой точке a, то эта точка имеет одинаковые координаты на обеих компонентах и условие

$$\psi_j(a) = \psi_i(a),$$

принимает вид

$$\begin{gathered} e^{a(u^j - u^i)} \left(f_{j0}(u) + \frac{f_{j1}(u)}{a - \gamma_1^j} + \cdots + \frac{f_{jk_j}(u)}{a - \gamma_{k_j}^j} \right) = \\ \left(f_{i0}(u) + \frac{f_{i1}(u)}{a - \alpha_1^i} + \cdots + \frac{f_{ik_i}(u)}{a - \alpha_{k_i}^i} \right). \end{gathered} \tag{4.23}$$

Согласно (4.22) и (4.23) сдвиг

$$u^j \to u^j + \mu,$$

приводит к умножению коэффициентов f_{sk}:

$$f_{sk} \to f_{sk} e^{-r\mu} \quad \text{для всех } s, k.$$

Так как $x^j(u) = \psi_j(u, 0)$, это доказывает лемму.
Лемма 4.2

$$\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}(u(\lambda x)) = \lambda \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}(u(x)), \quad \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}(x).$$

Доказательство. Из леммы 4.1 следует, что

$$\frac{\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}(u^1 + \mu, \ldots, u^n + \mu)}{x^j(u^1 + \mu, \ldots, u^n + \mu)} = \frac{\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}(u^1, \ldots, u^n)}{x^j(u^1, \ldots, u^n)}.$$

Поэтому мы имеем

$$\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}(u(\lambda x)) = \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}(u^1(x) + \mu, \ldots, u^n(x) + \mu) =$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}(u(x)) \frac{\lambda x^j(u(x))}{x^j(u(x))} = \lambda \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}(u(x)), \quad \lambda = e^{-r\mu},$$

что доказывает первое утверждение леммы. Так как $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} = \delta^\alpha_\beta$, второе утверждение вытекает из первого. Это доказывает лемму 4.2 и заканчивает доказательство теоремы 4.2.

Заданное квазиоднородное решение уравнений ассоциативности (4.18) с постоянной обратимой матрицей $\left(\eta^{\alpha\beta}\right)$ можно расширить до не полупростого фробениусова многообразия посредством процедуры, предложенной в §4.2.4.

4.2.3 Примеры

Мы приведем два примера. Первый из них является простейшим решением, входящим в бесконечное семейство, полученное в теореме 4.2, а второй пример показывает, что существуют другие решения с такими же спектральными кривыми, которые не покрываются теоремой 4.2.

Пример 4.4. Пусть Γ образована двумя сферами Γ_1 и Γ_2, которые пересекаются по паре точек (см. Рис. 4.8):

$$\{a, -a \in \Gamma_1\} \sim \{a, -a \in \Gamma_2\}.$$

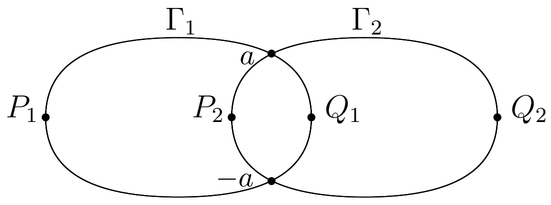


Рис. 4.8.

Арифметический род Γ равен 1: $g_a(\Gamma) = 1$.

Мы рассмотрим случай когда $n = 2$ и $l = 1$, т.е. функция Бейкера–Ахиезера нормирована в одной точке r. Положим $r \in \Gamma_2$ и $\psi_2(r) = 1$.

Функция ψ принимает вид

$$\psi_1 = e^{u^1 z_1} f_0(u^1, u^2),\ \ \psi_2 = e^{u^2 z_2}\left(g_0(u^1, u^2) + \frac{g_1(u^1, u^2)}{z_2 - c}\right)$$

и условие совместности выглядит следующим образом: $\psi_1(a) = \psi_2(a)$, $\psi_1(-a) = \psi_2(-a)$. Это влечет

$$\psi_1 = e^{u^1 z_1}\left(\frac{2a(c-r)e^{au^1+(a-r)u^2}}{(a+c)(a-r)e^{2au^2} - (a+r)(a-c)e^{2au^1}}\right),$$

$$\psi_2 = e^{u^2 z_2}\left(\frac{e^{-ru^2}((a-c)e^{2au^1} + (a+c)e^{2au^2})(c-r)}{(a+c)(a-r)e^{2au^2} - (a-c)(a+r)e^{2au^1}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{z_2 - c}\frac{(a^2-c^2)(r-c)e^{-ru^2}(e^{2au^1} - e^{2au^2})}{(a+c)(r-a)e^{2au^2} + (a-c)(a+r)e^{2au^1}}\right).$$

Дифференциал Ω определяется дифференциалами

$$\Omega_1 = \frac{\beta}{z_1(z_1^2 - a^2)} dz_1,\ \Omega_2 = \frac{(z_2^2 - c^2)}{z_2(z_2^2 - a^2)(z_2^2 - r^2)} dz_2.$$

Условие регулярности Ω имеет вид

$$\mathrm{res}_a \Omega_1 = \mathrm{res}_{-a} \Omega_1 = \frac{\beta}{2a^2} = -\mathrm{res}_a \Omega_2 = -\mathrm{res}_{-a} \Omega_2 = -\frac{(a^2 - c^2)}{2a^2(a^2 - r^2)},$$

что влечет

$$\beta = \frac{c^2 - a^2}{a^2 - r^2}. \tag{4.24}$$

Для получения евклидовой метрики $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ мы предполагаем, что $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2$ или эквивалентно

$$\mathrm{res}_{Q_1} \Omega_1 = -\frac{\beta}{a^2} = \mathrm{res}_{Q_2} \Omega_2 = -\frac{c^2}{r^2 a^2}$$

откуда мы получаем

$$\beta = \frac{c^2}{r^2}, \quad r = \frac{a}{\sqrt{2 - \frac{a^2}{c^2}}}. \tag{4.25}$$

Из (4.24) и (4.25) мы получаем формулу, выражающую r через свободные параметры a и c:

$$r = \frac{a}{\sqrt{2 - \frac{a^2}{c^2}}}.$$

Что бы получить вещественнозначные функции $x^1, \ldots, x^n$, мы должны предположить, что $\tau^*(\Omega) = \bar{\Omega}$ для $\tau : z_i \to \bar{z}_i, i = 1, 2$. Это имеет место, когда

$$a^2, c^2, r^2 \in \mathbb{R}.$$

Препотенциал принимает вид

$$F_{a,c}(x^1, x^2) = \frac{1}{4ac} \left(2x_2 \sqrt{(a^2 - c^2)x_1^2 + c^2 x_2^2} \right.$$

$$\left. +2cx_1^2 \log \left(-\frac{cx_2 + \sqrt{(a^2 - c^2)x_1^2 + c^2 x_2^2}}{x_1} \right) - \sqrt{2c^2 - a^2}(x_1^2 + x_2^2) \right)$$

$$\times \log\left(c^2(x_1^2-3x_2^2)+a^2(x_2^2-x_1^2)-2x_2\sqrt{2c^2-a^2}\sqrt{(a^2-c^2)x_1^2+c^2x_2^2}\right)\Big)$$

и удовлетворяет уравнениям ассоциативности при $\eta_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$.

Когда $a=1,\ c=\frac{2}{\sqrt{7}}$ формулы для координат и корреляторов являются достаточно простыми:

$$x^1=\frac{4(7-\sqrt{7})e^{u^1-u^2}}{(21-6\sqrt{7})e^{2u^1}+(7+2\sqrt{7})e^{2u^2})},$$

$$x^2=\frac{e^{-2u^2}(3(\sqrt{7}-3)e^{2u^1}+(5+\sqrt{7})e^{2u^2})}{3(\sqrt{7}-2)e^{2u^1}+(2+\sqrt{7})e^{2u^2}},$$

$$c_{111}=-\frac{9x_1^8+51x_1^6x_2^2+88x_1^4x_2^4+(2x_1^2x_2^3+4x_2^5)\sqrt{(3x_1^2+4x_2^2)^3}+48x_1^2x_2^6}{2x_1(3x_1^4+7x_1^2x_2^2+4x_2^4)^2},$$

$$c_{112}=\frac{9x_1^6x_2+15x_1^4x_2^3-8x_1^2x_2^5+(2x_1^2x_2^2+4x_2^4)\sqrt{(3x_1^2+4x_2^2)^3}-16x_2^7}{2(3x_1^4+7x_1^2x_2^2+4x_2^4)^2},$$

$$c_{122}=-\frac{9x_1^7+15x_1^5x_2^2-8x_1^3x_2^4+(2x_1^3x_2+4x_1x_2^3)\sqrt{(3x_1^2+4x_2^2)^3}-16x_1x_2^6}{2(3x_1^4+7x_1^2x_2^2+4x_2^4)^2},$$

$$c_{222}=\frac{-27x_1^6x_2-16x_2^7-72x_1^2x_2^5+(4x_1^2x_2^2+2x_1^4)\sqrt{(3x_1^2+4x_2^2)^3}-81x_1^4x_2^3}{2(3x_1^4+7x_1^2x_2^2+4x_2^4)^2}.$$

Пример 4.5. Пусть комплексная кривая Γ — такая же, как в примере 4.4. В отличие от примера 4.4 мы предположим, что

$$P_1=\infty\in\Gamma_1,\quad P_2=0\in\Gamma_1,\quad Q_1=\infty\in\Gamma_2,\quad Q_2=0\in\Gamma_2,$$

точка нормализации $R=r$ лежит на Γ_1 и дивизор полюсов $D=c$ лежит на Γ_2 (см. Рис. 4.9). Вместе с тем мы не предполагаем, что точки пересечения имеют одинаковые координаты:

$$a\sim b,\quad -a\sim -b,\quad \pm a\in\Gamma_1,\ \pm b\in\Gamma_2,\ a\neq b.$$

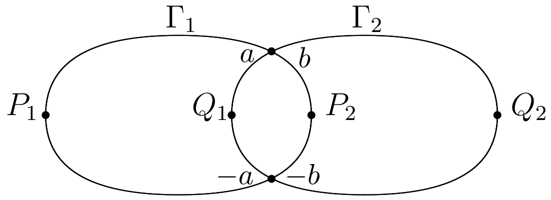


Рис. 4.9.

Возьмем функцию Бейкера–Ахиезера в виде

$$\psi_1 = e^{u^1 2z_1 + \frac{u^2}{2z_1}} f(u), \quad \psi_2 = g_0(u) + \frac{g_1(u)}{z_2 - c}.$$

Дифференциал Ω определяется дифференциалами

$$\Omega_1 = \frac{z_1}{(z_1^2 - a^2)(z_1^2 - r^2)} dz_1, \quad \Omega_2 = \frac{(z_2^2 - c^2)}{z_2(z_2^2 - b^2)} dz_2.$$

Имеем условие регулярности:

$$\mathrm{res}_a \Omega_1 = \mathrm{res}_{-a} \Omega_1 = \frac{1}{2(a^2 - r^2)} = -\mathrm{res}_b \Omega_2 = -\mathrm{res}_{-b} \Omega_2 = -\frac{(b^2 - c^2)}{2b^2},$$

и условие евклидовости: $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2$:

$$\mathrm{res}_{Q_1} \Omega_2 = -1 = \mathrm{res}_{Q_2} \Omega_2 = \frac{c^2}{b^2}.$$

Эти условия выполнены тогда и только тогда, когда $b = \pm ic$ и $a^2 - r^2 = -\frac{1}{2}$. Положим

$$b = i, \ c = -1, \ a = \frac{i}{2}, \ r = \frac{1}{2},$$

что приводит к

$$x^1 = e^{-u^1 - u^2} (\cos(u^1 - u^2) + \sin(u^1 - u^2)),$$

$$x^2 = e^{-u^1 - u^2} (\cos(u^1 - u^2) - \sin(u^1 - u^2)).$$

Мы получаем метрику Дарбу–Егорова

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 = 4e^{-2(u^1 + u^2)} \left(\left(du^1\right)^2 + \left(du^2\right)^2 \right)$$

и квазиоднородные решения уравнений ассоциативности (4.18) потому, что как и в случае теоремы 4.2 имеем

$$x^i(u^1+\mu, u^2+\mu) = e^{-2\mu} x^i(u^1, u^2), \quad i = 1, 2.$$

Эти решения выглядят очень просто и препотенциал $F(x^1, x^2)$ равен

$$F(x^1, x^2) = -\frac{1}{8}\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right) \log\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right).$$

Более того он включен в линейное семейство квазиоднородных функций

$$F_q(x^1, x^2) = q\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right) \arctan\left(\frac{x^1}{x^2}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right) \log\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right), \quad q \in \mathbb{R},$$

которые удовлетворяют уравнениям ассоциативности при $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

Корреляторы для F также выглядят очень просто:

$$c_{111} = -\frac{3}{2}\frac{x^1}{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2} + \frac{\left(x^1\right)^3}{\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right)^2},$$

$$c_{112} = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2} + \frac{\left(x^1\right)^2 x^2}{\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right)^2},$$

и формулы для c_{122} и c_{222} получаются из предыдущих перестановкой индексов $1 \leftrightarrow 2$.

4.2.4 Алгебраическая лемма

Лемма 4.3 *Пусть $F(t^1, \ldots, t^n)$ — решение уравнений ассоциативности с постоянной метрикой $\eta_{\alpha\beta}$. Тогда функция*

$$\widetilde{F}(t^0, t^1, \ldots, t^n, t^{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta t^0 + \left(t^0\right)^2 t^{n+1}\right) + F(t^1, \ldots, t^n)$$

удовлетворяет уравнениям ассоциативности (4.18) с метрикой

$$\widetilde{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \eta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и ассоциативная алгебра, порожденная элементами $e_0, e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$*, с законом умножения*

$$e_i \cdot e_j = c_{ij}^k e_k, \quad c_{ij}^k = \widetilde{\eta}^{kl} \frac{\partial^3 \widetilde{F}}{\partial t^l \partial t^i \partial t^j},$$

имеет единицу e_0*:*

$$e_o \cdot e_k = e_k \quad \text{для всех } k = 0, \ldots, n+1,$$

и нильпотентный элемент e_{n+1}*:*

$$e_{n+1}^2 = 0.$$

Более того, если F *квазиоднородна и* $d_\alpha + d_\beta = c$ *для всех* α, β *таких, что* $\eta_{\alpha\beta} \neq 0$*, тогда* $\widetilde{F}$ *также квазиоднородна с* $d_0 = d_F - c, d_{n+1} = 2c - d_F$ *и теми же значениями* d_α*,* $\alpha = 1, \ldots, n$*, как и для* F*.*

Доказательство этой леммы заключается в прямой проверке.

Применяя эту процедуру к примерам из §4.2.3, мы получим четырехмерное фробениусово многообразие M с координатами $t^0, t^2 = x^1, t^2 = x^2, t^3$. Элемент e_0 является единицей, а элемент e_3 является нильпотентным в каждой касательной алгебре $T_tM : e_{n+1}^2 = 0$. В этих примерах имеем $d_F = 2, d_1 = d_2 = 1$ и, следовательно, $d_0 = 0$ и $d_3 = 2$.

Эти примеры задают двумерные деформации кольца когомологий многообразия $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$. В самом деле, имеются стандартные образующие

$$e_0, \ldots, e_3 \in H^*(\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2; \mathbb{C}) :$$
$$e_0 \in H^0, \quad e_1, e_2 \in H^2, \quad e_3 \in H^4, \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3, \quad e_1 e_2 = 0.$$

Справедливо тождество $d_i = \frac{\deg e_i}{2}$. Эти деформации изменяют правила умножения для двумерных классов посредством добавления двумерных членов:

$$e_i e_j = e_3 + c_{ij}^k(t) e_k, \quad i, j = 1, 2.$$

Заметим, что в теории Зайберга–Виттена уравнения ассоциативности появились даже в более общей постановке, когда матрица η не обязательно постоянна и условие квазиоднородности опущено [56].

Глава 5

Минимальные и гамильтоново минимальные лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$

5.1 Примеры минимальных и гамильтоново минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$

В данном параграфе мы укажем новый метод построения гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых погружений некоторых многообразий в $\mathbb{C}^n$ и в $\mathbb{C}P^n$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерное подмногообразие, заданное в системой уравнений

$$e_{1j}u_1^2 + \cdots + e_{nj}u_n^2 = d_j,\ j = 1, \ldots, n-k, \tag{5.1}$$

где $d_j \in \mathbb{R}, e_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Так как $\dim M = k$, то можно считать, что уравнения (5.1) линейно независимы и целочисленные векторы

$$e_j = (e_{j1}, \ldots, e_{j(n-k)}) \in \mathbb{Z}^{n-k}, j = 1, \ldots, n$$

задают решетку Λ в $\mathbb{R}^{n-k}$ максимального ранга. Обозначим через Λ^*

двойственную решетку к Λ, т.е.

$$\Lambda^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R}^{n-k} | (\lambda^*, \lambda) \in \mathbb{Z}, \lambda \in \Lambda\}.$$

Обозначим через Γ следующую фактор-группу

$$\Gamma = \Lambda^*/2\Lambda^*.$$

Имеет место очевидный изоморфизм

$$\Gamma = \mathbb{Z}_2^{n-k}.$$

Через T^{n-k} обозначим $(n-k)$-мерный тор

$$T^{n-k} = \{(e^{\pi i(e_1,y)}, \dots, e^{\pi i(e_n,y)})\} \subset \mathbb{C}^n,$$

где

$$y = (y_1, \dots, y_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k},$$

$$(e_j, y) = e_{j1}y_1 + \dots + e_{j(n-k)}y_{n-k}.$$

Определим действие группы Γ на многообразии $M \times T^{n-k}$. Для $\gamma \in \Gamma$ положим

$$\gamma(u_1, \dots, u_n, y) = (u_1 \cos \pi(e_1, \gamma), \dots, u_n \cos \pi(e_n, \gamma), y + \gamma).$$

Отметим, что $\cos \pi(e_j, \gamma) = \pm 1$. Введем отображение

$$\varphi : M \times T^{n-k} \to \mathbb{C}^n,$$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n, y) = (u_1 e^{\pi i(e_1,y)}, \dots, u_n e^{\pi i(e_n,y)}).$$

Обозначим посредством e вектор

$$e = e_1 + \dots + e_n.$$

Мы полагаем, что на $\mathbb{C}^n$ задана евклидова метрика и симплектическая форма

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n.$$

Справедлива
Теорема 5.1 *Группа Γ действует на $M \times T^{n-k}$ свободно. Отображение φ задает погружение*

$$\psi_1 : M_1 = M \times T^{n-k}/\Gamma \to \mathbb{C}^n.$$

Погружение ψ_1 является H-минимальным лагранжевым. Если $e = 0$, то ψ_1 — минимальное лагранжево погружение.

Для того, чтобы M_1 было замкнутым достаточно, например, потребовать чтобы одно из уравнений (5.1) задавало многомерный эллипсоид. Условие $e = 0$ не позволяет M_1 быть замкнутым.

В [23] показано, что тор

$$S^1(r_1) \times \cdots \times S^1(r_n) \subset \mathbb{C}^n,$$

где $S^1(r_j)$ — окружность радиуса r_j, является H-минимальным лагранжевым подмногообразием в $\mathbb{C}^n$. Отметим, что это утверждение вытекает из того факта, что окружность $S^1(r)$ в $\mathbb{C}$ является H-минимальным лагранжевым подмногообразием и из следующей леммы.
Лемма 5.1 *Пусть $P = P_1 \times P_2$ и $\omega = \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$, где (P_i, ω_i) — кэлерово многообразие, $\pi_i : P \to P_i$ — проекция, $i = 1, 2$. Пусть $L_i \subset P_i$ — H-минимальное лагранжево подмногообразие, $i = 1, 2$. Тогда подмногообразие $L = L_1 \times L_2 \subset P$ является H-минимальным лагранжевым подмногообразием.*

Рассмотрим случай, когда M является конусом, т.е. $d_j = 0$ в уравнениях (5.1). Тогда этому конусу отвечает погружение ψ_2 в комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ $(n-1)$-мерного многообразия M_2, которое получается факторизацией многообразия

$$(M - \{0\}) \times T^{n-k}/\Gamma$$

по действию $\mathbb{R}^*$

$$\psi_2(u_1, \dots, u_n, y) = (u_1 e^{\pi i (e_1, y)} : \cdots : u_n e^{\pi i (e_n, y)}).$$

Мы полагаем, что на $\mathbb{C}P^{n-1}$ задана метрика Фубини–Штуди и в качестве симплектической формы берется кэлерова форма Ω этой метрики.

Имеет место

Теорема 5.2 *Погружение ψ_2 является H-минимальным лагранжевым погружением.*

Если $e = 0$, то ψ_2 является минимальным лагранжевым погружением.

Очевидным образом строятся примеры замкнутых многообразий M_2. Для этого достаточно, например, чтобы в одном из уравнений (5.1) все коэффициенты кроме одного были положительные.

Хела и Ромон [26] установили соответствие между H-минимальными лагранжевыми конусами в $\mathbb{C}^3$ и H-минимальными лагранжевыми поверхностями в $\mathbb{C}P^2$, но конкретных примеров таких поверхностей в [26] предложено не было. Кастро и Урбано [29] построили примеры лагранжевых минимальных торов в $\mathbb{C}P^2$.

Из леммы 5.1 следует, что используя примеры H-минимальных лагранжевых погружений в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ можно строить H-минимальные лагранжевы погружения в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}P^{n_k}$.

В параграфе 5.1.1 доказана лемма 5.1, а параграфах 5.1.2 и 5.1.3 — теоремы 5.1 и 5.2. В конце параграфов 5.1.2 и 5.1.3 мы также укажем некоторые примеры к теоремам 5.1 и 5.2.

5.1.1 Доказательство леммы 5.1

Обозначим через H векторное поле средней кривизны вдоль L. О [23] доказал следующее утверждение:

Лагранжево подмногообразие $L \subset P$ является H-минимальным тогда и только тогда, когда

$$\delta\omega_H = 0,$$

где δ — оператор сопряженный к d по Ходжу.

Доказательство леммы 5.1 Лагранжевость L вытекает из

$$\omega(V, V') = \omega(\pi_1^* V_1 + \pi_2^* V_2, \pi_1^* V_1' + \pi_2^* V_2') =$$

$$\pi_1^*\omega_1(V_1, V_1') + \pi_2^*\omega_2(V_2, V_2') = 0,$$

где V и V' — касательные векторы к L, V_i и V_i' — однозначно определенные касательные векторы к L_i, такие что векторы V и V' раскладываются в сумму их поднятий на L,

$$V = \pi_1^* V_1 + \pi_2^* V_2, \quad V' = \pi_1^* V_1' + \pi_2^* V_2'.$$

Покажем, что $\delta \pi_1^* \alpha = \pi_1^* \delta \alpha$, где $\delta = - * d *$, $*$ — звездочка Ходжа, α — 1-форма на P_1. Пусть $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ — координаты в окрестности $p_1 \in P_1$, $(y) = (y_1, \dots, y_k)$ — координаты в окрестности $p_2 \in P_2$. В силу линейности δ и π_1^* достаточно рассмотреть случай $\alpha = f(x) dx_1$. Оператор $*$ на P_1 имеет вид

$$*\frac{dx_1}{g_1(x)} = \frac{1}{g_2(x)} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n, \ * \frac{1}{g_1(x) g_2(x)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 1,$$

где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — нормы форм dx_1 и $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Аналогично на P звездочка имеет вид

$$*\frac{dx_1}{g_1(x)} = \frac{1}{g_2(x) g(y)} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k,$$

$$*\frac{1}{g_1(x) g_2(x) g(y)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k = 1,$$

где $g(y)$ — норма формы $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$. Тогда

$$\pi_1^* \delta \alpha = -\pi_1^* * d * \alpha = -\pi_1^* * d \left(\frac{f(x) g_1(x)}{g_2(x)} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \right)$$

$$= -\pi_1^* * \left(\partial_{x_1} \left(\frac{f(x) g_1(x)}{g_2(x)} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \right) = -\partial_{x_1} \left(\frac{f(x) g_1(x)}{g_2(x)} \right) g_1(x) g_2(x).$$

С другой стороны

$$\delta \pi_1^* \alpha = - * d \left(\frac{f(x) g_1(x)}{g_2(x) g(y)} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k \right)$$

$$= - * \left(\partial_{x_1} \left(\frac{f(x) g_1(x)}{g_2(x) g(y)} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k \right)$$

$$= -\partial_{x_1} \left(\frac{f(x) g_1(x)}{g_2(x)} \right) g_1(x) g_2(x).$$

Аналогично показывается, что $\delta\pi_2^*\alpha = \pi_2^*\delta\alpha$. Отметим, что из определения средней кривизны легко вывести равенство

$$H = \pi_1^* H_1 + \pi_2^* H_2,$$

где H_i — векторное поле средней кривизны вдоль L_i. Тогда H-минимальность L вытекает из равенств

$$\delta\omega_H = \delta\omega_{\pi_1^* H_1 + \pi_2^* H_2} = \delta\pi_1^*\omega_{1\,H_1} + \delta\pi_2^*\omega_{2\,H_2}$$

$$= \pi_1^*\delta\omega_{1\,H_1} + \pi_2^*\delta\omega_{2\,H_2} = 0.$$

Лемма 5.1 доказана.

5.1.2 Погружения в $\mathbb{C}^n$ (теорема 5.1)

Существует критерий H-минимальности в терминах лагранжева угла — функции определенной на L:

Погружение ψ многообразия L — H-минимально тогда и только тогда, когда лагранжев угол — гармоническая функция на L.

Напомним конструкцию Вольфсона [57] построения лагранжева угла.

Выберем ориентацию на L. Пусть K — каноническое линейное расслоение над P со связностью ∇, индуцированной связностью Леви–Чивита. Сечения K — это голоморфные n-формы на P. Предположим, что существует некоторое сечение σ расслоения $\psi^* K$ параллельное на L в индуцированной связности, т.е. $\psi^*\nabla\sigma = 0$. Пусть норма σ в каждой точке равна 1. Выберем в каждой точке $x \in L$ ортонормированный касательный репер ξ, согласованный с ориентацией L. Тогда получаем некоторую функцию $\beta(x)$ на L, определяемую равенством

$$\sigma(\xi) = e^{i\beta(x)}.$$

Функция β называется лагранжевым углом на L. От выбора ξ значение β не зависит. При другом выборе σ функция β может измениться лишь на константу, следовательно, 1-форма $d\beta$ корректно определена на L (подробности см. в [57]). В общем случае функция $\beta(x)$ многозначна.

При обходе по циклу она может изменить свое значение на $2k, k \in \mathbb{Z}$. Вольфсон [57] показал, что

$$d\beta = \omega_H.$$

Следовательно, погружение ψ — H-минимально тогда и только тогда, когда лагранжев угол — гармоническая функция на L, т.е.

$$\Delta\beta = \delta d\beta = 0.$$

С помощью лагранжева угла можно вычислить вектор средней кривизны $\psi(L)$. Из лагранжевости ψ и равенств

$$(J_P H, V)_P = \omega(H, V) = d\beta(\psi^*(V)) = (\psi_*(\mathrm{grad}\beta), V)_P,$$

где $(.,.)_P$ — риманова метрика на P, J_P — комплексная структура на P, V — касательный вектор к $\psi(L)$, получаем

$$H = -J_P\psi_*(\mathrm{grad}\beta) \tag{5.2}$$

Для лагранжевых погружений в $\mathbb{C}^n$ лагранжев угол можно вычислить с помощью формы

$$dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n,$$

так как она параллельна на $\mathbb{C}^n$ и, следовательно,

$$\psi^*\nabla(\psi^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)) = 0.$$

Нам понадобится следующая лемма. Пусть задана блочно диагональная метрика вида

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}(x)dx_i dx_j + \sum_{i,j=1}^{n-k} \widetilde{g}_{ij}(x)dy_i dy_j, \tag{5.3}$$

где $(x) = (x_1, \ldots, x_k)$ и $(y) = (y_1, \ldots, y_{n-k})$. Имеет место

Лемма 5.2 *Если функция α линейна по переменным y:*

$$\alpha = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n-k} y_{n-k}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

то она является гармонической в метрике ds^2.

Доказательство. Обозначим посредством $g, \widetilde{g}, g^{ij}$ и $\widetilde{g}^{ij}$ соответственно $\det g_{ij}, \det\widetilde{g}_{ij}$, компоненты матриц $(g_{ij})^{-1}$ и $(\widetilde{g}_{ij})^{-1}$. Тогда

$$\Delta\alpha = \frac{1}{\sqrt{g\widetilde{g}}}\sum_k \partial_{x_k}(\sum_i g^{ik}\sqrt{g\widetilde{g}}\partial_{x_i}\alpha) + \frac{1}{\sqrt{g\widetilde{g}}}\sum_k \partial_{y_k}(\sum_i \widetilde{g}^{ik}\sqrt{g\widetilde{g}}\partial_{y_i}\alpha) = 0.$$

Лемма 5.2 доказана.

Через

$$< \xi, \eta >= \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i\overline{\eta}_i = (\xi, \eta) - i\omega(\xi, \eta)$$

будем обозначать эрмитово произведение векторов ξ и η в $\mathbb{C}^n$.

Доказательство теоремы 5.1. Пусть $\widetilde{F} = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ — карта на M, где $x \in U^k \subset \mathbb{R}^k$. Рассмотрим карту на $\psi_1(M_1)$

$$F = (f_1(x)e^{\pi i(e_1,y)}, \dots, f_n(x)e^{\pi i(e_n,y)}) : U^k \times V^{n-k} \to \psi_1(M_1) \subset \mathbb{C}^n,$$

где $y \in V^{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k}$. Из равенства (5.1) получаем

$$\langle\partial_{y_j}F, \partial_{x_s}F\rangle = \pi i e_{1j}f_1\partial_{x_s}f_1 + \dots + \pi i e_{nj}f_n\partial_{x_s}f_n = 0, \qquad (5.4)$$

следовательно, индуцированная метрика на M_1 в локальных координатах имеет вид (5.3). Далее, из (5.4), $\langle\partial_{x_s}F, \partial_{x_j}F\rangle \in \mathbb{R}$ и $\langle\partial_{y_s}F, \partial_{y_j}F\rangle \in \mathbb{R}$ получаем равенства

$$\omega(\partial_{y_j}F, \partial_{x_s}F) = \omega(\partial_{y_j}F, \partial_{y_s}F) = \omega(\partial_{x_s}F, \partial_{x_j}F) = 0,$$

которые означают, что погружение ψ_1 является лагранжевым.

Если многообразие M гладкое, то векторы $\partial x_jF(x)$ линейно независимы, поскольку

$$< \partial x_jF(x), \partial x_kF(x) >= (\partial x_j\widetilde{F}(x), \partial x_k\widetilde{F}(x)).$$

Векторы нормали к гиперповерхностям, заданным уравнениями (5.1), имеют вид

$$n_j = (e_{1j}u_1, \dots, e_{nj}u_n).$$

Если точка $(u_1, \dots, u_n) \in M$ гладкая, то n_j линейно независимы, следовательно, матрица составленная из компонент векторов n_j имеет ранг $n-k$. При умножении k-го столбца матрицы на $\pi i e^{\pi i (e_k, y)}$ ее ранг (над $\mathbb{R}$) не меняется. Поэтому векторы

$$\partial_{y_j} F = (\pi i e_{1j} f_1 e^{\pi i (e_1, y)}, \dots, \pi i e_{nj} f_n e^{\pi i (e_n, y)})$$

линейно независимы. Из (5.4) вытекает, что отображение F является гладким максимального ранга.

Из (5.4) также вытекает, что в касательном пространстве каждой точки можно выбрать ортонормированный базис вида

$$p_j = (p_{j1}(x) e^{\pi i (e_1, y)}, \dots, p_{jn}(x) e^{\pi i (e_n, y)}), j = 1, \dots, k,$$

$$q_s = (\pi i q_{s1}(x) e^{\pi i (e_1, y)}, \dots, \pi i q_{sn}(x) e^{\pi i (e_n, y)}), s = 1, \dots, n-k.$$

На M_1 можно выбрать ориентацию так, чтобы лагранжев угол имел вид

$$\beta = -i \log (dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n(p, q)) = -i \log i^{n-k} e^{i(e_1 + \dots + e_n, y)},$$

где (p, q) — матрица (с точностью до перестановки двух строк), составленная из компонент векторов p_j и q_s. По лемме 5.2 $\Delta\beta = 0$, что доказывает H-минимальность ψ_1. Если $e = 0$, то $\beta = const$ и из формулы (5.2) следует минимальность ψ_1.

Из определения Γ вытекает, что, если $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq 0$, то существует вектор e_j, такой, что (γ, e_j) — нечетное число. Действительно, если $(\gamma, e_s) \in 2\mathbb{Z}$ для всех s, то по определению $\frac{\gamma}{2} \in \Lambda^*$, поэтому, $\gamma \in 2\Lambda^*$. Следовательно, $e^{\pi i (e_j, y + \gamma)} = -e^{\pi i (e_j, y)}$, а значит, действие группы Γ на $M \times T^{n-k}$ является свободным.

Покажем, что самопересечения у $\psi_1(M_1)$ могут возникать только в точках, у которых $u_j = 0$ для некоторого j. Предположим, что

$$\varphi(u_1, \dots, u_n, y) = \varphi(u_1', \dots, u_n', y')$$

и $u_j \neq 0$. Тогда

$$|u_1| = |u_1'|, \dots, |u_n| = |u_n'|,$$

$$e^{\pi i(e_1,y-y')} = \pm 1, \dots, e^{\pi i(e_n,y-y')} = \pm 1,$$

т.е.

$$(e_1, y-y') \in \mathbb{Z}, \dots, (e_n, y-y') \in \mathbb{Z},$$

следовательно, $\gamma = y - y' \in \Gamma$,

$$u_1 = u_1' \cos \pi(e_1, \gamma), \dots, u_n = u_n' \cos \pi(e_n, \gamma),$$

$$\gamma(u_1', \dots, u_n', y') = (u_1, \dots, u_n, y).$$

Таким образом ψ_1 является погружением многообразия M_1 в $\mathbb{C}^n$. Теорема 5.1 доказана.

Пример 5.1. Пусть M — эллипс, заданный уравнением

$$u_1^2 + 2u_2^2 = 1.$$

В этом случае

$$\Lambda = \mathbb{Z},\ \Lambda^* = \mathbb{Z},\ \Gamma = \mathbb{Z}_2.$$

Ненулевой элемент γ из Γ действует на $M \times S^1$ следующим образом

$$\gamma(u_1, u_2, q) = (-u_1, u_2, -q).$$

С точностью до гомеоморфизма можно считать, что M является единичной окружностью в $\mathbb{C}^1$, тогда γ действует на торе $T = S^1 \times S^1$ следующим образом

$$\gamma(q_1, q_2) = (\bar{q}_1, -q_2).$$

Рассмотрим универсальное накрытие тора T плоскостью $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) \to (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}).$$

Действие $\mathbb{Z}_2$ на T индуцирует действие $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{R}^2$, точка (x, y) переходит под действием ненулевого элемента в $(-x, y + \frac{1}{2})$. Таким образом многообразие $T/\mathbb{Z}_2$ гомеоморфно

$$\mathbb{R}^2/\{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2\}.$$

Фундаментальной областью действия группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{R}^2$ служит прямоугольник с вершинами

$$A(0,0),\ B(0,\frac{1}{2}),\ C(1,0),\ D(1,1).$$

При этом вектор AB нужно отождествить с CD, а вектор AC отождествить с BD, но со сменой ориентации. Следовательно, $M \times S^1/\Gamma$ является бутылкой Клейна $\mathcal{K}$. При отображении φ окружности $\{(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, y)\}$ и $\{(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, y + \frac{1}{2})\}$ у $\mathcal{K}$ отождествляются.

Пример 5.2. Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть M — $(n-1)$-мерный эллипсоид, заданный уравнением

$$m_1 u_1^2 + \cdots + m_n u_n^2 = 1,$$

где m_j — натуральные числа. Ненулевой элемент из $\gamma \in \Gamma = \mathbb{Z}_2$ действует на $M \times S^1$ следующим образом

$$\gamma(u, q) = (\tau(u), -q),$$

где $\tau : M \to M$ — некоторая инволюция. Разрежем S^1 на две половины. С точностью до гомеоморфизма можно считать, что одна из этих частей является отрезком $[0,1]$. Тогда $M \times S^1/\Gamma$ получается из цилиндра $M \times [0,1]$ отождествлением точек на краю, а именно, точку вида $(u,0)$ нужно отождествить с $(\tau(u),1)$. Если τ сохраняет ориентацию на M, то $M \times S^1/\Gamma$ диффеоморфно $S^{n-1} \times S^1$, а если не сохраняет ориентацию, то $M \times S^1/\Gamma$ является обобщенной бутылкой Клейна $\mathcal{K}^n$. Например, в случае когда M является сферой, инволюция τ отождествляет точку u с $-u$. Если при этом сфера четномерна, то τ не сохраняет ориентацию, а если нечетномерна, то τ сохраняет ориентацию. При этом отображение φ индуцирует вложение многообразия $M \times S^1/\Gamma$.

Пример 5.3. Пусть M является пересечением сферы

$$u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 1$$

и конуса

$$u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 = u_n^2,$$

M является объединением двух непересекающихся сфер ($u_n > 0$ и $u_n < 0$). В этом случае

$$\Lambda = e_1\mathbb{Z} \oplus e_3\mathbb{Z},\ e_1 = (1,1),\ e_3 = (1,-1),$$

$$\Lambda^* = \gamma_1\mathbb{Z} \oplus \gamma_2\mathbb{Z},\ \gamma_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ \gamma_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$
$$\Gamma = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Элементы γ_1 и γ_2 действуют на $M \times T^2$ следующим образом

$$\gamma_1(u_1, \ldots, u_n, y) = (u_1 \cos\pi, \ldots, u_{n-1}\cos\pi, u_n \cos 0, y + \gamma_1)$$

$$= (-u_1, \ldots, -u_{n-1}, u_n, y + \gamma_1)\,,$$
$$\gamma_2(u_1, \ldots, u_n, y) = (u_1, \ldots, u_{n-1}, -u_n, y + \gamma_2)\,.$$

Элемент γ_2 склеивает две непересекающиеся компоненты $M \times T^2$ ($u_n > 0$ и $u_n < 0$). С точностью до гомеоморфизма можно считать, что компонента связности $M \times T^2$ является

$$S^{n-2} \times S^1 \times S^1,$$

тогда действие $\mathbb{Z}_2$ на нем выглядит следующим образом

$$\gamma(q_1, q_2, q_3) = (-q_1, -q_2, q_3).$$

Следовательно, $M \times T^2/\Gamma$ диффеоморфно $\mathcal{K}^{n-1} \times S^1$, если n — четное число и $S^{n-2} \times S^1 \times S^1$, если n — нечетное число (см. пример 5.2). Докажем, что $\psi_1(M_1)$ не имеет самопересечений. Предположим, что

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n, y) = \varphi(u'_1, \ldots, u'_n, y').$$

Ясно, что $u_n \neq 0$ и хотя бы одна из координат $u_1, \ldots, u_{n-1}$ ненулевая. Пусть $u_j \neq 0$. Тогда

$$e^{\pi i(e_j, y - y')} = \pm 1, \quad e^{\pi i(e_n, y-y')} = \pm 1,$$

т.е.

$$(e_j, y - y') \in \mathbb{Z},\ (e_n, y - y') \in \mathbb{Z},$$

Так как $e_1 = \cdots = e_{n-1}$, то $\gamma = y - y' \in \Gamma$,

$$u_1 = u_1' \cos \pi(e_1, \gamma), \ldots, u_n = u_n' \cos \pi(e_n, \gamma).$$

Следовательно,

$$\gamma(u_1', \ldots, u_n', y') = (u_1, \ldots, u_n, y).$$

Пример 5.4. Пусть M является пересечением эллипсоида

$$u_1^2 + 2u_2^2 + u_3^2 = 1$$

и конуса

$$u_1^2 + 2u_2^2 = u_3^2.$$

Также как и в предыдущем примере действие Γ на $M \times T^2$ редуцируется к действию $\mathbb{Z}_2$ на торе $S^1 \times S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^3$

$$\gamma(q_1, q_2, q_3) = (\bar{q}_1, -q_2, q_3).$$

Следовательно, $M \times T^2/\Gamma$ диффеоморфно $\mathcal{K} \times S^1$.

5.1.3 Погружения в $\mathbb{C}P^n$ (теорема 5.2)

Доказательство теоремы 5.2. Рассмотрим расслоение Хопфа

$$h : S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}.$$

Мы считаем, что S^{2n-1} — единичная сфера в $\mathbb{C}^n$. Отображение h каждую окружность $S^1 \subset S^{2n-1}$, полученную пересечением S^{2n-1} с комплексной прямой $l \subset \mathbb{C}^n$, $0 \in l$ отображает в точку проективного пространства, отвечающую l.

Пусть $\widetilde{L}$ — односвязное $(n-1)$-мерное подмногообразие в S^{2n-1} такое, что для любой точки $p \in \widetilde{L}$ линейная оболочка радиус-вектора p и касательного пространства к $\widetilde{L}$ в точке p является лагранжевой n-мерной плоскостью в $\mathbb{C}^n$. Будем считать, что $\widetilde{L}$ является достаточно маленькой окрестностью точки p. Через L обозначим $h(\widetilde{L}) \subset \mathbb{C}P^{n-1}$. Справедлива

Лемма 5.3 *Подмногообразие* $L \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ *является лагранжевым. Отображение* $h : \widetilde{L} \to L$ *— изометрия.*

Доказательство. Выберем в каждой точке $p \in \widetilde{L}$ касательный базис $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ к $\widetilde{L}$. Тогда по условию имеем равенства

$$\omega(\xi_k, p) = (\xi_k, ip) = (\xi_k, p) = 0.$$

Следовательно, каждый вектор ξ_k ортогонален окружности $S^1_p \subset S^{2n-1}$, являющейся пересечением S^{2n-1} с комплексной прямой, проходящей через p. Таким образом касательное пространство к $\widetilde{L}$ в точке p ортогонально слою расслоения Хопфа, содержащему p, т.е. многообразие $\widetilde{L}$ является горизонтальным многообразием при отображении Хопфа h. Следовательно, так как h — риманова субмерсия, то $h|_{\widetilde{L}}$ — изометрия. При этом справедливо равенство

$$\Omega(h_*(\xi_k), h_*(\xi_j)) = \omega(\xi_k, \xi_j) = 0,$$

которое означает, что L является лагранжевым подмногообразием в $\mathbb{C}P^{n-1}$. Лемма 5.3 доказана.

Определим $(n-1)$-форму σ на L. Для любых касательных векторов $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ к L в точке $h(p)$, где $p \in \widetilde{L}$ существуют однозначно определенные касательные векторы $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ к $\widetilde{L}$ в точке p такие, что $h_*(\xi_i) = \eta_i$. Положим

$$\sigma(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) = \sigma(h_*(\xi_1), \dots, h_*(\xi_{n-1})) = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, p).$$

Покажем, что с помощью σ можно вычислить лагранжев угол β_1 на L. Для этого нужно показать, что $\nabla|_L \sigma = 0$, где ∇ — связность в каноническом расслоении над $\mathbb{C}P^{n-1}$, согласованная со связностью Леви–Чивита. Аналогично можно определить σ на касательных векторах $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ в точках L к $\mathbb{C}P^{n-1}$. Для этого нужно взять их горизонтальное поднятие $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ на $\widetilde{L}$.

Лемма 5.4 *Форма σ является параллельной на L для связности $\nabla|_L$.*

Доказательство. Для доказательства параллельности достаточно рассмотреть произвольный гладкий путь $s(t)$ в L, рассмотреть произвольный параллельный касательный репер $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_{n-1}(t))$ к $\mathbb{C}P^{n-1}$ вдоль s и показать, что $\sigma(\eta(t))$ не зависит от параметра t. Пусть $\widetilde{s} \subset \widetilde{L}$ —

горизонтальное поднятие s и $(\xi_1(t),\ldots,\xi_{n-1}(t))$ — горизонтальное поднятие репера $\eta(t)$ посредством h. Для связности Леви–Чивита D на S^{2n-1} и векторных полей X и Y имеем

$$D_X Y = \mathcal{H} D_X Y + \mathcal{V} D_X Y,$$

где $\mathcal{H} D_X Y$ и $\mathcal{V} D_X Y$ — горизонтальные и вертикальные составляющие. Причем

$$h_*(\mathcal{H} D_X Y) = \widetilde{D}_{h_*(X)} h_*(Y),$$

где $\widetilde{D}$ — связность Леви–Чивита на $\mathbb{C}P^{n-1}$. Следовательно, так как поле $\eta_i(t)$ параллельно вдоль s, а $\xi_i(t)$ — его горизонтальное поднятие, то поле $\frac{d\xi_i}{dt}$ имеет вид $f_i(t)\widetilde{s}(t)$, где $f_i(t)$ — некоторая комплекснозначная функция, поскольку проекция вектора $\frac{d\xi_i}{dt}$ на S^{2n-1} не должна иметь горизонтальной составляющей. Справедливо равенство

$$\sigma(\eta(t)) = \det \begin{pmatrix} \xi_1^1(t) & \ldots & \xi_1^n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-1}^1(t) & \ldots & \xi_{n-1}^n(t) \\ s^1(t) & \ldots & s^n(t) \end{pmatrix},$$

где $(\xi_i^1,\ldots,\xi_i^n)$ — комплексные координаты вектора ξ_i, $(s^1(t),\ldots,s^n(t))$ — комплексные координаты s. Тогда

$$\frac{d}{dt}\sigma(\eta(t)) = \det \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\xi_1^1(t) & \ldots & \frac{d}{dt}\xi_1^n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-1}^1(t) & \ldots & \xi_{n-1}^n(t) \\ s^1(t) & \ldots & s^n(t) \end{pmatrix} + \cdots +$$

$$\det \begin{pmatrix} \xi_1^1(t) & \ldots & \xi_1^n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d}{dt}\xi_{n-1}^1(t) & \ldots & \frac{d}{dt}\xi_{n-1}^n(t) \\ s^1(t) & \ldots & s^n(t) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \xi_1^1(t) & \ldots & \xi_1^n(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-1}^1(t) & \ldots & \xi_{n-1}^n(t) \\ \frac{d}{dt}s^1(t) & \ldots & \frac{d}{dt}s^n(t) \end{pmatrix} = 0.$$

Первые $n-1$ определителей равны 0 в силу того, что вектор $\frac{d}{dt}\xi_i$ и s линейно зависимы. Векторы $\eta_1,\ldots,\eta_{n-1}, \frac{ds}{dt}$ — линейно зависимы (комплексно), следовательно, их горизонтальные поднятия $\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}, \frac{d\widetilde{s}}{dt}$ также линейно зависимы, а значит, и последний определитель равен 0. Лемма 5.4 доказана.

Пусть p — некоторая точка пересечения конуса $\psi_1(M_1) \subset \mathbb{C}^n$ и сферы S^{2n-1}. Через m обозначим одну из точек в прообразе $\psi_1^{-1}(p)$ (если p точка самопересечения $\psi_1(M_1)$, то их несколько). Обозначим через V некоторую маленькую окрестность m, а через $\widetilde{L}$ пересечение

$$\psi_1(V) \cap S^{2n-1}.$$

По лемме 5.3 подмногообразие

$$h(\widetilde{L}) \subset \mathbb{C}P^{n-1}$$

является лагранжевым. Следовательно, погружение ψ_2 тоже лагранжево, потому что $\psi_2(M_2)$ можно покрыть окрестностями вида $h(\widetilde{L})$. По построению формы σ имеем

$$\beta(p) = \beta_1(h(p))$$

(мы для простоты будем отождествлять V и $\psi_1(V)$, а также маленькие окрестности в M_2 с их образами при отображении ψ_2).

При выборе карты F в доказательстве теоремы 5.1 можно считать, что одна из координат, скажем x_1, является координатой вдоль прямолинейных образующих конуса, а остальные $x_2, \ldots, x_k$ — координаты на $\psi_1^{-1}(\widetilde{L})$. Тогда метрика на $\widetilde{L}$, а следовательно, по лемме 5.3 и на L, в окрестности точки $h(p)$ имеет вид (5.3), где $x = (x_2, \ldots, x_k)$ и суммирование по координате x_1 опущено. По лемме 5.2 функция β_1 является гармонической на M_2, что доказывает H-минимальность ψ_2. Из формулы (5.2) вытекает оставшаяся часть теоремы. Теорема 5.2 доказана.

Пример 5.5. Пусть $k = 1, d_j = 0$ в (5.1). Тогда $\psi_2(M_2)$ — $(n-1)$-мерный тор Клиффорда в $\mathbb{C}P^{n-1}$

$$\psi_2(M_2) = \{(u_1 e^{\pi i(e_1,y)} : \cdots : u_n e^{\pi i(e_n,y)})\} \subset \mathbb{C}P^{n-1}.$$

Пример 5.6. Пусть M является конусом

$$u_1^2 + 2u_2^2 = 3u_3^2.$$

Тогда
$$\Lambda = \mathbb{Z},\ \Lambda^* = \mathbb{Z},\ \Gamma = \mathbb{Z}_2.$$
Ненулевой элемент из Γ переводит точку $(u_1, u_2, u_3, q) \in M \times S^1$ в точку $(-u_1, u_2, -u_3, -q)$. Следовательно, ψ_2 является минимальным погружением бутылки Клейна (см. пример 5.1).

Пример 5.7. Пусть M задается уравнением
$$m_1 u_1^2 + \cdots + m_{n-1} u_{n-1}^2 = m_n u_n^2,$$
где m_j — натуральные числа. В этом случае топологический тип M_2 будет такой же как и в примере 5.2. Если
$$m_1 + \cdots + m_{n-1} = m_n,$$
то погружение ψ_2 является минимальным. Если при этом
$$m_1 = \cdots = m_{n-1},$$
то ψ_2 — вложение.

Несложно построить примеры в $\mathbb{C}P^n$ аналогичные примерам 5.3 и 5.4.

5.2 Уравнения гамильтоново минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$

В данном параграфе мы получим уравнения для гамильтоново–минимальных лагранжевых поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ (Лемма 5.5) и укажем их частные решения в случае торов. Имеет место

Теорема 5.3 *Отображение $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$, заданное формулой*

$$\psi(x,y) = (F_1(x)e^{i(G_1(x)+\alpha_1 y)} : F_2(x)e^{i(G_2(x)+\alpha_2 y)} : F_3(x)e^{i(G_3(x)+\alpha_3 y)}),$$

является конформным лагранжевым H-минимальным погружением плоскости, где

$$F_i = \sqrt{\frac{e^{2v(x)} + \alpha_{i+1}\alpha_{i+2}}{(\alpha_i - \alpha_{i+1})(\alpha_i - \alpha_{i+2})}}, \ G_i = \frac{\alpha_i}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{2c_2 - ae^{2v(z)}}{\alpha_i e^{2v(z)} - c_1} dz,$$

$$e^{2v(x)} = a_1\left(1 - \frac{a_1 - a_2}{a_1}\mathrm{sn}^2\left(x\sqrt{a_1 + a_3}, \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_3}\right)\right) \tag{5.5}$$

(индекс i рассматривается по модулю 3), $a_1 > a_2 > 0, \alpha_i$ — вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам (5.19), (5.20), константы c_1, c_2, a, a_3 выражаются через a_i, α_i по формулам (5.14), (5.16) и из уравнения (5.17), sn — эллиптическая функция Якоби.

Если при этом $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$ и

$$\lambda_1 = G_1(T) - G_3(T) + (\alpha_1 - \alpha_3)\tau \in 2\pi\mathbb{Q},$$

$$\lambda_2 = G_2(T) - G_3(T) + (\alpha_2 - \alpha_3)\tau \in 2\pi\mathbb{Q},$$

где T — период функции $e^{2v(x)}$ (см. (5.18)),$\tau \in \mathbb{R}$, то ψ — двояко периодическое отображение с периодами $e_1 = (0,1)$ и $e_2 = N(T,\tau)$, N — некоторое натуральное число.

Отметим, что λ_1 и λ_2 зависят от свободных параметров a_1, a_2, τ и поэтому $\lambda_1, \lambda_2 \in 2\pi\mathbb{Q}$ для плотного множества троек (a_1, a_2, τ) из некоторой области.

Кастро и Урбано [29] построили минимальные лагранжевы торы в $\mathbb{C}P^2$, которые являются частными случаями торов из теоремы 5.3 при $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ и $(a_1 + a_2)(c_1^2 + c_2^2) - a_1^2 a_2^2 = 0$.

5.2.1 Доказательство теоремы 5.3

Пусть S^5 — единичная сфера в $\mathbb{C}^3$,

$$\mathcal{H} : S^5 \to \mathbb{C}P^2$$

расслоение Хопфа. Обозначим через ω симплектическую форму на $\mathbb{C}^3$

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + dx_3 \wedge dy_3,$$

$z_j = x_j + iy_j$ — координаты в $\mathbb{C}^3$, $j = 1, 2, 3$. Пусть L — поверхность в $\mathbb{C}P^2$, $\mathcal{U}$ — достаточно малая окрестность точки $p \in L$. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{U}}$ некоторое горизонтальное поднятие $\mathcal{U}$ на S^5.

Критерий лагранжевости L состоит в следующем (см. §5.1):

Поверхность L является лагранжевой тогда и только тогда, когда линейная оболочка радиус-вектора $\tilde{p}$ ($\tilde{p}$ — прообраз p) и касательной плоскости к $\widetilde{\mathcal{U}}$ в точке $\tilde{p}$ является лагранжевым трехмерным подпространством в $\mathbb{C}^3$ для всех $p \in L$.

Мы также воспользуемся критерием H-минимальности в терминах лагранжевого угла — функции на L, которую определим ниже:

Поверхность L — H-минимальна тогда и только тогда, когда лагранжев угол является гармонической функцией на L в индуцированной метрике.

Напомним, что лагранжев угол (локально) строится следующим образом. Выберем ориентацию на $\widetilde{\mathcal{U}}$. Положим

$$e^{-i\beta} = z_1 \wedge z_2 \wedge z_3(\xi_1, \xi_2, p),$$

где ξ_1, ξ_2 — касательный ортонормированный базис к $\widetilde{\mathcal{U}}$, согласованный с ориентацией. Функция $\beta(p)$ называется *лагранжевым углом.* В общем случае $\beta(p)$ — многозначная функция на L. При обходе по циклу она может изменить свое значение на $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Будем задавать конформное лагранжево погружение ψ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с координатами x, y в $\mathbb{C}P^2$ как композицию $r : \Omega \to S^5$ и $\mathcal{H}$. Пусть

$$e^{2v(x,y)}(dx^2 + dy^2)$$

индуцированная метрика на $\psi(\Omega)$. Заметим, что т.к. ψ конформное и лагранжево, то

$$< r, r_x >=< r, r_y >=< r_x, r_y >= 0,$$

$$|r_x| = |r_y| = e^v,$$

где $< .,. >$ — эрмитово произведение. Следовательно,

$$R = \begin{pmatrix} e^{i\beta} r^1 & e^{i\beta} r^2 & e^{i\beta} r^3 \\ e^{-v} r^1_x & e^{-v} r^2_x & e^{-v} r^3_x \\ e^{-v} r^1_y & e^{-v} r^2_y & e^{-v} r^3_y \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(3),$$

где r^1, r^2 и r^3 — компоненты r. Таким образом для матриц A и B из алгебры Ли $\mathrm{su}(3)$ вида

$$A = \begin{pmatrix} i\beta_x & e^{v+i\beta} & 0 \\ -e^{v-i\beta} & -if - i\beta_x & ig - v_y \\ 0 & ig + v_y & if \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} i\beta_y & 0 & e^{v+i\beta} \\ 0 & ig & if + v_x \\ -e^{v-i\beta} & if - v_x & -ig - i\beta_y \end{pmatrix},$$

где

$$if =< \partial_x(e^{-v} r_y), e^{-v} r_y >, \quad ig =< \partial_y(e^{-v} r_x), e^{-v} r_x >,$$

справедливы равенства

$$R_x = AR, \ R_y = BR. \tag{5.6}$$

Матрицы A и B удовлетворяют уравнению нулевой кривизны

$$A_y - B_x + [A, B] = 0.$$

Ненулевые компоненты этого уравнения имеют вид:

$$f_y + 2fv_y + g_x + 2gv_x + \beta_{xy} = 0,$$

$$-e^{2v} + 2f^2 + 2g^2 + ig_y + iv_y\beta_y + g(2iv_y + \beta_y) - v_{yy} - if_x - iv_x\beta_x$$

$$+f(-2iv_x+\beta_x)-v_{xx}=0,$$

$$e^{2v}-2f^2-2g^2+ig_y+iv_y\beta_y+g(2iv_y-\beta_y)+v_{yy}-if_x-iv_x\beta_x$$

$$+f(-2iv_x-\beta_x)+v_{xx}=0.$$

Отсюда вытекает

Лемма 5.5 *Имеют место уравнения*

$$U_y+V_x+e^{2v}\beta_{xy}=0, \tag{5.7}$$

$$V_y+v_ye^{2v}\beta_y=U_x+v_xe^{2v}\beta_x, \tag{5.8}$$

$$\Delta v+e^{2v}-2(U^2+V^2)e^{-4v}-(\beta_xU+\beta_yV)e^{-2v}=0, \tag{5.9}$$

где $U=fe^{2v}, V=ge^{2v}$.

Так как при конформном изменении метрики гармонические функции остаются гармоническими и так как на торе гармонические функции являются константами, то можно считать, что для торов лагранжев угол имеет вид $\beta=ax+by,\ a,b\in\mathbb{R}$.

Далее мы будем рассматривать случай, когда функции v,f и g зависят только от x. Тогда из (5.7)–(5.9) получаем:

$$g=c_1e^{-2v(x)},\quad f=c_2e^{-2v(x)}-\frac{a}{2},$$

$$(v')^2=-\frac{a}{4}-(c_1^2+c_2^2)e^{-4v}+(ac_2-bc_1)e^{-2v}-e^{2v}-c, \tag{5.10}$$

c,c_1,c_2 — некоторые константы. Будем искать r^i в виде

$$r^i=C_i(x)e^{i\alpha_iy},$$

где $C_i(x)$ — комплекснозначная функция, $\alpha_i\in\mathbb{R}$. Из уравнений (5.6) получаем:

$$2(e^{4v(x)}+c_1\alpha_i)C_i(x)+$$

$$iC_i'(x)(2c_2+ae^{2v(x)}+2ie^{2v(x)}v'(x))+2e^{2v}C_i''(x)=0, \tag{5.11}$$

$$2i(c_1-e^{2v(x)}\alpha_i)C'(x)+\alpha_iC(x)((a+2iv'(x))e^{2v(x)}-2c_2)=0, \tag{5.12}$$

$$2(e^{2v(x)}(e^{2v(x)}-b\alpha_i-\alpha_i^2)-c_1\alpha_i)C_i(x)+$$

$$C'(x)((ia + 2v'(x))e^{2v(x)} - 2ic_2) = 0. \tag{5.13}$$

Заметим, что если α_i удовлетворяет уравнению

$$\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + c_1 = 0,$$

то уравнения (5.11) и (5.13) вытекают из уравнений (5.12) и (5.10). Далее, из условия $R \in \mathrm{SU}(3)$ и из (5.12) находим

$$C_i(x) = F_i(x)e^{iG_i(x)},$$

где

$$c_1 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\ c = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3,\ b = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3. \tag{5.14}$$

Осталось получить решения уравнения (5.10). Сделаем замену $h = e^{2v}$, тогда уравнение (5.10) примет вид

$$(h')^2 + 4(h - a_1)(h - a_2)(h + a_3)$$
$$= (h')^2 + 4h^3 + (4c + a^2)h^2 + 4(bc_1 - ac_2)h + 4(c_1^2 + c_2^2) = 0, \tag{5.15}$$

где

$$a_3 = \frac{c_1^2 + c_2^2}{a_1a_2},\ a = \frac{bc_1 + a_1a_3 + a_2a_3 - a_1a_2}{c_2}, \tag{5.16}$$

а c_2 является корнем уравнения

$$c_2^4(a_1 - a_2)^2 + 2c_2^2(a_1^3a_2^2 + a_1^2a_2^3 + (a_1a_2^2 + a_1^2a_2)bc_1 + (a_1^2 + a_2^2)c_1^2 + 2a_1^2a_2^2c)$$
$$+((a_1 + a_2)c_1^2 - a_1^2a_2^2 + a_1a_2c_1b)^2 = 0. \tag{5.17}$$

Из тождества

$$(\mathrm{sn}(x)')^2 = (1 - \mathrm{sn}^2(x))(1 - k^2\mathrm{sn}^2(x))$$

(см. [58]) легко вывести, что уравнение (5.15) имеет решение вида (5.5), где

$$\mathrm{sn}(x, k) = \sin\varphi,$$

φ — обратная функция к

$$w(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}},\ 0 < k < 1.$$

Функция $e^{2v(x)}$ имеет период

$$T = \frac{2w(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{a_1 + a_3}}. \tag{5.18}$$

Ограничением на выбор параметров a_i, α_i является условие $c_2 \in \mathbb{R}$:

$$P = a_1^3 a_2^2 + a_1^2 a_2^3 + (a_1 a_2^2 + a_1^2 a_2) b c_1 + (a_1^2 + a_2^2) c_1^2 + 2 a_1^2 a_2^2 c \leq 0. \tag{5.19}$$

$$P^2 - (a_1 - a_2)^2 ((a_1 + a_2) c_1^2 - a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2 c_1 b)^2 \geq 0. \tag{5.20}$$

Теорема 5.3 доказана.

Неравенства (5.19) и (5.20) выполнены, например, при $a_1 = 2, a_2 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 3$.

5.3 Иерархия Веселова–Новикова и интегрируемые деформации минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$

В этом параграфе мы покажем, что иерархия Веселова–Новикова [30] задает интегрируемые деформации конечнозонных минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$.

Пусть S^5 — единичная сфера в $\mathbb{C}^3$, $\mathcal{H} : S^5 \to \mathbb{C}P^2$ — расслоение Хопфа. Будем задавать конформное лагранжево погружение

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{C}P^2$$

области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ как композицию $r : \Omega \to S^5$ и $\mathcal{H}$.

Имеет место лемма

Лемма 5.6 *Компоненты r_j вектор–функции r удовлетворяют уравнению Шредингера*

$$Lr_j = \partial_x^2 r_j + \partial_y^2 r_j + i(\beta_x \partial_x r_j + \beta_y \partial_y r_j) + 4e^v r_j = 0,$$

где $2e^v(dx^2 + dy^2)$ — индуцированная метрика на поверхности $\varphi(\Omega)$, а $\beta(x, y)$ — лагранжев угол, определяемый равенством

$$e^{i\beta} = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3(\sigma),$$

z_1, z_2, z_3 — координаты в $\mathbb{C}^3$, x, y — координаты в Ω, σ — репер образованный векторами r, $\frac{r_x}{|r_x|}$, $\frac{r_y}{|r_y|}$.

Лемма 5.6 позволяет ввести следующее определение.

Лагранжев тор, заданный двояко периодическим конформным отображением

$$\varphi = \mathcal{H} \circ r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2,$$

называется конечнозонным, если отвечающий ему оператор Шредингера L с периодическими коэффициентами, является конечнозонным на нулевом уровне энергии, т.е. если блоховские функции (совместные собственные функции L и операторов трансляций — операторов сдвига на *периоды) оператора L на нулевом уровне энергии параметризуются римановой поверхностью Γ конечного рода. Риманова поверхность Γ называется спектром лагранжева тора, а ее род — спектральным родом тора.*

Так как отображение φ двояко периодическое, то компоненты вектор-функции r являются блоховскими функциями оператора L.

Основной результат этого параграфа заключается в следующем. Пусть отображение

$$r : \mathbb{R}^2 \to S^5$$

задает конечнозонный минимальный лагранжев тор $T \subset \mathbb{C}P^2$ спетрального рода $g > 4$. Тогда справедлива

Теорема 5.4 *Существует отображение $\widetilde{r}(t), t = (t'_1, t''_1, t'_2, t''_2 \dots), \widetilde{r}(0) = r$, задающее деформации тора T в классе минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$. Отображение $\widetilde{r}$ удовлетворяет уравнениям*

$$L\widetilde{r} = \partial_x^2 \widetilde{r} + \partial_y^2 \widetilde{r} + 4e^{\widetilde{v}}\widetilde{r} = 0,$$

$$\partial_{t'_n}\widetilde{r} = A'_n \widetilde{r},\ \partial_{t''_n}\widetilde{r} = A''_n \widetilde{r},$$

где A'_n, A''_n — операторы порядка $(2n+1)$ по переменным (x, y). Потенциал $\widetilde{V} = 4e^{\widetilde{v}}, \widetilde{v}(0) = v$, деформируется согласно иерархии Веселова–Новикова

$$\frac{\partial L}{\partial t'_n} = [L, A'_n] + B'_n L,\ \frac{\partial L}{\partial t''_n} = [L, A''_n] + B''_n L,$$

где B'_n, B''_n — операторы порядка $(2n-1)$ по переменным (x, y). Деформации $\widetilde{r}(t)$ сохраняют спектр тора T и его конформный тип.

5.3.1 Доказательство теоремы 5.4

Так как отображение φ лагранжево и конформное, то несложно убедиться (см, §5.2), что

$$< r, r_x > = < r, r_y > = < r_x, r_y > = 0,\ |r_x|^2 = |r_y|^2 = 2e^v,$$

где $< .,. >$ — эрмитово произведение в $\mathbb{C}^3$. Следовательно, из определения лагранжевого угла получаем

$$R = \begin{pmatrix} r^1 & r^2 & r^3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^1_x & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^2_x & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^3_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^1_y & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^2_y & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}}r^3_y \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(3),$$

где r^1, r^2 и r^3 — компоненты вектора r (здесь нам удобнее рассматривать матрицу R в таком виде, а не так как это сделано в §5.2). Матрица R удовлетворяет уравнениям

$$R_x = AR,\ R_y = BR, \tag{5.21}$$

где матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v}{2}+i\frac{\beta}{2}} & 0 \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}} & if & -\frac{v_y}{2} + i(h + \frac{\beta_y}{2}) \\ 0 & \frac{v_y}{2} + i(h + \frac{\beta_y}{2}) & -if \end{pmatrix} \in \mathrm{su}(3),$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v}{2}+i\frac{\beta}{2}} \\ 0 & ih & \frac{v_x}{2} + i(-f + \frac{\beta_x}{2}) \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v}{2}-i\frac{\beta}{2}} & -\frac{v_x}{2} + i(-f + \frac{\beta_x}{2}) & -ih \end{pmatrix} \in \mathrm{su}(3),$$

$f(x,y)$ и $h(x,y)$ — некоторые функции. Из уравнения нулевой кривизны

$$A_y - B_x + [A,B] = 0$$

вытекают следующие уравнения

$$2V_y + 2U_x = (\beta_{xx} - \beta_{yy})e^v,$$

$$2U_y - 2V_x = (\beta_y v_x + \beta_x v_y)e^v,$$

$$\Delta v = 4(U^2 + V^2)e^{-2v} - 4e^v - 2(U\beta_x + V\beta_y)e^{-v},$$

где $U = fe^v, V = he^v$.

Из (5.21) получаем равенства

$$r_{xx} = \frac{1}{2}(-4e^v r + r_x(2if + v_x + i\beta_x) + r_y(2ih - v_y + i\beta_y)),$$

$$r_{yy} = \frac{1}{2}(-4e^v r + r_x(-2if - v_x + i\beta_x) + r_y(-2ih + v_y + i\beta_y)),$$

из которых вытекает лемма 5.6.

Далее будем рассматривать минимальные лагранжевы торы, т.е. $\beta = const$ и

$$\Delta U = \Delta V = 0,$$

следовательно, т.к. функции U и V двояко периодические, то U и V — константы. Таким образом функция v удовлетворяет уравнению Цицейки.

Рассмотрим следующие уравнения со спектральным параметром λ

$$\partial_z R(\lambda) = A(\lambda)R(\lambda),\ \partial_{\bar{z}} R(\lambda) = B(\lambda)R(\lambda), \tag{5.22}$$

где $z = x + iy$,

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & v_z & -\frac{i}{\lambda}e^{-v} \\ -e^v & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -e^v & 0 & 0 \\ 0 & -i\lambda e^{-v} & v_{\bar{z}} \end{pmatrix},$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} r(\lambda) \\ r_z(\lambda) \\ r_{\bar{z}}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Уравнения (5.22) при $\lambda = 1$ эквивалентны уравнениям (5.21) ($\beta = const$), а уравнение нулевой кривизны для $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ при любом λ эквивалентно уравнению Цицейки. В случае конечнозонных решений уравнений (5.22) найдется матрица $W(x, y, \lambda)$ рационально зависящая от λ [59] такая, что

$$W_z = [A(\lambda), W],\ W_{\bar{z}} = [B(\lambda), W].$$

Коэффициенты рациональной функции по λ и μ

$$Q(\lambda, \mu) = \det(W - \mu E),$$

где E — единичная матрица, не зависят от x и y. Спектр минимального лагранжевого тора задается в (λ, μ)–плоскости уравнением $Q(\lambda, \mu) = 0$. Отсюда следует, что спектр является трехлистным накрытием λ-плоскости, т.е. является тригональной кривой.

Для построения минимальных конечнозонных лагранжевых торов нам необходимо напомнить следующую конструкцию. Конечнозонные вещественные потенциальные операторы Шредингера строятся по следующим спектральным данным [30]: Γ — неособая риманова поверхность четного рода $g = 2g_0$, пара отмеченных точек $\infty_1, \infty_2 \in \Gamma$, неспециальный дивизор $D = P_1 + \dots + P_g$, локальные параметры k_1^{-1} и k_2^{-1} около точек ∞_1 и ∞_2. Поверхность Γ должна обладать голоморфной инволюцией

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma,\ \sigma^2 = 1,$$

с двумя неподвижными точками ∞_1 и ∞_2 такой, что

$$\sigma(k_s^{-1}) = -k_s^{-1},\ D + \sigma D = \infty_1 + \infty_2 + K,$$

где $s = 1, 2,\ K$ — канонический класс на Γ. Для того, чтобы оператор L был вещественным, поверхность Γ должна обладать перестановочной с σ антиголоморфной инволюцией

$$\tau : \Gamma \to \Gamma,\ \tau^2 = 1,$$

такой, что

$$D = \tau(D),\ \tau(\infty_1) = \infty_2,\ k_1(\tau(P)) = \overline{k_2(P)}.$$

Существует единственная функция $\psi(P, x, y)$, называемая функцией Бейкера–Ахиезера, которая мероморфна на $\Gamma \backslash \{\infty_1, \infty_2\}$, имеет простые полюса на дивизоре D и обладает асимптотиками

$$\psi(P, x, y) = \exp(k_1 z) \left(1 + \frac{\xi(x, y)}{k_1} + \dots\right),\ P \to \infty_1,$$

$$\psi(P, x, y) = \exp(k_2 \bar{z}) \left(1 + \frac{\eta(x, y)}{k_2} + \dots\right),\ P \to \infty_2.$$

Функция ψ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi + 4e^v \psi = 0.$$

где $e^v = -\xi_{\bar{z}} = -\eta_z$.

Далее мы изложим конструкцию Шарипова для построения конечнозонных решений уравнения Цицейки [32] (в [32] вместо антиголоморфной инволюции τ рассматривается, в наших обозначениях, антиголоморфная инволюция $\sigma\tau$). Пусть кривая Γ обладает мероморфной функцией λ с дивизором нулей и полюсов $3\infty_1 - 3\infty_2$, такой, что

$$\lambda(\sigma(P)) = -\lambda(P),\ \lambda(\tau(P))\overline{\lambda(\sigma(P))} = 1. \tag{5.23}$$

Выберем k_1 и k_2 так, чтобы в окрестностях ∞_1 и ∞_2 функция λ имела вид

$$\lambda = ik_1^{-3},\ P \to \infty_1,$$
$$\lambda = \frac{k_2^3}{i},\ P \to \infty_2.$$

Выбор таких спектральных данных обеспечивает гладкость и вещественность потенциала [32]. Из единственности функции Бейкера–Ахиезера вытекают равенства

$$\psi_{zz} = \frac{\xi_{z\bar z}}{\xi_{\bar z}}\psi_z + \frac{k_1^3}{\xi_{\bar z}}\psi_{\bar z} = v_z\psi_z - \frac{i}{\lambda}e^{-v}\psi_{\bar z}, \tag{5.24}$$

$$\psi_{\bar z\bar z} = \frac{k_2^3}{\eta_z}\psi_z + \frac{\eta_{z\bar z}}{\eta_z}\psi_{\bar z} = -e^{-v}i\lambda\psi_z + v_{\bar z}\psi_{\bar z}, \tag{5.25}$$

$$\psi_{z\bar z} = \xi_{\bar z}\psi = \eta_z\psi = -e^v\psi, \tag{5.26}$$

$$\psi(P) = \overline{\psi(\tau(P))},\ \psi_{\bar z}(P) = \overline{\psi_z(\tau(P))},\ \psi_z(P) = \overline{\psi_{\bar z}(\tau(P))}. \tag{5.27}$$

Рассмотрим функцию

$$F(P,Q) =< e(P), e(Q) >,$$

где

$$e(P) = (\psi(P), \psi_z(P)e^{-\frac{v}{2}}, \psi_{\bar z}(P)e^{-\frac{v}{2}}).$$

Из (5.27) следует, что

$$F(P,Q) = \psi(P)\psi(\tau(Q)) + \psi_z(P)\psi_{\bar z}(\tau(Q))e^{-v} + \psi_{\bar z}(P)\psi_z(\tau(Q))e^{-v}.$$

Из (5.23)–(5.26) получаем

$$F_z(P,Q) = -ie^{-2v}\left(\frac{1-\lambda(P)\overline{\lambda(Q)}}{\lambda(P)}\right)\psi_{\bar z}(P)\psi_{\bar z}(\tau(Q)),$$

$$F_{\bar z}(P,Q) = -ie^{-2v}\left(\frac{\lambda(P)\overline{\lambda(Q)}-1}{\overline{\lambda(Q)}}\right)\psi_z(P)\psi_z(\tau(Q)).$$

Функция λ задает трехлистное накрытие $\mathbb{C}P^1$ кривой Г. Пусть

$$\lambda(P_1) = \lambda(P_2) = \lambda(P_3) = 1.$$

Тогда функция $F(P_i, P_j)$ не зависит от x и y.

Положим

$$r_j = C_j\psi(P_j),$$

где $C_j = \frac{1}{|\psi(P_j)|}$. В этом случае будут выполнены уравнения (5.21), где матрицы A и B лежат в алгебре Ли su(3) (см. [32]).

Интегрируемые деформации тора T задает функция Бейкера–Ахиезера со следующими асимптотиками

$$\psi(P,x,y,t) = \exp(k_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} k_1^{2n+1} t_n)\left(1 + \frac{\xi(x,y,t)}{k_1} + \dots\right),\ P \to \infty_1,$$

$$\psi(P,x,y,t) = \exp(k_2 \bar z + \sum_{n=1}^{\infty} k_2^{2n+1} \bar t_n)\left(1 + \frac{\eta(x,y,t)}{k_2} + \dots\right),\ P \to \infty_2,$$

где $t_j = t'_j + it''_j$. Функция $\psi(P,x,y,t)$ обладает свойствами (5.24)–(5.27).

Функцию ψ можно выписать в явном виде через тэта-функцию Прима инволюции σ (см. [30]). На Г существует базис циклов

$$a_1,\dots,a_g,\quad b_1,\dots,b_g$$

такой, что

$$\sigma(a_i) = a_{i+g_0},\quad \sigma(b_i) = -b_{i+g_0},\quad i = 1,\dots,g_0$$

и отвечающий ему базис абелевых дифференциалов

$$\omega_1,\dots,\omega_g,$$

для которого выполнены равенства

$$\int_{a_j} \omega_k = 2\pi i \delta_{jk}.$$

Многообразием Прима кривой Γ называется многообразие

$$P = \mathbb{C}^{g_0}/\{2\pi i \mathbb{Z}^{g_0} + \Omega \mathbb{Z}^{g_0}\},$$

где компоненты симметричной матрицы Ω являются периодами следующих дифференциалов:

$$\Omega_{ij} = \int_{b_j} \eta_i,\ \eta_i = \omega_i + \omega_{i+g_0}.$$

Обозначим через $\eta(P)$ отображение

$$\eta : \Gamma \to P,\ \eta(P) = \left(\int_{P_0}^{P} \eta_1, \dots, \int_{P_0}^{P} \eta_{g_0} \right),$$

где $P_0 \in \Gamma$ — некоторая фиксированная точка. Через Ω_k и $\widetilde{\Omega}_k,\ k = 0, 1, \dots$ обозначим мероморфные дифференециалы на Γ с единственными полюсами соответственно в точках ∞_1 и ∞_2 вида

$$d(k_s^{-(2k+1)}),\ s = 1, 2$$

и нормированные равенством нулю a-периодов:

$$\int_{a_j} \Omega_k = \int_{a_j} \widetilde{\Omega}_k = 0.$$

Пусть

$$V_k = \left(\int_{b_1} \Omega_k, \dots, \int_{b_{g_0}} \Omega_k \right),\ \widetilde{V}_k = \left(\int_{b_1} \widetilde{\Omega}_k, \dots, \int_{b_{g_0}} \widetilde{\Omega}_k \right).$$

Тэта-функция многообразия Прима определяется абсолютно сходящимся рядом

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^{g_0}} \exp\left(\frac{1}{2} < \Omega n, n > + < z, n > \right)$$

$z = (z_1, \dots, z_{g_0}) \in \mathbb{C}^{g_0}$. Тэта-функция обладает свойствами периодичности

$$\theta(z + 2\pi i n + \Omega m) = \exp\left(-\frac{1}{2} < \Omega m, m > + < z, m >\right)\theta(z),$$

$m, n \in \mathbb{Z}^{g_0}$. Функция ψ имеет следующий вид (см. [30]):

$$\psi = \frac{\theta(\eta(P) + zV_0 + \bar{z}\widetilde{V}_0 + t_1V_1 + \bar{t_1}\widetilde{V}_1 + \dots - e)}{\theta(\eta(P) - e)\theta(zV_0 + \bar{z}\widetilde{V}_0 + t_1V_1 + \bar{t_1}\widetilde{V}_1 + \dots - e)}$$

$$\times \exp\left(z\left(\int_{P_0}^P \Omega_0 - \alpha_0\right) + \bar{z}\int_{\infty_1}^P \widetilde{\Omega}_0 + t_1\left(\int_{P_0}^P \Omega_1 - \alpha_1\right) + \bar{t}_1\int_{\infty_1}^P \widetilde{\Omega}_1 + \dots\right),$$

α_j — некоторые константы, $e \in \mathbb{C}^{g_0}$ — некоторый вектор. Положим

$$\widetilde{r}_j(t) = C_j(t)\psi(P_j, x, y, t),$$

где $C_j(t) = \frac{1}{|\psi(P_j,x,y,t)|}$.

Из формулы для функции ψ следует, что если отображение $\mathcal{H} \circ \widetilde{r}$ является периодическим при $t = 0$, то оно будет периодическим для произвольных t, причем с теми же периодами. Функция $\widetilde{r_j}$ удовлетворяет уравнениям из теоремы 5.4 (см. [30]). Теорема 5.4 доказана.

Приведем пример римановой поверхности, обладающей указанными выше инволюциями σ и τ. Пусть Γ является гладким пополнением поверхности, заданной в (λ, μ)-плоскости уравнением

$$\mu^3 = \mu Q_1(\lambda) + Q_2(\lambda),$$

где

$$Q_1(\lambda) = q_{-2k}\lambda^{-2k} + \dots + q_{2k}\lambda^{2k},\ \bar{q}_{-j} = q_j,$$
$$Q_2(\lambda) = p_{-(2n+1)}\lambda^{-(2n+1)} + \dots + p_{2n+1}\lambda^{2n+1},\ \bar{p}_{-j} = -p_j.$$

Поверхность Γ обладает голоморфной инволюцией

$$\sigma = (\lambda, \mu) = (-\lambda, -\mu)$$

с двумя неподвижными точками $\infty_1 = (0, \infty)$ и $\infty_2 = (\infty, \infty)$ и антиголоморфной инволюцией

$$\tau(\lambda, \mu) = \left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, -\bar{\mu}\right).$$

5.3.2 Связь между симметриями уравнения Цицейки и иерархией Веселова–Новикова

Выше мы показали, что с уравнением Цицейки

$$v_{z\bar{z}} = e^{-2v} - e^{v} \tag{5.28}$$

естественным образом связан двумерный оператор Шредингера

$$L = \partial_z \partial_{\bar{z}} + e^{v(z,\bar{z})}.$$

В этом параграфе мы покажем, что симметрии уравнения Цицейки отвечают изоспектральным деформациям этого оператора, заданными иерархией Веселова–Новикова (для первых нескольких уравнений). Таким образом ситуация полностью аналогична случаю KdV. С уравнением Кортвега–де Фриза

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx})$$

естественным образом связан одномерный оператор Шредингера

$$\partial_x^2 + u$$

и его изоспектральные деформации, определяемые высшими KdV, задают симметрии самого KdV.

Уравнение Клейна–Гордона

$$v_{z\bar{z}} - a(v) = 0, \tag{5.29}$$

где a — некоторая функция, допускает преобразование симметрии вида

$$v_t = f(v, v_z, v_{\bar{z}}, v_{zz}, v_{z\bar{z}}, v_{\bar{z}\bar{z}}, \dots),$$

если равенство

$$f_{z\bar{z}} - a'(v)f = 0 \tag{5.30}$$

выполнено на всех решениях уравнения (5.29). В силу того, что

$$\partial_t(v_{z\bar{z}} - a(v)) = f_{z\bar{z}} - a'(v)f,$$

преобразование симметрии задает поток на пространстве решений уравнения Клейна–Гордона.

Жибером и Шабатом [60] найдены все уравнения Клейна–Гордона, которые допускают преобразование симметрии, а именно ими доказана следующая теорема.

- *Уравнение (5.29) допускает преобразование симметрии только в трех случаях:*

  1) $a(v) = e^v$ *— уравнение Лиувилля*

  2) $a(v) = \sin(v)$ *— уравнение* sin-*Gordon*

  3) $a(v) = e^{-2v} - e^v$ *— уравнение Цицейки*

  (с точностью до умножения на ненулевые константы экспонент, входящих в $a(v)$*).*

Практически одновременно с работой [60] уравнение (5.28) появилось в [61], но позже выяснилось, что задолго до работ [60] и [61] это уравнение возникло в работе Цицейки [62].

Напомним построение иерархии уравнений Веселова–Новикова (ВН) [30]. Обозначим через L оператор Шредингера

$$L = \partial_z \partial_{\bar{z}} + V(z, \bar{z}).$$

Уравнения ВН задаются L, A, B-тройками Манакова

$$[L, \partial_{t_n} - A_{2n+1}] + B_{2n-2} L = 0 \tag{5.31}$$

или в эквивалентной форме

$$V_{t_n} = [A_{2n+1}, L] + B_{2n-2} L, \tag{5.32}$$

где оператор A_{2n+1} является либо одним из следующих двух операторов

$$\partial_z^{2n+1} + u'_{2n-1}(z, \bar{z}) \partial_z^{2n-1} + \cdots + u'_0(z, \bar{z}),$$

$$\partial_{\bar{z}}^{2n+1} + u''_{2n-1}(z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}}^{2n-1} + \cdots + u''_0(z, \bar{z}),$$

либо их суммой, а оператор B_{2n-2} однозначно находится из (5.31). В случае периодического потенциала V уравнения ВН задают изоспектральные деформации оператора Шредингера, т.е. деформации сохраняющие спектр Флоке (поверхность, параметризующую блоховские функции) на нулевом уровне энергии.

Из теоремы 5.4, доказанной в предыдущем параграфе, вытекает

Теорема 5.5 *Уравнения иерархии Веселова–Новикова задают высшие коммутирующие потоки на пространстве конечнозонных решений уравнения Цицейки, т.е. для высшего уравнения Веселова–Новикова вида*

$$v_{t_n} = f_n(v, v_z, v_{\bar{z}}, v_{zz}, v_{z\bar{z}}, v_{\bar{z}\bar{z}}, \dots),$$

где $V = e^v$ — потенциал оператора Шредингера L, равенство (5.30) выполнено на всех конечнозонных решениях уравнения Цицейки.

Поскольку класс конечнозонных решений уравнения Цицейки достаточно обширен, то учитывая теорему 5.5, становится очевидно, что уравнения иерархии ВН задают высшие симметрии уравнения Цицейки. Подтверждением этой гипотезы является

Теорема 5.6 *Вторoе, третье, пятое уравнения Веселова–Новикова заданные формулами (5.36), (5.37), (5.38) (см. ниже) задают высшие симметрии уравнения Цицейки.*

Докажем теорему 5.6. Пусть

$$A_{2n+1} = \partial_z^{2n+1} + u_{2n-1}(z,\bar{z})\partial_z^{2n-1} + \dots + u_0(z,\bar{z}).$$

Тогда для того, чтобы в правой части уравнения (5.32) занулить слагаемые вида $g\partial_{\bar{z}}\partial_z^k$, оператор B_{2n-2} должен иметь вид

$$B_{2n-2} = w_{2n-2}\partial_z^{2n-2} + w_{2n-3}\partial_z^{2n-3} + \dots + w_0,$$

где

$$w_{2n-2} = \partial_z u_{2n-1}, \ \dots \ , w_0 = \partial_z u_1. \tag{5.33}$$

Коэффициенты u_j оператора A_{2n+1} находятся последовательно приравниванием к нулю коэффициентов при ∂_z^{j+1} в (5.32):

$$\partial_{\bar{z}} u_{2n-1} = (2n+1)V_z, \quad \partial_{\bar{z}} u_{2n-2} = (2n+1)nV_{zz} - \partial_z\partial_{\bar{z}} u_{2n-1} =$$

$$(2n+1)(n-1)V_{zz}, \dots \tag{5.34}$$

И наконец, эволюция потенциала V описывается уравнением

$$V_{t_n} = A_{2n+1}(V) + B_{2n-2}(V) =$$

$$\partial_z^{2n+1}V + u_{2n-1}\partial_z^{2n-1}V + \dots + u_0 V + \partial_z u_{2n-1}\partial_z^{2n-2}V + \dots + \partial_z u_1 V. \tag{5.35}$$

Таким образом уравнение (5.31) эквивалентно системе уравнений (5.33)–(5.35) на коэффициенты операторов A_{2n+1}, B_{2n-2}.

Заметим, что если выполнено уравнение Цицейки, то можно положить

$$u_{2n-1} = -\frac{2n+1}{3}(v_z^2 + v_{zz}),$$

$$u_{2n-2} = -\frac{(2n+1)(n-1)}{3}(2v_z v_{zz} + v_{zzz}).$$

Действительно, несложно убедиться, что в силу уравнения Цицейки уравнение (5.34) выполнено. В общем случае коэффициенты оператора A_{2n+1} нужно искать в виде однородного дифференциального полинома

$$u_{2n-1-j} = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_s=j+2} a_{\alpha_1\dots\alpha_s}\partial_z^{\alpha_1}v\dots\partial_z^{\alpha_s}v.$$

Например, прямой проверкой можно убедиться, что коэффициенты оператора

$$A_5 = \partial_z^5 - \frac{5}{3}(v_1^2+v_2)\partial_z^3 - \frac{5}{3}(2v_1v_2+v_3)\partial_z^2 + \frac{5}{9}(v_1^4+2v_1^2v_2-3v_2^2-4v_1v_3-2v_4)\partial_z$$

удовлетворяют уравнениям (5.34). Здесь и далее мы для краткости будем придерживаться следующих обозначений

$$\partial_z^i v = v_i.$$

Соответствующее уравнение ВН принимает вид

$$v_{t_2} = \frac{1}{9}(5v_1v_2^2 + 5v_1^2v_3 - 5v_2v_3 - v_5 - v_1^5). \tag{5.36}$$

Это уравнение задает преобразование симметрии для уравнения Цицейки, найденное в [60].

Аналогично находятся следующие два нетривиальных уравнения

$$v_{t_3} = \frac{1}{81}(4v_1^7 - 84v_1^3v_2^2 - 42v_1^4v_3 + 42v_3(2v_2^2 - v_4) + 7v_1(4v_2^3 + 9v_3^2 + 12v_2v_4) -$$

$$-21v_2v_5 + 21v_1^2(2v_2v_3 + v_5) - 3v_7), \tag{5.37}$$

$$v_{t_5} = \frac{1}{729}(-8v_1^{11} + 880v_1^7v_2^2 + 220v_1^8v_3 - 22v_1^5(20v_2^3 + 99v_3^2 + 132v_2v_4) -$$

$$22v_1^6(10v_2v_3 + 11v_5) - 132v_1^3(50v_2^4 - 20v_2^2v_4 - 5(3v_4^2 + 5v_3v_5) - 6v_2(5v_3^2 + 2v_6)) -$$

$$66v_1^4(10v_3(21v_2^2 - v_4) - 5v_2v_5 - 2v_7) + 11v_1(200v_2^5 + 1080v_2^3v_4 + 18v_2^2(125v_3^2 - 6v_6)$$

$$-3(23v_5^2 + 2v_4(50v_3^2 + 19v_6) + 22v_3v_7) - 12v_2(20v_4^2 + 35v_3v_5 + 2v_8)) +$$

$$11(640v_2^4v_3 - 190v_2^3v_5 - 18v_2^2(50v_3v_4 + 3v_7) - 6(53v_3^2v_5 - 8v_5v_6 - 5v_4v_7 +$$

$$v_3(70v_4^2 - 2v_8)) - 3v_2(130v_3^3 + 138v_4v_5 + 90v_3v_6 - v_9)) +$$

$$11v_1^2(860v_2^3v_3 + 510v_3^3 + 630v_2^2v_5 - 90v_4v_5 - 54v_3v_6 +$$

$$18v_2(120v_3v_4 - v_7) - 3v_9) + 3v_{11}). \tag{5.38}$$

Прямая проверка, которую мы из-за громоздкости вычислений опускаем, показывает, что уравнения (5.37), (5.38) задают преобразования симметрии.

5.4 Конечнозонные минимальные лагранжевы поверхности в $\mathbb{C}P^2$ с диагональной индуцированной метрикой

В этом параграфе мы укажем новый метод построения минимальных лагранжевых (**ML**) поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ с диагональной индуцированной метрикой в терминах функций Бейкера–Ахиезера алгебраических кривых.

В §5.4.1 мы получим уравнения на **ML**-отображения плоскости в $\mathbb{C}P^2$ с диагональной метрикой. В §5.4.2 введем функцию Бейкера–Ахиезера в нужном для нас виде. В §5.4.3 докажем основную теорему (теорема 5.8) и приведем в качестве демонстрации теоремы 5.8 пример **ML**-отображения плоскости, отвечающего приводимой рациональной спектральной кривой.

5.4.1 Уравнения лагранжевых поверхностей с диагональной метрикой

Как и ранее, лагранжевы поверхности в $\mathbb{C}P^2$ с диагональной индуцированной метрикой будем задавать с помощью композиции отображений $\mathcal{H} \circ \varphi$, где

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to S^5 \subset \mathbb{C}^3,$$
$$< \varphi, \varphi_x >=< \varphi, \varphi_y >=< \varphi_x, \varphi_y >= 0, \tag{5.39}$$

Введем обозначения

$$|\varphi_x|^2 = 2e^{v_1(x,y)}, \quad |\varphi_y|^2 = 2e^{v_2(x,y)}.$$

Тогда из (5.39) следует, что матрица

$$\tilde{\Phi} = \left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_1}{2}} \varphi_x, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_2}{2}} \varphi_y\right)^\top$$

принадлежит группе $\mathrm{U}(3)$.

Из определения лагранжевого угла (см. §5.2) получаем

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^1 & \varphi^2 & \varphi^3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_1}{2}-i\frac{\beta}{2}}\varphi^1_x & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_1}{2}-i\frac{\beta}{2}}\varphi^2_x & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_1}{2}-i\frac{\beta}{2}}\varphi^3_x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_2}{2}-i\frac{\beta}{2}}\varphi^1_y & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_2}{2}-i\frac{\beta}{2}}\varphi^2_y & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v_2}{2}-i\frac{\beta}{2}}\varphi^3_y \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(3),$$

Матрица Φ удовлетворяет уравнениям

$$\Phi_x = A\Phi,\ \Phi_y = B\Phi, \tag{5.40}$$

где матрицы $A, B \in \mathrm{su}(3)$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v_1}{2}+i\frac{\beta}{2}} & 0 \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v_1}{2}-i\frac{\beta}{2}} & if & \frac{1}{2}e^{\frac{v_1}{2}-\frac{v_2}{2}}(2ih - v_{1_y} + i\beta_y) \\ 0 & \frac{1}{2}e^{\frac{v_1}{2}-\frac{v_2}{2}}(2ih + v_{1_y} + i\beta_y) & -if \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}e^{\frac{v_2}{2}+i\frac{\beta}{2}} \\ 0 & ih & \frac{1}{2}e^{\frac{v_2}{2}-\frac{v_1}{2}}(i\beta_x - 2if + v_{2_x}) \\ -\sqrt{2}e^{\frac{v_2}{2}-i\frac{\beta}{2}} & \frac{1}{2}e^{\frac{v_2}{2}-\frac{v_1}{2}}(i\beta_x - 2if - v_{2_x}) & -ih \end{pmatrix},$$

$f(x,y)$ и $h(x,y)$ — некоторые вещественные функции.

Из уравнений (5.40) вытекают уравнения

$$\varphi_{xx} = \Gamma^1_{11}\varphi_x + \Gamma^2_{11}\varphi_y + b_{11}\varphi,$$

$$\varphi_{xy} = \Gamma^1_{12}\varphi_x + \Gamma^2_{12}\varphi_y + b_{12}\varphi,$$

$$\varphi_{yy} = \Gamma^1_{22}\varphi_x + \Gamma^2_{22}\varphi_y + b_{22}\varphi,$$

где

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}(2if + v_{1_x} + i\beta_x),\quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}e^{\frac{v_1}{2}-\frac{v_2}{2}}(2ih - v_{1_y} + i\beta_y),$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}(2ih + v_{1_y} + i\beta_y),\quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}(-2if + v_{2_x} + i\beta_x),$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}e^{\frac{v_2}{2}-\frac{v_1}{2}}(-2if - v_{2_x} + i\beta_x),\ \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}(-2ih + v_{2_y} + i\beta_y),$$

$$b_{11} = -2e^{v_1},\ b_{12} = 0,\ b_{22} = -2e^{v_2}.$$

Отсюда вытекает ключевая лемма в нашей конструкции.

Лемма 5.7 *Имеют место равенства*

$$\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}(v_{1_x} + v_{2_x}) + i\beta_x,$$

$$\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}(v_{1_y} + v_{2_y}) + i\beta_y.$$

Из леммы 5.7 немедленно получаем

Следствие 5.1 *Если*

$$\mathrm{Im}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}) = \mathrm{Im}(\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}) = 0,$$

то поверхность минимальна.

Следствие 5.1 дает нам условие минимальности поверхности в диагональной метрике. Для того чтобы выяснить минимальность поверхности нам достаточно вычислить мнимые части $\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}$ и $\Gamma^1_{12} + \Gamma_{22}$.

5.4.2 Основная теорема

Пусть Γ — риманова поверхность рода g (на самом деле вся нижеследующая конструкция обобщается на сингулярные алгебраические кривые над $\mathbb{C}$). Предположим, что на Γ задан дивизор

$$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_g,$$

точки $r, P_1,\ P_2 \in \Gamma$, а также локальные параметры k_1^{-1}, k_2^{-1} в окрестностях точек P_1 и P_2. *Двухточечной функцией Бейкера–Ахиезера*, отвечающей *спектральным данным*

$$\{\Gamma, P_1, P_2, k_1, k_2, \gamma, r\},$$

называется функция $\psi(x, y, P), P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами:

1) в окрестности P_1 и P_2 функция ψ имеет существенные особенности следующего вида

$$\psi = e^{ik_1x}\left(f_1(x,y) + \frac{g_1(x,y)}{ik_1} + \frac{h_1(x,y)}{k_1^2} + \dots\right),$$

$$\psi = e^{ik_2 y}\left(f_2(x,y) + \frac{g_2(x,y)}{ik_2} + \frac{h_2(x,y)}{k_2^2} + \dots\right)$$

2) на $\Gamma \backslash \{P_1, P_2\}$ функция ψ мероморфна с простыми полюсами на γ

3) $\psi(x,y,r) = d$, $d \in \mathbb{C}$.

Для спектральных данных в общем положении функция Бейкера–Ахиезера существует и единственна.

Функцию Бейкера–Ахиезера можно явным образом выразить через тэта-функцию поверхности Γ.

Выберем на поверхности Γ базис циклов

$$a_1, \dots, a_g,\ b_1, \dots, b_g$$

со следующими индексами пересечений

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0,\ a_i \circ b_j = \delta_{ij}.$$

Через $\omega_1, \dots, \omega_g$ обозначим базис голоморфных дифференциалов на Γ, нормированный условиями

$$\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}.$$

Матрицу b-периодов дифференциалов ω_j с компонентами

$$B_{ij} = \int_{b_i} \omega_j$$

обозначим через B. Эта матрица симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть.

Тэта-функция Римана задается абсолютно сходящимся рядом

$$\theta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (Bm,m) + 2\pi i (m,z)},\ z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g.$$

Тэта-функция обладает следующими свойствами

$$\theta(z+m) = \theta(z),\ m \in \mathbb{Z}^g,$$

$$\theta(z+Bm) = \exp(-\pi i(Bm,m) - 2\pi i(m,z))\theta(z),\ m \in \mathbb{Z}^g.$$

Через X обозначим многообразие Якоби поверхности Γ

$$X = \mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + B\mathbb{Z}^g\}.$$

Пусть $A : \Gamma \to X$ отображение Абеля, заданное формулой

$$A(P) = \left(\int_{q_0}^{P} \omega_1, \ldots, \int_{q_0}^{P} \omega_g \right), \; P \in \Gamma,$$

$q_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка.

Для точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ в общем положении по теореме Римана функция

$$\theta(z + A(P)),$$

где $z = K - A(\gamma_1) - \cdots - A(\gamma_g)$, имеет на Γ ровно g нулей $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, K — вектор римановых констант.

Обозначим через Ω^1 и Ω^2 мероморфные дифференциалы на Γ с единственными простыми полюсами в точках P_1 и P_2 соответственно и нормированные условиями

$$\int_{a_j} \Omega^1 = \int_{a_j} \Omega^2 = 0, \; j = 1, \ldots, g.$$

Через U и V обозначим их векторы b-периодов

$$U = \left(\int_{b_1} \Omega^1, \ldots, \int_{b_g} \Omega^1 \right), \; V = \left(\int_{b_1} \Omega^2, \ldots, \int_{b_g} \Omega^2 \right).$$

Обозначим через $\widetilde{\psi}$ функцию

$$\widetilde{\psi}(x, y, P) = \frac{\theta(A(P) + xU + yV + z)}{\theta(A(P) + z)} \exp(2\pi i x \int_{q_0}^{P} \Omega^1 + 2\pi i y \int_{P_1}^{P} \Omega^2).$$

Тогда искомая функция Бейкера–Ахиезера имеет вид

$$\psi(x, y, P) = \frac{\widetilde{\psi}(x, y, P)}{\widetilde{\psi}(x, y, r)} d.$$

Лагранжевы погружения

Обозначим через $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ следующие функции

$$\varphi^i = \alpha_i \psi(x, y, Q_i),$$

где $Q_1, Q_2, Q_3 \in \Gamma$ дополнительный набор точек, α_i — некоторые константы.

Предположим, что поверхность Γ обладает антиголоморфной инволюцией μ

$$\mu : \Gamma \to \Gamma,$$

для которой точки P_1, P_2 и r неподвижны, причем

$$k_i(\mu(P)) = \bar{k}_i(P).$$

Имеет место

Теорема 5.7 *Пусть Q_i — неподвижные точки антиголоморфной инволюции μ. Предположим, что на Γ существует мероморфная 1-форма Ω со следующим набором дивизоров нулей и полюсов*

$$(\Omega)_0 = \gamma + \mu(\gamma) + P_1 + P_2,$$

$$(\Omega)_\infty = Q_1 + Q_2 + Q_3 + r.$$

Тогда функции φ^i удовлетворяют уравнениям

$$\varphi^1 \bar{\varphi}^1 A_1 + \varphi^2 \bar{\varphi}^2 A_2 + \varphi^3 \bar{\varphi}^3 A_3 + |d|^2 \mathrm{Res_r} \Omega = 0,$$

$$\varphi^1 \bar{\varphi}^1_x A_1 + \varphi^2 \bar{\varphi}^2_x A_2 + \varphi^3 \bar{\varphi}^3_x A_3 = 0,$$

$$\varphi^1 \bar{\varphi}^1_y A_1 + \varphi^2 \bar{\varphi}^2_y A_2 + \varphi^3 \bar{\varphi}^3_y A_3 = 0,$$

$$\varphi^1_x \bar{\varphi}^1_y A_1 + \varphi^2_x \bar{\varphi}^2_y A_2 + \varphi^3_x \bar{\varphi}^3_y A_3 = 0,$$

$$\varphi^1_x \bar{\varphi}^1_x A_1 + \varphi^2_x \bar{\varphi}^2_x A_2 + \varphi^3_x \bar{\varphi}^3_x A_3 + |f_1|^2 c_1 = 0, \qquad (5.41)$$

$$\varphi^1_y \bar{\varphi}^1_y A_1 + \varphi^2_y \bar{\varphi}^2_y A_2 + \varphi^3_y \bar{\varphi}^3_y A_3 + |f_2|^2 c_2 = 0, \qquad (5.42)$$

где $A_k = \frac{\mathrm{Res}_{\mathrm{Q_k}}\Omega}{|\alpha_k|^2}$, $k = 1, 2, 3$, c_1, c_2 *— коэффициенты разложения формы* Ω *в окрестностях точек* P_1 *и* P_2*:*

$$\Omega = (c_1 w_1 + a w_1^2 + \dots) dw_1, \ w_1 = 1/k_1,$$

$$\Omega = (c_2 w_2 + b w_2^2 + \dots) dw_2, \ w_2 = 1/k_2.$$

Из теоремы 5.7 вытекает

Следствие 5.2 *Если* $\mathrm{Res}_{\mathrm{Q_i}}\Omega > 0$, *то при*

$$\alpha_i = \sqrt{\mathrm{Res}_{\mathrm{Q_i}}\Omega}, \ d = \sqrt{\frac{-1}{\mathrm{Res}_{\mathrm{r}}\Omega}},$$

имеют место следующие равенства

$$< \varphi, \varphi >= 1, \ < \varphi, \varphi_x >=< \varphi, \varphi_y >=< \varphi_x, \varphi_y >= 0,$$

т.е. отображение $\mathcal{H} \circ \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}P^2$ *является лагранжевым, причем индуцированная метрика на* Σ *имеет диагональный вид*

$$ds^2 = |f_1|^2 |c_1| dx^2 + |f_2|^2 |c_2| dy^2.$$

Доказательство теоремы 5.7. Рассмотрим 1-форму

$$\Omega_1 = \psi(P) \overline{\psi(\mu(P))} \Omega.$$

В силу определения инволюции μ функция $\overline{\psi(\mu(P))}$ имеет следующий вид в окрестностях точек P_1 и P_2

$$\overline{\psi(\mu(P))} = e^{-ik_1 x} \left(\bar{f}_1(x, y) - \frac{\bar{g}_1(x, y)}{k_1} + \frac{\bar{h}_1(x, y)}{k_1^2} + \dots \right),$$

$$\overline{\psi(\mu(P))} = e^{-ik_2 y} \left(\bar{f}_2(x, y) - \frac{\bar{g}_2(x, y)}{k_2} + \frac{\bar{h}_2(x, y)}{k_2^2} + \dots \right).$$

Следовательно, форма Ω_1 не имеет существенных особенностей в точках P_1 и P_2. Простые полюсы $\gamma + \mu(\gamma)$ функции $\psi(P)\overline{\psi(\tau(P))}$ сокращаются с нулями в этих точках формы Ω. Таким образом форма Ω_1 имеет только простые полюсы в точках Q_1, Q_2, Q_3 и r с вычетами равными соответственно

$$\psi(Q_1)\overline{\psi(Q_1)}\mathrm{Res}_{Q_1}\Omega = \varphi^1\bar{\varphi}^1 A_1,\ \varphi^2\bar{\varphi}^2 A_2,\ \varphi^3\bar{\varphi}^3 A_3,\ |d|^2\mathrm{Res}_{\mathrm{r}}\Omega.$$

Следовательно, сумма этих вычетов равна нулю и тем самым первое равенство в теореме 1 доказано.

Форма $\psi(P)\overline{\psi(\mu(P))_x}\Omega$ также не имеет существенных особенностей в точках P_1 и P_2. Эта форма имеет только простые полюса в точках Q_1, Q_2 и Q_3 с вычетами равными

$$\varphi^1\bar{\varphi}^1_x A_1,\ \varphi^2\bar{\varphi}^2_x A_2,\ \varphi^3\bar{\varphi}^3_x A_3.$$

Второе равенство доказано. Аналогично доказываются следующие два равенства. Для этого нужно рассмотреть формы

$$\psi(P)\overline{\psi(\mu(P))_y}\Omega,\ \psi(P)_x\overline{\psi(\mu(P))_y}\Omega,$$

которые также имеют только простые полюса в точках Q_1, Q_2 и Q_3.

Для доказательства последних двух равенств (6) и (7) нужно рассмотреть формы

$$\psi(P)_x\overline{\psi(\mu(P))_x}\Omega,\ \psi(P)_y\overline{\psi(\mu(P))_y}\Omega.$$

Эти формы имеют простые полюса в точках Q_1, Q_2, Q_3, P_1 и Q_1, Q_2, Q_3, P_2 с вычетами

$$\varphi^1_x\bar{\varphi}^1_x A_1,\ \varphi^2_x\bar{\varphi}^2_x A_2,\ \varphi^3_x\bar{\varphi}^3_x A_3,\ -|f_1|^2 c_1$$

и

$$\varphi^1_y\bar{\varphi}^1_y A_1,\ \varphi^2_y\bar{\varphi}^2_y A_2,\ \varphi^3_y\bar{\varphi}^3_y A_3,\ -|f_2|^2 c_2.$$

Теорема 5.7 доказана.

5.4.3 Минимальные лагранжевы погружения

В этом разделе мы укажем спектральные данные, при которых отображение φ, построенное в предыдущем разделе минимально.

Предположим, что кривая Γ обладает голоморфной инволюцией

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma.$$

Обозначим через τ композицию $\mu \circ \sigma$. Справедлива
Лемма 5.8 *Предположим, что выполнены условия вещественности*

$$\tau(\gamma) = \gamma, \ \tau(r) = r, \ d \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\psi(x, y, \tau(P)) = \overline{\psi(x, y, P)}.$$

Для доказательства этой стандартной леммы достаточно заметить, что функция $\overline{\psi(x, y, \tau(P))}$ удовлетворяет условиям **1)**–**3)** в определении функции Бейкера–Ахиезера что и функция $\psi(x, y, P)$, следовательно, в силу единственности функции $\overline{\psi(x, y, \tau(P))}$ и $\psi(x, y, P)$ совпадают.

Ниже мы будем предполагать, что условия леммы 5.8 выполнены. В частности это означает, что

$$\mu(\gamma) = \sigma(\gamma), \ \mu(r) = \sigma(r),$$

а также, что функции f_i, g_i, участвующие в разложении ψ в окрестностях точек P_1 и P_2 вещественны.

Рассмотрим три функции

$$F_{11}(x, y, P) = \partial_x^2 \psi + \Gamma_{11}^1(x, y) \partial_x \psi + \Gamma_{11}^2(x, y) \partial_y \psi + b_{11}(x, y) \psi,$$

$$F_{12}(x, y, P) = \partial_x \partial_y \psi + \Gamma_{12}^1(x, y) \partial_x \psi + \Gamma_{12}^2(x, y) \partial_y \psi + b_{12}(x, y) \psi,$$

$$F_{22}(x, y, P) = \partial_y^2 \psi + \Gamma_{22}^1(x, y) \partial_x \psi + \Gamma_{22}^2(x, y) \partial_y \psi + b_{22}(x, y) \psi.$$

Выберем функции $\Gamma_{ij}^k(x, y)$ и $b_{ij}(x, y)$ таким образом, чтобы

$$F_{11}(x, y, Q_i) = F_{12}(x, y, Q_i) = F_{22}(x, y, Q_i) = 0, \ i = 1, 2, 3.$$

Справедлива
Лемма 5.9 *Имеют место равенства*

$$\Gamma_{11}^1(x, y) = -\frac{ia}{c_1} - \frac{f_{1_x}}{f_1},$$

$$\Gamma^1_{12}(x,y) = -\frac{f_{1_y}}{f_1},\ \Gamma^2_{12}(x,y) = -\frac{f_{2_x}}{f_2},$$
$$\Gamma^2_{22}(x,y) = -\frac{ib}{c_2} - \frac{f_{2_y}}{f_2}.$$

Доказательство леммы 5.9. Рассмотрим форму

$$\omega = F_{11}(P)\psi(\sigma(P))_x\Omega.$$

Форма ω не имеет существенных особенностей в точках P_1 и P_2. Форма ω имеет полюс второго порядка в P_1 и простой полюс в точке P_2, сумма вычетов в которых равна

$$f_1((ia + c_1\Gamma^1_{11})f_1 + c_1 f_{1_x}) = 0.$$

Отсюда получаем формулу для Γ^1_{11}. Аналогично для нахождения остальных коэффициентов нужно рассмотреть формы

$$F_{12}(P)\psi(\sigma(P))_x\Omega,\ F_{12}(P)\psi(\sigma(P))_y\Omega,\ F_{22}(P)\psi(\sigma(P))_y\Omega.$$

Лемма 5.9 доказана.

Из этой леммы получаем

$$\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} = -\frac{ia}{c_1} - \frac{f_{1_x}}{f_1} - \frac{f_{2_x}}{f_2},$$
$$\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} = -\frac{ib}{c_2} - \frac{f_{1_y}}{f_1} - \frac{f_{2_y}}{f_2}.$$

Предположим, что $a = b = 0$. Тогда так как f_1 и f_2 вещественные функции, то по лемме 5.7 поверхность минимальна. Таким образом мы доказали основную теорему.

Теорема 5.8 *Предположим, что спектральная кривая* Γ *обладает антиголоморфной инволюцией*

$$\mu : \Gamma \to \Gamma$$

с неподвижными точками Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2 *и* r *и мероморфной 1-формой* Ω *со следующим дивизором нулей и полюсов*

$$(\Omega)_0 = \gamma + \mu\gamma + P_1 + P_2,\ (\Omega)_\infty = Q_1 + Q_2 + Q_3 + r,$$

причем $\mathrm{Res}_{Q_i}\Omega > 0$. *Тогда отображение* $\mathcal{H}\circ\varphi$, *где* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ *задает лагранжево отображение плоскости в* $\mathbb{C}P^2$.

Пусть кроме того спектральная кривая Γ *обладает голоморфной инволюцией*

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma$$

такой, что

$$\mu(\gamma) = \sigma(\gamma),\ \sigma(r) = r,$$

$d \in \mathbb{R}$ *и предположим, что форма* Ω *имеет следующее разложение в окрестностях точек* P_1 *и* P_2

$$\Omega = (c_1 w_1 + d_1 w_1^3 + \dots)dw_1,\ w_1 = 1/k_1, \tag{5.43}$$

$$\Omega = (c_2 w_2 + d_2 w_2^3 + \dots)dw_2,\ w_2 = 1/k_2, \tag{5.44}$$

тогда отображение φ *минимально.*

5.4.4 Пример

В этом параграфе мы продемонстрируем теорему 5.8 на примере, когда спектральная кривая Γ является приводимой алгебраической кривой и состоит из неприводимых компонент Γ_i, которые изоморфны $\mathbb{C}P^1$. В этом случае теорема 5.8 также верна, но в определении функции Бейкера–Ахиезера нужно заменить род на арифметический род, а в формулировке теоремы 5.8 нужно заменить дифференциал на дифференциал, который обладает условием регулярности в точках пересечения различных компонент (см. главу 4).

Регулярный дифференциал на Γ задается мероморфными 1-формами Ω_j на Γ_j с простыми полюсами. Полюса форм Ω_j допускаются только в точках пересечения компонент. Причем должны выполняться условия регулярности: если кривые Γ_i и Γ_j пересекаются по точке P, то

$$\mathrm{Res}_P\Omega_1 + \mathrm{Res}_P\Omega_2 = 0.$$

Арифметическим родом кривой Γ называется размерность пространства регулярных дифференциалов. Число полюсов γ_i в определении функции

Бейкера–Ахиезера должно совпадать с арифметическим родом кривой Γ.

Пусть кривая Γ состоит из двух компонент Γ_1 и Γ_2, пересекающихся по двум точкам.

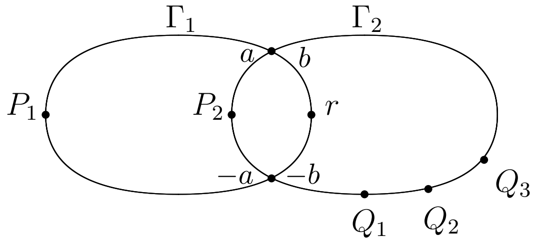


Рис. 5.1.

Пусть z_1 — координата на первой компоненте, z_2 — координата на второй компоненте. Предположим, что точки пересечения на первой компоненте имеют координаты $a, -a \in \mathbb{R}$, а на второй $b, -b \in \mathbb{R}$. Положим

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1,\ P_2 = \infty \in \Gamma_2,\ r = 0 \in \Gamma_1,$$

$$Q_1, Q_2, Q_3 \in \Gamma_2,\ Q_i \in \mathbb{R},\quad \gamma \in \Gamma_2, \gamma = i\Gamma \in i\mathbb{R}.$$

Кривая Γ обладает голоморфной инволюцией

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma,\ \sigma(z_1) = -z_1,\ \sigma(z_2) = -z_2.$$

и антиголоморфной инволюцией

$$\mu : \Gamma \to \Gamma,\ \mu(z_1) = \bar{z}_1,\ \mu(z_2) = \bar{z}_2.$$

Функция Бейкера–Ахиезера ψ на Γ задается функциями ψ_1 и ψ_2 на компонентах Γ_1 и Γ_2

$$\psi_1 = e^{ixz_1} f_1(x,y),\ \psi_2 = e^{iyz_2}\left(f_2(x,y) + \frac{g(x,y)}{z_2 - \gamma}\right).$$

Функции f_1, f_2 и g находятся из условий согласованности

$$\psi_1(x,y,a) = \psi_2(x,y,b),\ \psi_1(x,y,-a) = \psi_2(x,y,-b),$$

и условия нормировки

$$\psi_1(x, y, 0) = d.$$

Откуда

$$f_1 = d,\ f_2 = \frac{de^{-i(ax+by)}}{2b}(b(e^{2iax} + e^{2iby}) + \gamma(-e^{2iax} + e^{2iby})),$$

$$g_2 = \frac{de^{-i(ax+by)}}{2b}(e^{2iax} - e^{2iby})(b^2 - \gamma^2).$$

Мероморфная форма Ω задается формами

$$\Omega_1 = \frac{dz_1}{z_1(z_1^2 - a^2)},\ \Omega_2 = \frac{c_1(z_2^2 - \gamma^2)dz_2}{(z_2 - Q_1)(z_2 - Q_2)(z_2 - Q_3)(z_2^2 - b^2)},$$

откуда

$$d = \sqrt{\frac{1}{|\mathrm{Res}_0\Omega_1|}} = a.$$

Из условий

$$\mathrm{Res}_a\Omega_1 + \mathrm{Res}_b\Omega_2 = 0,\ \mathrm{Res}_{-a}\Omega_1 + \mathrm{Res}_{-b}\Omega_2 = 0$$

получаем

$$c_1 = -\frac{b(b - Q_1)(b - Q_2)(b - Q_3)}{a^2(b^2 - \gamma^2)},$$

$$Q_3 = -\frac{b^2(Q_1 + Q_2)}{b^2 + Q_1Q_2}.$$

Из условия, что форма Ω имеет разложения (5.43) и (5.44) в окрестностях P_1 и P_2 получаем $Q_2 = Q_1$. Откуда компоненты отображения φ имеют вид

$$\varphi_1 = \alpha_1 F_2(Q_1) =$$
$$\frac{\alpha_1 ae^{-i(ax+(b-Q_1)y)}(e^{2iax}(b + Q_1)(b - i\Gamma) - e^{2iby}(b - Q_1)(b + i\Gamma))}{2b(Q_1 - i\Gamma)},$$
$$\varphi_2 = \alpha_2 F_2(Q_2) =$$
$$\frac{\alpha_2 ae^{-i(ax+(b+Q_1)y)}(e^{2iax}(b - Q_1)(b - i\Gamma) - e^{2iby}(b + Q_1)(b + i\Gamma))}{2b(-Q_1 - i\Gamma)},$$

$$\varphi_3 = \alpha_2 F_2(Q_3) = \alpha_3 a e^{-i(ax+\frac{b(b+Q_1)(b+Q_2)}{b^2+Q_1Q_1}y)}\times$$
$$\frac{(-be^{2iax}(b-Q_1)(b-Q_2)(b-i\Gamma)+be^{2iby}(b+Q_1)(b+Q_2)(b+i\Gamma))}{2(b^3(Q_1+Q_2+i\Gamma)+ibQ_1Q_2\Gamma)},$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\mathrm{Res}_{Q_1}\Omega_2} = \sqrt{\frac{b^2(Q_1^2+\Gamma^2)}{2a^2Q_1^2(b^2+\Gamma^2)}},$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\mathrm{Res}_{Q_2}\Omega_2} = \sqrt{\frac{b^2(Q_1^2+\Gamma^2)}{2a^2Q_1^2(b^2+\Gamma^2)}},$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\mathrm{Res}_{Q_3}\Omega_2} = \sqrt{\frac{\Gamma^2(Q_1^2-b^2)}{a^2Q_1^2(b^2+\Gamma^2)}}.$$

При $a = b = 1, Q_1 = 2, \gamma = i$ получаем

$$\varphi_1 = \frac{(1+3i)}{8\sqrt{5}}e^{-i(x-y)}(-3ie^{2ix}+e^{2iy}),$$

$$\varphi_2 = \frac{e^{-i(x+3y)}}{8\sqrt{5}}((1-3i)e^{2ix}+(9+3i)e^{2iy}),$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}(\cos(x-y)-\sin(x-y)),$$

при этом

$$e^{2i\beta} = -1.$$

Индуцированная метрика на образе имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + \frac{3}{2}(1+\sin(2(x-y)))dy^2.$$

Гауссова кривизна равна тождественно 1, следовательно, образом является двумерная сфера.

5.5 Конформно плоские минимальные и гамильтоново минимальные лагранжевы торы в $\mathbb{C}P^3$

В §5.5.1 мы дадим описание одного семейства минимальных конформно плоских лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^3$. В §5.5.2 мы обобщим эту конструкцию на случай гамильтоново минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^3$.

5.5.1 Конформно плоские ML-торы в $\mathbb{C}P^3$

Будем задавать конформно плоский минимальный тор в $\mathbb{C}P^3$ как образ композиции

$$\varphi = \mathcal{H} \circ r : \mathbb{R}^3 \to S^7 \to \mathbb{C}P^3.$$

Пусть $ds^2 = e^{2v(x,y,z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ — индуцированная метрика. Из лагранжевости и минимальности, а также конформности φ следует, что матрица

$$R = \begin{pmatrix} r^1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ e^{-v}r^1_x & e^{-v}r^2_x & e^{-v}r^3_x & e^{-v}r^4_x \\ e^{-v}r^1_y & e^{-v}r^2_y & e^{-v}r^3_y & e^{-v}r^4_y \\ e^{-v}r^1_z & e^{-v}r^2_z & e^{-v}r^3_z & e^{-v}r^4_z \end{pmatrix}$$

принадлежит группе $\mathrm{U}(4)$ (см. ниже), причем $\det R = const$. С точностью до действия на r некоторой постоянной унитарной матрицы, можно считать, что $\det R = 1$. Введем матрицы X, Y и Z такие, что

$$R_x = XR,\ R_y = YR,\ R_z = ZR. \tag{5.45}$$

Так как $R \in \mathrm{SU}(4)$, то X, Y и Z лежат в алгебре Ли $\mathrm{su}(4)$. При этом они удовлетворяют уравнениям совместности

$$X_y - Y_x + [X, Y] = 0,\ X_z - Z_x + [X, Z] = 0,\ Y_z - Z_y + [Y, Z] = 0. \tag{5.46}$$

Мы рассматриваем полностью интегрируемый случай, когда матрицы X, Y и Z зависят только от одной переменной z. Тогда решением уравнений совместности являются матрицы вида (5.49),(5.50) и (5.51) (см.

ниже), при этом v удовлетворяет уравнению

$$v'(z)^2 + e^{2v(z)} + c_3^2 e^{-6v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2) = 0, \tag{5.47}$$

где c_1,c_2 и c_3 — некоторые вещественные константы, которое после замены интегрируется с помощью абелева интеграла на гиперэллиптической кривой рода 2.

Имеет место

Теорема 5.9 *Если матрицы X, Y, Z зависят только от переменной z, то отображение r, задающее минимальное конформное отображение $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{C}P^3$, с точностью до действия группы $\mathrm{U}(4)$, имеет вид*

$$r = \left(P(z)e^{i(\alpha_1 x+\beta_1 y)}, P(z)e^{i(\alpha_2 x+\beta_2 y)}, P(z)e^{-i((\alpha_1+\alpha_2)x+(\beta_1+\beta_2)y)}, P_1(z)\right), \tag{5.48}$$

$$P(z) = F(z)e^{iG(z)},\ F = \frac{e^{v(z)}}{\sqrt{6(c_1^2+c_2^2)}},\quad G(z) = c_3\int e^{-3v(z)}dz,$$

$$P_1(z) = F_1(z)e^{iG_1(z)},\ F_1(z) = \frac{\sqrt{2(c_1^2+c_2^2) - e^{2v(z)}}}{\sqrt{2(c_1^2+c_2^2)}},$$

$$G_1(z) = c_3\int \frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2+c_2^2)}dz,$$

где α_1, α_2, c_3 — некоторые константы, c_1 и c_2 выражаются через α_1, α_2 по формулам (5.71) и (5.72), $v(z)$ — решение уравнения (5.47). Если при этом α_1, α_2, c_3 такие, что уравнение (5.68) имеет два отрицательных корня и не имеет кратных корней, $v(z)$ — периодическое решение уравнения (5.47), α_1, α_2 и c_4 (см. (5.70)) — рациональные числа, то отображение φ является периодическим по переменным x, y и z.

Условия теоремы будут выполнены, например, при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, c_3 = 2$. При этом знаменатель в формуле для $G_1(z)$ не обращается в нуль. В этом случае отображение φ является периодическим по x и y, а периодичности по z можно добиться бесконечно малыми шевелениями $c_3 = 2$.

Доказательство теоремы 5.9

Обозначим через S^7 единичную сферу в $\mathbb{C}^4$, а через

$$\mathcal{H} : S^7 \to \mathbb{C}P^3$$

расслоение Хопфа (слоями расслоения Хопфа служат окружности, которые являются пересечениями комплексных прямых в $\mathbb{C}^4$, проходящих через 0, с S^7). Эрмитова структура на $\mathbb{C}P^3$ задается следующим образом. Пусть η_1 и η_2 — касательные векторы к $\mathbb{C}P^3$ в точке $p \in \mathbb{C}P^3$, S^1_p — слой расслоения Хопфа, отвечающий точке p. Через ξ_1 и ξ_2 обозначим горизонтальные поднятия векторов η_1 и η_2 на S^7, т.е. ξ_1 и ξ_2 — касательные векторы к S^7 в некоторой точке $r \in S^1_p$ такие, что они ортогональны S^1_p и $d\mathcal{H}(\xi_j) = \eta_j$. Тогда эрмитово произведение векторов η_1 и η_2 определяется по формуле

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{FS} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle,$$

где $\langle ., . \rangle$ — эрмитово произведение в $\mathbb{C}^4$. Ясно, что $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{FS}$ не зависит от их поднятия. Вещественная и мнимая части $\langle ., . \rangle_{FS}$ являются соответственно метрикой Фубини–Штуди и симплектической формой Фубини–Штуди.

Лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}P^3$ можно задавать следующим образом. Обозначим через K лагранжев конус в $\mathbb{C}^4$ с вершиной в 0, т.е. конус вещественной размерности 4, на котором зануляется симплектическая форма $\omega = \mathrm{Im}\langle ., . \rangle$

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_4 \wedge dy_4,$$

где $z_j = x_j + iy_j$ — координаты в $\mathbb{C}^4$. Проекция $\mathcal{H}(\bar{K})$ пересечения $\bar{K} = S^7 \cap K$ является лагранжевым подмногообразием в $\mathbb{C}P^3$. При этом $\mathcal{H}(\bar{K})$ локально изометрично $\bar{K}$. Действительно, выберем касательный репер e_1, e_2, e_3 к $\bar{K}$ в точке $r \in \bar{K}$. Так как $(r, e_j) = 0$, где $(., .) = \mathrm{Re}\langle ., . \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^4$ и $(ir, e_j) = \omega(r, e_j) = 0$, то касательное пространство к $\bar{K}$ в точке r ортогонально слою расслоения Хопфа, проходящему через r. Следовательно, локальная изометричность $\bar{K}$ и $\mathcal{H}(\bar{K})$ вытекает из того, что $\mathcal{H}$ является римановой субмерсией. Так как $\omega(e_i, e_j) = 0$, то лагранжевость $\mathcal{H}(\bar{K})$ вытекает из определения формы Фубини–Штуди.

Таким образом лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}P^3$ с конформно плоской метрикой можно задавать как образ композиции $\mathcal{H}$ и такого отображения

$$r : \mathbb{R}^3 \to S^7,$$

что репер

$$(r, r_x e^{-v}, r_y e^{-v}, r_z e^{-v})$$

унитарен для всех x, y и z, где

$$e^{v(x,y,z)} = |r_x| = |r_y| = |r_z|$$

конформный множитель. В случае, когда многообразие минимально из формулы для средней кривизны

$$H = J(\nabla\beta),$$

следует, что лагранжев угол постоянен, следовательно, после подходящего умножения r на постоянную унитарную матрицу можно считать, что $e^{i\beta} = \det R = 1$, т.е. $R \in \mathrm{SU}(4)$.

Имеет место

Лемма 5.10 *Если матрицы X, Y и Z зависят только от переменной z и удовлетворяют уравнениям (5.46), то они имеют вид*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & e^{v(z)} & 0 & 0 \\ -e^{v(z)} & -ic_1 & ic_2 & ic_3 e^{-3v(z)} - v'(z) \\ 0 & ic_2 & ic_1 & 0 \\ 0 & ic_3 e^{-3v(z)} + v'(z) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.49)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{v(z)} & 0 \\ 0 & ic_2 & ic_1 & 0 \\ -e^{v(z)} & ic_1 & -ic_2 & ic_3 e^{-3v(z)} - v'(z) \\ 0 & 0 & ic_3 e^{-3v(z)} + v'(z) & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5.50)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{v(z)} \\ 0 & ic_3 e^{-3v(z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ic_3 e^{-3v(z)} & 0 \\ -e^{v(z)} & 0 & 0 & -2ic_3 e^{-3v(z)} \end{pmatrix}, \qquad (5.51)$$

где функция $v(z)$ удовлетворяет уравнению (5.47).

Доказательство. Из уравнений (5.45) и из $X, Y, Z \in \mathrm{su}(4)$ получаем, что X, Y, Z имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & e^{v(z)} & 0 & 0 \\ -e^{v(z)} & if_1 & if_4 & -v_z + if_6 \\ 0 & if_4 & if_2 & if_8 \\ 0 & v_z + if_6 & if_8 & -i(f_1 + f_2) \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{v(z)} & 0 \\ 0 & if_4 & if_2 & if_8 \\ -e^{v(z)} & if_2 & if_9 & -v_z + if_3 \\ 0 & if_8 & v_z + if_3 & -i(f_4 + f_9) \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{v(z)} \\ 0 & if_6 & if_8 & -i(f_1 + f_2) \\ 0 & if_8 & if_3 & -i(f_4 + f_9) \\ -e^{v(z)} & -i(f_1 + f_2) & -i(f_4 + f_9) & -i(f_6 + f_3) \end{pmatrix},$$

где $f_j = f_j(z)$ — вещественные функции. Далее, из уравнений (5.45) прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем, получаем, что эти матрицы имеют вид (5.49), (5.50) и (5.51). Лемма доказана.

Справедлива

Лемма 5.11 *Пространство вектор-функций вида*

$$\tilde{R} = \left(\tilde{r}, e^{-v(z)}\tilde{r}_x, e^{-v(z)}\tilde{r}_y, e^{-v(z)}\tilde{r}_z\right)^\top,$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\tilde{R}_x - X\tilde{R} = 0, \tag{5.52}$$

$$\tilde{R}_y - Y\tilde{R} = 0, \tag{5.53}$$

$$\tilde{R}_z - Z\tilde{R} = 0, \tag{5.54}$$

задается следующими функциями

$$\tilde{r}_j = P(z)e^{i(\alpha_j x + \beta_j y)}, \quad 1 \le j \le 3,$$

$$\tilde{r}_4 = P_1(z),$$

где α_j *вещественный корень уравнения*

$$\alpha^3 - 3(c_1^2 + c_2^2)\alpha + 2c_1(c_1^2 + c_2^2) = 0, \tag{5.55}$$

$$\beta_j = -\frac{c_2\alpha_j}{c_1 - \alpha_j}, \tag{5.56}$$

функции $P(z), P_1(z)$ *имеют вид (5.57),(5.58),(5.66),(5.67).*

Таким образом размерность этого пространства вектор-функций не превышает 4 и равна 4 в случае, когда уравнение (5.55) имеет три различных вещественных корня.

Доказательство. Из уравнений (5.52) и (5.53) получаем

$$\tilde{r}_{xz}e^{3v} - \tilde{r}_x(ic_3 + e^{3v}v'(z)) = 0,$$

$$\tilde{r}_{yz}e^{3v} - \tilde{r}_y(ic_3 + e^{3v}v'(z)) = 0.$$

Следовательно, функция $\tilde{r}$ имеет вид

$$\tilde{r} = P(z)f(x, y) + P_1(z),$$

где $P(z), P_1(z)$ некоторые вещественные функции. Подставим $\tilde{r}$ в уравнение (5.54), получим, что функция $P(z)$ удовлетворяет уравнению

$$c_3P(z) + ie^{3v(z)}(P'(z) - P(z)v'(z)) = 0.$$

Положим

$$P(z) = F(z)e^{iG(z)}, \tag{5.57}$$

где $F(z)$ и $G(z)$ вещественные функции, тогда

$$F(z) = ae^{v(z)}, a \in \mathbb{R}, \quad G(z) = c_3\int e^{-3v(z)}dz, \tag{5.58}$$

Далее, из (5.52) получаем

$$ae^{iG}f(c_3^2 + e^{8v} + e^{6v}(v')^2) + e^{2v}(e^{5v}P_1 + P_1'(-ic_3 + e^{3v}v')+$$

$$ae^{iG+4v}(-ic_2f_y + ic_1f_x + f_{xx})) =$$

$$e^{2v}(e^{5v}P_1 - ic_3P_1' + e^{3v}P_1'v' + ae^{iG+4v}(2(c_1^2 + c_2^2)f-$$

$$ic_2f_y + ic_1f_x + f_{xx}) = 0, \tag{5.59}$$

$$-i(c_1f_y + c_2f_x) + f_{xy} = 0. \tag{5.60}$$

Из (5.53) получаем

$$ae^{iG}f(c_3^2 + e^{8v} + e^{6v}(v')^2) + e^{2v}(e^{5v}P_1 + P_1'(-ic_3 + e^{3v}v')+$$

$$ae^{iG+4v}(ic_2f_y - ic_1f_x + f_{yy})) =$$

$$e^{2v}(e^{5v}P_1 - ic_3P_1'+$$

$$e^{3v}P_1'v' + ae^{iG+4v}(2(c_1^2 + c_2^2)f + ic_2f_y - ic_1f_x + f_{yy}) = 0. \tag{5.61}$$

Из (5.54) следует

$$e^{7v}P_1 + 2ic_3e^{2v}P_1' + e^{5v}(-P_1'v' + P_1'') + ae^{iG}f(-3c_3 + e^{8v} + e^{6v}v'') =$$

$$e^{7v}P_1 + 2ic_3e^{2v}P_1' + e^{5v}(-P_1'v' + P_1'') = 0. \tag{5.62}$$

Можно считать, что в ряде Фурье функции f

$$f(x, y) = \sum a_{\alpha_j\beta_j}e^{i(x\alpha_j + y\beta_j)}$$

коэффициент a_{00} равен нулю, тогда из (5.59) и (5.61) следует

$$2(c_1^2 + c_2^2)f - ic_2f_y + ic_1f_x + f_{xx} = 0, \tag{5.63}$$

$$2(c_1^2 + c_2^2)f + ic_2f_y - ic_1f_x + f_{yy} = 0, \tag{5.64}$$

$$e^{5v}P_1 - ic_3P_1' + e^{3v}P_1'v' = 0. \tag{5.65}$$

Покажем, что уравнение (5.62) вытекает из (5.47) и (5.65). Выразим $P_1'(z)$ и $P_1''(z)$ из (5.65) и подставим в (5.62)

$$P_1'(z) = -\frac{e^{5v(z)}P_1(z)}{e^{3v(z)}v'(z) - ic_3},$$

$$P_1''(z) = \frac{e^{5v(z)}P_1(z)(e^{5v(z)} + 5ic_3v'(z) - 2e^{3v(z)}v'^2(z) + e^{3v(z)}v''(z))}{(e^{3v(z)}v'(z) - ic_3)^2}.$$

Получим

$$\frac{e^5v(z)P_1(z)(-3c_3^2 + e^{8v(z)} + e^{6v(z)}v''(z))}{(e^{3v(z)}v'(z) - ic_3)^2} = 0.$$

Последнее вытекает из (5.47). Подставим ряд Фурье функции f в уравнения (5.60)), (5.63) и (5.64). Получим, что α_j удовлетворяет уравнению (5.55), а β_j выражается через α_j по формуле (5.56).

Теперь положим в (5.65)

$$P_1(z) = F_1(z)e^{iG_1(z)}, \tag{5.66}$$

где F_1 и G_1 — вещественные функции. Получим

$$e^{5v(z)}F_1(z) + (F_1'(z) + iF_1(z)G_1'(z))(-ic_3 + e^{3v(z)}v'(z)) = 0.$$

Откуда

$$e^{5v(z)}F_1(z) + c_3F_1(z)G_1'(z) + e^{3v(z)}F_1'(z)v'(z) = 0,$$
$$-c_3F_1'(z) + e^{3v(z)}F_1(z)G_1'(z)v'(z) = 0.$$

Из последних двух равенств имеем

$$G_1'(z) = -\frac{c_3e^{5v(z)}}{c_3^2 + e^{6v(z)}v'^2(z)} = \frac{c_3e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)},$$

$$e^{8v(z)}F_1(z)v'(z) + F_1'(z)(c_3^2 + e^{6v(z)}v'^2(z)) = 0$$

или эквивалентно

$$(2c_1^2 + 2c_2^2 - e^{2v(z)}F_1'(z) + e^{2v(z)}F_1(z)v'(z) = 0.$$

Следовательно,

$$G_1(z) = c_3\int \frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)}dz, \;\; F_1(z) = \gamma_1\sqrt{2(c_1^2 + c_2^2) - e^{2v(z)}}, \tag{5.67}$$

где γ_1 — некоторая константа. Лемма 5.11 доказана.

Прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем, проверяется, что если уравнение (5.55) имеет три различных вещественных корня, то для отображения r заданного формулой (5.48) матрица R принадлежит SU(4).

Для построения периодических отображений φ нам понадобится

Лемма 5.12 *Если уравнение*

$$Q(x) = 256c_3^2x^5 + 8(c_1^2 + c_2^2)x^2 + x = 0 \tag{5.68}$$

имеет два отрицательных корня и при этом не имеет кратных корней, то уравнение (5.47) имеет гладкое периодическое решение.

Доказательство. Сделаем замену

$$v(z) = -\log(2\sqrt{-u(z)})$$

в уравнении (5.47). Получим уравнение на $u(z)$

$$u'^2 = 256c_3^2u^5 + 8(c_1^2 + c_2^2)u^2 + u. \tag{5.69}$$

Решение этого уравнения — это обратная функция к абелеву интегралу

$$\int \frac{du}{\sqrt{256c_3^2u^5 + 8(c_1^2 + c_2^2)u^2 + u}}.$$

Уравнение

$$y^2 = 256c_3^2x^5 + 8(c_1^2 + c_2^2)x^2 + x$$

задает в $\mathbb{C}^2$ гиперэллиптическую кривую Γ рода 2 с антиголоморфной инволюцией

$$\sigma : (x, y) \to (\bar{x}, \bar{y}).$$

Периодические решения уравнения (5.69) отвечают вещественным циклам γ кривой $\Gamma: \ \sigma(\gamma) = \gamma$, причем значения функции $u(z)$ будут заключены между соответствующими вещественными корнями уравнения $Q(x) = 0$, которые задают цикл γ.

Таким образом для существования периодического отрицательного решения уравнения (5.69) достаточно наличия двух отрицательных корней. Если x_1 и x_2 — наименьшие из них, то $Q(x) > 0$ при $x \in (x_1, x_2)$. В этом случае

$$\gamma = \{(x, y) : x \in [x_1, x_2], y = \pm\sqrt{Q(x)}\}.$$

Лемма 5.12 доказана.

Предположим, что $v(z)$ — периодическое решение уравнения (5.47) с периодом τ. Тогда имеет место

Лемма 5.13 *Если числа α_1, α_2 и c_4 рациональные, где*

$$c_4 = \frac{c_3\tau}{2\pi}\int_0^\tau \left(\frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)} - e^{-3v(z)}\right) dz, \tag{5.70}$$

то отображение φ периодично по переменным x, y и z.

Доказательство. Из уравнения (5.55) получаем

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = -3(c_1^2 + c_2^2),$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -2c_1(c_1^2 + c_2^2).$$

Откуда

$$c_1 = \frac{3\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)} = \frac{3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}{2(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)}, \tag{5.71}$$

$$c_2 = \pm\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)}{2\sqrt{3}(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)}. \tag{5.72}$$

Таким образом, если $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$, то $c_1 \in \mathbb{Q}$ и, следовательно, из формулы (5.56) вытекает, что числа β_j соизмеримы. Поэтому отображение $\mathcal{H} \circ r$ является периодическим по переменным x и y.

Выясним когда отображение φ периодично по z. Из формулы (5.48) следует, что для этого необходима периодичность функции

$$\frac{P_1(z)}{P(z)} = E(z)e^{iS(z)},$$

где

$$E(z) = \sqrt{3}\frac{\sqrt{2(c_1^2 + c_2^2) - e^{2v(z)}}}{e^{v(z)}},$$

$$S(z) = c_3\int \left(\frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)} - e^{-3v(z)}\right) dz.$$

Функция $E(z)$ периодична с периодом τ. Функция $S(z)$ имеет вид

$$S(z) = c_3V(z) + c_3kz + \mathrm{const},$$

где $V(z)$ — некоторая периодическая функция с тем же периодом τ, что и $v(z)$, а константа k находится по формуле

$$k = \int_0^\tau \left(\frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)} - e^{-3v(z)} \right) dz.$$

Функция

$$e^{iS(z)} = e^{i(c_3 V(z) + c_3 kz + \mathrm{const})}$$

периодична с периодом $N\tau$, где N — некоторое натуральное число, если $c_3 k\tau \in 2\pi\mathbb{Q}$. Лемма 5.13 доказана.

Таким образом теорема 5.9 доказана.

5.5.2 Конформно плоские HML-торы в $\mathbb{C}P^3$

Будем задавать конформно плоский лагранжев тор в $\mathbb{C}P^3$ как образ композиции

$$\varphi = \mathcal{H} \circ r : \mathbb{R}^3 \to S^7 \to \mathbb{C}P^3.$$

Пусть $ds^2 = e^{2v(x,y,z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ — индуцированная метрика. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \langle r, r_x \rangle = \langle r, r_y \rangle = \langle r, r_z \rangle = 0, \\ \langle r_x, r_y \rangle = \langle r_y, r_z \rangle = \langle r_z, r_x \rangle = 0. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Определим лагранжев угол β

$$e^{-i\beta} = \det(\Phi), \quad \Phi = (r, e^{-v} r_x, e^{-v} r_y, e^{-v} r_z)^t \in \mathrm{U}(4).$$

Тогда

$$R = (e^{i\beta} r, e^{-v} r_x, e^{-v} r_y, e^{-v} r_z)^t \in \mathrm{SU}(4) \tag{5.74}$$

и

$$\mathcal{U} := R_x R^{-1}, \quad \mathcal{V} := R_y R^{-1}, \quad \mathcal{W} := R_z R^{-1} \in \mathrm{su}(4). \tag{5.75}$$

Условием совместности (5.75) являются равенства

$$\mathcal{U}_y - \mathcal{V}_x + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0,\ \mathcal{V}_z - \mathcal{W}_y + [\mathcal{V}, \mathcal{W}] = 0,\ \mathcal{W}_x - \mathcal{U}_z + [\mathcal{W}, \mathcal{U}] = 0. \tag{5.76}$$

Более того, если $\triangle\beta(x,y,z)=0$, то $\mathcal{H}\circ r$ является конформно плоским **HML**-погружением в $\mathbb{CP}^3$ (см. §5.1), где $\triangle$ — соответствующий оператор Лапласа

$$\triangle=-e^{-2v}\,[\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\,].$$

Мы построим специальный класс конформно плоских **HML**-торов, для которых функция v зависит только от одного аргумента $v=v(z)$, а лагранжев угол является линейной функцией от двух других аргументов $\beta=ax+by$, где a и b некоторые вещественные константы (в этом случае $\triangle\beta(x,y,z)=0$).

Имеет место

Лемма 5.14 *Предположим, что* $\mathcal{U}=(u_{mn})$, $\mathcal{V}=(v_{mn})$, $\mathcal{W}=(w_{mn})$ — $su(4)$*-значные матрицы, удовлетворяющие* (5.76) *и* u_{jk},v_{jk},w_{jk} *зависят только от* z $2\le j,k\le 4$ *и*

$$\begin{array}{l} u_{11}=ia,\ u_{12}=e^{i\beta+v},\ v_{11}=ib,\ v_{13}=e^{i\beta+v},\ w_{14}=e^{i\beta+v},\\ u_{13}=u_{14}=v_{12}=v_{14}=w_{11}=w_{12}=w_{13}=0. \end{array}$$

Тогда они имеют вид

$$\mathcal{U}=\begin{pmatrix} ia & e^{i\beta+v} & 0 & 0\\ -e^{-i\beta+v} & -i(a+c_1) & ic_2 & ic_3e^{-3v}-v'\\ 0 & ic_2 & ic_1 & 0\\ 0 & ic_3e^{-3v}+v' & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V}=\begin{pmatrix} ib & 0 & e^{i\beta+v} & 0\\ 0 & ic_2 & ic_1 & 0\\ -e^{-i\beta+v} & ic_1 & -i(b+c_2) & ic_3e^{-3v}-v'\\ 0 & 0 & ic_3e^{-3v}+v' & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathcal{W}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{i\beta+v}\\ 0 & ic_3e^{-3v} & 0 & 0\\ 0 & 0 & ic_3e^{-3v} & 0\\ -e^{-i\beta+v} & 0 & 0 & -2ic_3e^{-3v} \end{pmatrix},$$

где $v=v(z)$ *удовлетворяет уравнению*

$$v'^{\,2}+e^{2v}+c_3^2e^{-6v}-A=0,\quad v'=\frac{dv}{dz},\tag{5.77}$$

c_1, c_2 и c_3 вещественные константы, $A = ac_1 + bc_2 + 2c_1^2 + 2c_2^2$.

Доказательство. Для простоты мы введем следующие обозначения

$$(X_{jk}) = \mathcal{U}_y - \mathcal{V}_x + [\mathcal{U}, \mathcal{V}], \ (Y_{jk}) = \mathcal{V}_z - \mathcal{W}_y + [\mathcal{V}, \mathcal{W}], \ (Z_{jk}) = \mathcal{W}_x - \mathcal{U}_z + [\mathcal{W}, \mathcal{U}].$$

Система (5.76) дает

$$X_{jk} = Y_{jk} = Z_{jk} = 0, \quad 1 \le j, k \le 4.$$

Из

$$X_{1j} = Y_{1j} = Z_{1j} = X_{2j} = 0, \quad 1 \le j \le 4$$

и

$$\mathrm{tr}\mathcal{U} = \mathrm{tr}\mathcal{V} = \mathrm{tr}\mathcal{W} = 0$$

следует, что $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ имеют вид

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} ia & e^{i\beta+v} & 0 & 0 \\ -e^{-i\beta+v} & -i(f_1(z)+a) & if_2(z) & if_3(z) - v' \\ 0 & if_2(z) & if_1(z) & 0 \\ 0 & if_3(z) + v' & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} ib & 0 & e^{i\beta+v} & 0 \\ 0 & if_2(z) & if_1(z) & 0 \\ -e^{-i\beta+v} & if_1(z) & -i(f_2(z)+b) & if_3(z) - v' \\ 0 & 0 & if_3(z) + v' & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{i\beta+v} \\ 0 & if_3(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & if_3(z) & 0 \\ -e^{-i\beta+v} & 0 & 0 & -2if_3(z) \end{pmatrix},$$

где $f_s(z)$, $1 \le s \le 3$ вещественные функции. Далее, $Y_{22} = Y_{23} = 0$ влечет

$$f_1'(z) = f_2'(z) = 0.$$

Поэтому,

$$f_1(z) = c_1, \ \ f_2(z) = c_2.$$

Теперь система (5.76) эквивалентна

$$v'^2 + e^{2v} + f_3^2(z) - A = 0$$

и

$$f_3'(z) + v' f_3(z) + 2v' f_3(z) = 0. \tag{5.78}$$

Решением (5.78) является $f_3(z) = c_3 e^{-3v}$. Лемма доказана.

Далее мы решим систему уравнений

$$R_x = \mathcal{U} R, \quad R_y = \mathcal{V} R, \quad R_z = \mathcal{W} R. \tag{5.79}$$

Лемма 5.15 *Предположим, что* $v = v(z)$ *является гладким решением уравнения* (5.77) *и* α *— корень уравнения*

$$\alpha^3 + a\,\alpha^2 - B\,\alpha + c_1 A = 0, \tag{5.80}$$

где $B = 2\,c_1 a + 3\,c_1{}^2 + c_2 b + 3\,c_2{}^2$. *Тогда* $R = (e^{i\,\beta} r, e^{-v} r_x, e^{-v} r_y, e^{-v} r_z)^t$ *является решением системы с* (5.79) $\beta = a\,x + b\,y$ *и*

$$r(x,y,z) = \kappa_1 e^{i(\alpha\,x + \delta\,y)} P(z) + \kappa_2 Q(z), \quad \delta = \frac{c_2 \alpha}{\alpha - c_5},$$

где κ_1 *и* κ_2 *произвольные комплексные числа*

$$P(z) = e^{v(z) + ic_3 \int e^{-3v(z)} dz}, \quad Q(z) = \sqrt{A - e^{2v(z)}}\, e^{ic_3 \int \frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - A} dz}.$$

Доказательство. Пусть

$$R = (e^{i\,\beta} r, e^{-v} r_x, e^{-v} r_y, e^{-v} r_z)^t,$$

где $r = r(x,y,z)$ — гладкая функция. Система (5.79) эквивалентна

$$\begin{array}{l} r_{xz} - (v' + ic_3 e^{-3v}) r_x = 0, \\ r_{yz} - (v' + ic_3 e^{-3v}) r_y = 0, \end{array} \tag{5.81}$$

$$\begin{aligned}
&r_{xx} + e^{2v}r + i(a+c_1)r_x - ic_2r_y + (v' - ic_3e^{-3v})r_z = 0,\\
&r_{yy} + e^{2v}r - ic_1r_x + i(c_2+b)r_y + (v' - ic_3e^{-3v})r_z = 0,\\
&r_{xy} - i(c_2r_x + ic_1r_y) = 0,
\end{aligned} \tag{5.82}$$

$$r_{zz} + e^{2v}r + (2ic_3e^{-3v} - v')r_z = 0. \tag{5.83}$$

Из (5.81) следует, что r имеет вид

$$r = a_1e^{v+ic_3\int e^{-3v}dz}\varphi(x,y) + Q_1(z), \quad a_1 \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x,y) \neq \text{constant}. \tag{5.84}$$

Подставим (5.84) в (5.82). Получим

$$\varphi_{xy} - i(c_2\varphi_x + c_1\varphi_y) = 0, \tag{5.85}$$

и

$$\begin{gathered}
Q_1'(z) = \frac{e^{5v}Q_1(z)}{ic_3 - v'e^{3v}},\\
\varphi_{xx} + i(a+c_1)\varphi_x - ic_2\varphi_y + A\,\varphi = 0,\\
\varphi_{yy} - ic_1\varphi_x + i(b+c_2)\varphi_y + A\,\varphi = 0.
\end{gathered} \tag{5.86}$$

Положим $Q_1(z) = H(z)e^{iG(z)}$, где $G(z)$ и $H(z)$ вещественные функции. Дифференцируя (5.77), мы получим

$$v'' + e^{2v} - 3c_3^2e^{-6v} = 0. \tag{5.87}$$

Имеем

$$H'(z)(A - e^{2v}) + v'e^{2v}H(z) = 0, \quad G'(z)(e^{2v} - A) - c_3e^{-v} = 0.$$

Откуда

$$H(z) = a_2\sqrt{A - e^{2v}}, \quad a_2 \in \mathbb{R}, \quad G(z) = \int \frac{c_3e^{-v}}{e^{2v} - A}dz + a_3, \quad a_3 \in \mathbb{R}.$$

Без потери общности с учетом (5.85) мы можем считать, что $\varphi(x,y)$ имеет вид

$$\varphi(x,y) = \sum a_{\alpha_j\delta_j}e^{i(x\alpha_j + y\delta_j)}, \quad \delta_j = \frac{c_2\alpha_j}{\alpha_j - c_1}, \quad a_{\alpha_j\delta_j} \in \mathbb{C}, \quad a_{00} = 0,$$

где $\alpha = \alpha_j$ — корень уравнения (5.80). Отметим, что мы использовали только (5.81) и (5.82) для того, чтобы получить явный вид r :

$$r(x,y,z) = \sum a_1 a_{\alpha_j \delta_j} e^{v(z)+ic_3\int e^{-3v(z)}dz} e^{i(x\alpha_j + y\delta_j)} \tag{5.88}$$

$$+a_2 e^{ia_3}\sqrt{A-e^{2v(z)}}\, e^{ic_3\int \dfrac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)}-A}dz}.$$

Не сложно проверить, что функция r также удовлетворяет (5.83). Это завершает доказательство леммы 5.15.

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 5.10 *Предположим, что уравнение* (5.80) *имеет три различных корня* α_1, α_2 *и* α_3. *Положим* $\delta_j = \frac{c_2\alpha_j}{\alpha_j - c_1}$, $j = 1,2,3$. *Тогда* $\mathcal{H}\circ r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{CP}^3$ *определяет конформно плоское H-минимальное лагранжево погружение в* $\mathbb{CP}^3$, *где отображение* $r : \mathbb{R}^3 \to S^7 \subset \mathbb{C}^4$ *задается формулой*

$$r = (\gamma_1 P(z) e^{i(x\alpha_1 + y\delta_1)},\ \gamma_2 P(z) e^{i(x\alpha_2+y\delta_2)},\ \gamma_3 P(z) e^{i(x\alpha_3+y\delta_3)},\ \gamma_4 Q(z)).$$

Здесь $\gamma_4 = \sqrt{\frac{1}{A}}$ *и*

$\gamma_1 = \sqrt{\frac{A+\alpha_2\alpha_3}{A(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\frac{A+\alpha_1\alpha_3}{A(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}}$, $\gamma_3 = \sqrt{\frac{A+\alpha_1\alpha_2}{A(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$R = (e^{i\,\beta} r, e^{-v} r_x, e^{-v} r_y, e^{-v} r_z)^t \in \mathrm{SU}(4) \quad \text{and} \quad \Delta\beta = 0.$$

Используя (5.80), мы получаем

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -a,\quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 = -B,\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -c_1 A. \tag{5.89}$$

Из (5.89) и явного вида γ_j следует, что

$$\sum_{j=1}^{3}\gamma_j^2 = \gamma_4^2,\quad \sum_{j=1}^{3}\gamma_j^2\alpha_j = 0,\quad \sum_{j=1}^{3}\gamma_j^2\alpha_j^2 = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{3}\gamma_j^2\alpha_j\delta_j = 0,\quad \sum_{j=1}^{3}\gamma_j^2\delta_j = 0,\quad \sum_{j=1}^{3}\gamma_j^2\delta_j^2 = 1.$$

Эти равенства влекут

$$\langle r, r\rangle = 1, \langle r_x, r_x\rangle = \langle r_y, r_y\rangle = e^{2v},$$

$$\langle r, r_x\rangle = \langle r, r_y\rangle = \langle r, r_z\rangle = 0,$$

$$\langle r_x, r_y\rangle = \langle r_y, r_z\rangle = \langle r_z, r_x\rangle = 0,$$

$$\langle r_z, r_z\rangle = P'(z)\overline{P'(z)}\sum_{j=1}^{3}\gamma_j^2 + \gamma_4^2 Q'(z)\overline{Q'(z)}$$

$$= \gamma_4^2[e^{2v}(v'^2 + c_3^2 e^{-6v}) + \frac{e^{4v}(v'^2 + c_3^2 e^{-6v})}{A - e^{2v}}]$$

$$= e^{2v}.$$

Отсюда

$$R \in \mathrm{SU}(4), \quad ds^2 = e^{2v(z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Отметим, что лапласиан имеет вид $\Delta = -e^{-2v}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + v'\frac{\partial}{\partial z}\right)$ при этом лагранжев угол $\beta = ax + by$. Очевидно, $\Delta\beta = 0$. Теорема доказана.

Положим в (5.77)

$$v = v(z) = -\log(2\sqrt{-q(z)}\,),$$

тогда

$$q'(z)^2 = 256c_3^2 q(z)^5 + 4Aq(z)^2 + q(z). \tag{5.90}$$

Таким образом, если мы выберем подходящие вещественные константы c_j, $1 \leq j \leq 3$, такие, что уравнение

$$256c_3^2 t^5 + 4At^2 + t = 0$$

имеет два отрицательных корня и не имеет кратных корней, то (5.90) имеет гладкое периодическое решение $q(z)$ с периодом τ. Это влечет $v(z+\tau) = v(z)$. Отметим, что в этом случае $A > 0$.

Далее мы обсудим условия когда отображение r (5.88) периодично по x, y, z. Если предположить, что $c_1 \in \mathbb{Q}$, α_1, α_2 и α_3 три различных рациональных корня (5.80), то r периодично по x и y. Отметим, что

$v(z+\tau) = v(z)$ и существует периодическая функция $h(z)$ с периодом τ такая, что
$$\int \frac{e^{-3v(z)}A}{e^{2v(z)}-A}dz = h(z) + z\int_0^\tau \frac{e^{-3v(z)}A}{e^{2v(z)}-A}dz.$$
Следовательно, если

$$\frac{c_3 A\tau}{2\pi}\int_0^\tau \frac{e^{-3v(z)}}{e^{2v(z)}-A}dz \in \mathbb{Q}\,,$$

то отображение r периодично по z с периодом $n\tau$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом справедлива

Теорема 5.11 *Предположим, что*

1. $v = v(z)$ *периодическое решение уравнения* (5.77) *с периодом* τ*;*
2. $c_1 \in \mathbb{Q}$, $\quad \dfrac{c_3 A\tau}{2\pi}\int_0^\tau \dfrac{e^{-3v(z)}}{e^{2v(z)}-A}dz \in \mathbb{Q}\,$*;*
3. α_1*,* α_2 *и* α_3 *различные рациональные корни* (5.80).

Тогда отображение $\mathcal{H}\circ r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{CP}^3$ *задает конформно плоский H-минимальный лагранжев тор в* $\mathbb{CP}^3$*.*

Литература

[1] J.L. Burchnall, I.W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators // Proc. London Math. Society. 1923. Ser. 2. V. 21. P. 420–440.

[2] J.L. Burchnall, I.W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators // Proc. Royal Soc. London 1928. Ser. A. V. 118. P. 557–583.

[3] J.L. Burchnall, I.W. Chaundy. Commutative ordinary differential operators // Proc. Royal Soc. London 1931. Ser. A. V. 134. P. 471–485.

[4] И.М. Кричевер. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функц. анализ. и его прилож. 1977. Т. 11. Вып. 1. С. 15–31.

[5] И.М. Кричевер. Коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Функц. анализ. и его прилож. 1978. Т. 12. Вып. 4. С. 41–52.

[6] И.М. Кричевер., С.П. Новиков. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // УМН. 1980. Т. 35. Вып. 6. С. 47–68.

[7] О.И. Мохов. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения // Известия АН СССР. Серия матем. 1989. Т. 53. N. 6, 1989. С. 1291–1314.

[8] С.П. Новиков, П.Г. Гриневич. О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами // Функц. анализ. и его прилож. 1982. Т. 16. Вып. 1. С. 25–26.

[9] С.П. Новиков. Коммутирующие операторы ранга $l > 1$ с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. 1982. Т. 263. N. 6. С. 1311–1313.

[10] Ж. Диксмье. Об алгебрах Вейля // Математика. 1969. Т.13, N. 4. С. 16–44.

[11] П.Г. Гриневич. Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. Вып. 1. С. 19–24.

[12] И.М. Кричевер, С.П. Новиков. Двумеризованная цепочка Тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения // УМН. 2003. Т. 58. Вып. 3. С. 51–88.

[13] D. Mumford. An algebro-geometric construction of commuting operators and of solution to the Toda lattice equation, Kortweg-de Vries equation and related nonlinear equations // Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977). Tokyo: Kinokuniya Book Store. 1978. P. 115–153.

[14] И.М. Кричевер. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения // УМН. 1978. Т. 33. N. 4. С. 215–216.

[15] A. Nakayashiki. Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties // Amer. J. Math. 1994. V. 116. P. 65–100.

[16] A. Nakayashiki. Structure of Baker–Akhiezer Modules of Principally Polarized Abelian varieties, Commuting Partial Differential Operators and Associated Integrable Systems // Duke Math. J. 1991. V. 62. N. 2. P. 315–358.

[17] А.Е. Миронов. Коммутативные кольца дифференциальных операторов, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сиб. мат. журнал. 2000. Т. 41, N 6. С. 1389–1403.

[18] А.Е. Миронов. Вещественные коммутирующие дифференциальные операторы, связанные с двумерными абелевыми многообразиями // Сиб. мат. журнал. 2002. Т. 43, N. 1. С. 126–143.

[19] M. Rothstein. Sheaves with connection on Abelian varieties // Duke Math. J. 1996. V. 84. N. 3. P. 565–598.

[20] И.М. Кричевер. Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности // Функц. анализ и его прил. 1997. Т. 31. N. 1. С. 32–50.

[21] V.E. Zakharov. Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type, I: Integration of the Lamé equation // Duke Math. J. 1998. V. 94. P. 103–139.

[22] D. Joyce. Special Lagrangian m-fold in $\mathbb{C}^m$ with symmetries // Duke Math. J. 2002. V.115. P.1–51

[23] Y. Oh. Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations // Math. Z. 1993. V. 212. P. 175–192.

[24] I. Castro, F. Urbano. Examples of unstable Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}^2$ // Compositio Math. 1998. V. 111. P. 1–14.

[25] F. Helein, P. Romon. Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}^2$ // Comm. Anal. Geom. 2002. V. 10. P. 79–126.

[26] F. Helein, P. Romon. Weierstrass representation of Lagrangian surfaces in four-dimensional space using spinors and quaternions // Commentari Mathematici Helvetici. 2000. V. 75. P. 680–688.

[27] С.Ю. Немировский. Пучки Лефшеца, функции Морса и лагранжевы вложения бутылки Клейна // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. N. 1. С. 153–166.

[28] F. Helein, P. Romon. Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in Hermitian symmetric spaces // In: Differential geometry and Integrable Systems. Eds. M. Guest, R. Miyaoka, and Y. Ohnita. Contemporary Mathematics. V. 308. Amer. Math. Soc., Providence. 2002. P. 161–178.

[29] I. Castro, F. Urbano. New examples of minimal Lagrangian tori in the complex projective plane // Manuscripta Math. 1994. V. 85. P. 265–281.

[30] А.П. Веселов, С.П. Новиков. Конечнозонные двумерные потенциальные оператор Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения // ДАН. 1984. Т. 279. N. 1. С. 20–24.

[31] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, И.М. Кричевер. Уравнения Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности // ДАН. 1976. Т. 229. N. 1. С. 15–18.

[32] Р.А. Шарипов. Минимальные торы в пятимерной сфере // Теор. и мат. физ. 1991. Т. 87. N. 1. С. 48–56.

[33] H. Ma, J. Ma. Totally Real Minimal Tori in $\mathbb{C}P^2$ // Math. Z. 2005. V. 249. P. 241–267.

[34] E. Carberry, I. Mcintosh. Minimal lagrangian 2-tori in $\mathbb{C}P^2$ come in real families of every dimension // London J. of Math. 2004. V. 69. N.2. P.531–544.

[35] F.S. Hitchin. Harmonic maps from a 2-torus to the 3-spheres // J. diff. geom. 1990. V. 31. P. 627–710.

[36] A.V. Mikhailov. The reduction problem and the scatering method //Physica 3D. 1981. N. 1. P. 73–117.

[37] Б.А. Дубровин, В.Б. Матвеев, С.П. Новиков. Нелинейные уравнения типа Кортвега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31. вып. 1. С. 55–136.

[38] E.V. Ferapontov. Stationary Veselov–Novikov equation and isothermally asymptotic surfaces in projective differential geometry // Diferential geom. appl. 1999. V. 11. N.2. P. 117–128.

[39] А.В. Жибер. Симметрии и интегралы нелинейных дифференциальных уравнений. Диссертация д.ф.-м.н. Уфа. 1993.

[40] В.В. Соколов, А.Б. Шабат. (L, A)-пары и замена типа Рикатти // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14. Вып. 2. С. 79–80.

[41] I. Castro, L. Vrancken. Minimal Lagrangian submanifolds in $\mathbb{C}P^3$ and the sinh-Gordon equation // Result. Math. 2001. V.40. P. 130–143.

[42] R.L. Bryant. Conformal and minimal immersion into the 4-sphere // J. Differ. geom. 1982. V.17. P. 455–473.

[43] G. Darboux. Lecons sur le Systemés Ortogonaux et Coordonnées Curvilignes, Gauthier–Villars, Paris, 1910.

[44] I.A. Taimanov. Finite gap theory of the Clifford torus // International Mathematics Research Notices. 2005. P. 103–120.

[45] Д.В. Талалаев, А.В. Червов. Система Хитчина на сингулярных кривых // Теор. и матем. физика. 2004. Т. 140. N. 2. С. 179–215.

[46] О.И. Мохов. Согласованные метрики постоянной римановой кривизны: локальная геометрия, нелинейные уравнения и интегрируемость // Функц. анализ и его прил. 2002. Т. 36. N. 3. С. 36–47.

[47] А.А. Ахметшин, Ю.С. Вольвовский, И.М. Кричевер. Дискретные аналоги метрик Дарбу-Егорова // Труды Математического института РАН. 1999. Т. 225. С. 21–45.

[48] J.-P. Serre. Algebraic groups and class fields. Graduate Texts in Mathematics. **117**, Springer-Verlag, New York, 1988.

[49] И.А. Тайманов. О двумерных конечнозонных потенциальных операторах Шредингера и Дирака с особыми спектральными кривыми // Сибирский матем. журнал. 2003. Т. 44. N. 4. С. 870–882.

[50] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde. Topological strings in $d < 1$ // Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 59–86.

[51] S. Barannikov, M. Kontsevich. Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields // Internat. Math. Res. Notices. 1998. N. 4. P. 201–215.

[52] V. Shramchenko. "Real doubles"of Hurwitz Frobenius manifolds // Comm. Math. Phys. 2005. V. 256 P. P. 635–680.

[53] B. Dubrovin. Geometry of 2D topological field theories. Lecture Notes in Math. 1 V. 1620. Springer. Berlin. 1995. P. 120–348.

[54] E. Witten. On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity // Nucl. Phys B. 1990. V 340. P. 281–332.

[55] B. Dubrovin. Integrable systems in topological field theory // Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 627–689.

[56] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov. WDVV-like equations in $\mathbb{N} = 2$ SUSY Yang-Mills theory // Phys. Lett. B. 1996. V. 389. P. 43–52.

[57] J. Wolfson. Minimal Lagrangian diffeomorphisms and the Monge-Ampere equation // J. Differential Geometry. 1997. V. 46. P. 335–373.

[58] И. Н. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций // М.: Наука, 1970.

[59] И.М. Кричевер. Нелинейные уравнения и эллиптические кривые // Современные проблемы математики. 1983. Т. 23. С. 79–136.

[60] А.В. Жибер, А.Б. Шабат. Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой // ДАН. 1979. V. 247. N. 5, С. 1103–1107.

[61] R.K. Dodd, R.K. Bullough. Polynomial conserved densities for the sine-Gordon equations // Proc. R. Soc. Lond. A. 1977. V. 352. P. 481–503.

[62] G. Tzitzeica. Comptes Rendu de l'Académie des Sciences. 1910. V. 150. P. 1227–1228.

Работы автора по теме диссертации

[63] А.Е. Миронов. Кольцо коммутативных дифференциальных операторов ранга 2 отвечающее кривой рода 2 // Матем. сборник. 2004. Т. 195. N. 5. С. 103–114.

[64] А.Е. Миронов. О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2 // Сибирские электронные математические известия. 2009. Т.6. С. 533–536.

[65] А.Е. Миронов. Коммутативныые дифференциальные операторы ранга 2 отвечающие кривой рода 2 // Функц. анализ и его прилож. 2005. Т. 39. Вып. 3. С. 91–94.

[66] А.Е. Миронов. Коммутирующие разностные операторы с полиномиальными коэффициентами // УМН. 2007. Т. 63. вып. 4. С. 169–170.

[67] А.Е. Миронов. Дискретные аналоги операторов Диксмье // Матем. сборник. 2007. Т. 198. N. 10. С. 109–118.

[68] А.Е. Миронов. Коммутативные кольца дифференциальных операторов, отвечающие многомерным алгебраическим многообразиям // Сиб. матем. журнал. 2002. Т. 43, N. 5. С. 1102–1114.

[69] А.Е. Миронов, И.А. Тайманов. Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым // Труды матем. института РАН. 2006. Т. 255. С. 180–196.

[70] А.Е. Миронов, И.А. Тайманов. О некоторых алгебраических примерах фробениусовых многообразий // Теорет. и матем. физ. 2007. Т. 151. N 2. С. 195–206.

[71] А.Е. Миронов. О новых примерах гамильтоново–минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ // Матем. сборник. 2004. Т. 195. N. 1. С. 89–102.

[72] А.Е. Миронов. О гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразиях в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}P^n$ // Доклады РАН. 2004. Т. 396. N. 2. С. 159–161.

[73] А.Е. Миронов. О гамильтоново-минимальных лагранжевых торах в $\mathbb{C}P^2$ // Сиб. матем. журнал. 2003. Т. 44, N.6. С. 1324–1328.

[74] А.Е. Миронов. Иерархия уравнений Веселова–Новикова и интегрируемые деформации минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$ // Сибирские электронные математические известия. 2004. Т.1. С. 38–46.

[75] А.Е. Миронов. Связь между симметриями уравнения Цицейки и иерархией Веселова–Новикова // Матем. заметки. 2007. Т. 82. N. 4. С. 637–640.

[76] A.E. Mironov. Finite-gap minimal Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}P^2$ // OCAMI (Osaka City University Advanced Mathematical Institute) Studies Series 2010. Vol. 3. P. 185–196.

[77] А.Е. Миронов. Об одном семействе конформно плоских минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^3$ // Матем. заметки. 2007. Т. 81. N 3. С. 374–384.

[78] A.E. Mironov, D. Zuo. On a Family of Conformally Flat Hamiltonian–Minimal Lagrangian Tori in $\mathbb{C}P^3$ // International Mathematics Research Notices 2008 (2008), rnm078, P. 1–13.