Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Ошевская Елена Сергеевна

КАТЕГОРНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛУКУБИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ И ПРОСТРАНСТВ КАК МОДЕЛЕЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

01.01.04 — Геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН, д.ф.-м.н., профессор
И.А. Тайманов

Новосибирск, 2013

Содержание

Введение

Актуальность. Последние десятилетия наблюдается интенсивное проникновение идей и методов теории категорий [1, 2, 33] в различные области современной математики: алгебраическую топологию, алгебраическую геометрию, современную алгебру, математическую логику и др., а также в смежные науки — физику, химию, биологию и информатику. С другой стороны, своим происхождением и побудительными причинами для своего развития теория категорий обязана алгебраической топологии [2]. С конца прошлого столетия методы теории категорий и алгебраической топологии стали активно применяться в теории параллельных процессов (см., например, [18–21, 31]). Используя тот факт, что теория категорий концентрируется на свойствах отображений между объектами с определенной структурой, Винскелю, Нильсену, Сассоне, фон Глаббику и др. удалось классифицировать разнообразные модели теории параллелизма, устанавливая наличие рефлексии/корефлексии между их категориями [36, 41, 44, 48], а также унифицировать различные эквивалентности параллельных процессов [28–30, 32, 34–36, 39–41, 46, 47]. В середине первого десятилетия текущего столетия появились работы Грандиса [24, 25], Фейструп и др. [12, 15–17], Окура и др. [22, 27], Рауссена [38], Бубеника [11], развивающие теорию направленной топологии для изучения параллельных процессов, в которой топологические пространства (di-пространства) обладают покрытием из карт с частичными порядками, согласованными на пересечениях карт. Многие понятия успешно переносятся из алгебраической топологии в направленную с учетом заданного порядка. Например, на смену фундаментальным группам и фундаментальному группоиду классического пространства пришли фундаментальный моноид и фундаментальная категория направленного пространства. В работах Пратта [37] и фон Глаббика [43] для описания параллельных процессов была предложена и исследована модель полукубических множеств (кубических множеств без вырожденностей), которые, как было показано позже, могут быть реализованы как направленные топологические пространства и в смысле Фейструп и в смысле Грандиса. Позже в статье фон Глаббика [44] было показано, что модель полукубических множеств обобщает многие известные модели теории параллелизма. В работах Губо и Йенсена [23], Грандиса [24], Фаренберга [13] и Хусаинова [7] авторы использовали гомологический подход, представив (полу)кубические множества в виде алгебраических комплексов, что позволило им исследовать параллельные процессы с точки зрения гомологий (полу)кубических множеств. В своей диссертации [20] Губо предложил модель полукубических пространств, которые не только являются направленными топологическими пространствами, но также обладают дифференциальной структурой, т.е. кроме всего прочего, позволяют определять временну́ю длительность параллельного процесса. Пространства Чу — еще одна геометрическая модель, применимая для решения проблем теории параллелизма [26]. Иногда пространства Чу интерпретируют следующим образом: это топологические пространства с множеством точек, множеством открытых множеств и отношением принадлежности с явно заданным множеством степеней принадлежности точки открытому множеству. Особенность Чу-пространств состоит в том, что они предоставляют различные интерпретации моделям, благодаря своей возможности реализовать все малые категории и значительное количество больших категорий, возникающих в математической практике. Топологии Гротендика, а также различные когомологии пространств Чу изучались Скурихиным и Сухоносом [4, 5].

В диссертационной работе с применением категорных и алгебро-топологических методов исследуются соотношения полукубических множеств с полукубическими пространствами и пространствами Чу, а также их категорных и топологических эквивалентностей. Все вышесказанное говорит об актуальности исследований, проводимых в рамках диссертационной работы.

Цель диссертации состоит в развитии и применении категорных и алгебро-топологических методов исследования полукубических множеств и пространств как моделей параллельных процессов. Достижение цели связывается с решением следующих задач:

1. дать категорные (с помощью конструкций открытых морфизмов, путей-морфизмов, коалгебраических морфизмов) и топологический (посредством di-накрытий) критерии эквивалентностей полукубических множеств;

2. построить функторы, связывающие категории полукубических множеств и полукубических пространств, дать критерии эквивалентности полукубических пространств в терминах открытых морфизмов и di-накрытий;

3. найти подкатегорию полукубических множеств с целью установления ее эквивалентности с категорией поступательных пространств Чу, а также выяснить соотношения эквивалентностей на объектах категорий.

Методы исследований. В рамках данной работы использовались методы и понятия теории категорий, теории (направленной) алгебраической топологии, техника открытых морфизмов Мойердика, коалгебраическая техника Ласоты. В качестве моделей параллельных процессов применялись полукубические множества, полукубические пространства, пространства Чу, направленные пространства.

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем:

1. определены сильный и слабый варианты эквивалентности на кубических путях полукубических множеств, а также установлено соотношение этих эквивалентностей как с di-топологической эквивалентностью, так и с категорными эквивалентностями, построенными на конструкциях открытых морфизмов, путей-морфизмов и коалгебраических морфизмов;

2. построена категория полукубических пространств, установлены ее взаимосвязи с категорией полукубических множеств в терминах существования

сопряженных функторов, сохраняющих открытые морфизмы и di-накрытия объектов категорий;

3. показана эквивалентность корефлексивной подкатегории категории полукубических множеств и категории поступательных пространств Чу, сохраняющая и отражающая категорную интерпретацию эквивалентностей на путях объектов данных категорий.

Апробация работы. Основные идеи и конкретные результаты диссертационной работы обсуждались на следующих международных и всероссийских симпозиумах, конференциях и семинарах: XLI международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирск, 2003; 4th International Conference UkrProg'04, Kiev, May 2004; 15th International Workshop CS&P'06, Wandlitz (Germany), September 2006; 17th International Symposium "Fundamentals of Computation Theory", Wroclaw, Poland, September 2009; 20th International Workshop CS&P'11, Pultusk, Poland, 2011; 23rd Nordic Workshop NWPT'11, Vasteras, Sweden, 2011. Кроме того, доклады по теме диссертации были сделаны на ряде семинаров Университета г. Ольденбурга (Германия), Университета г. Вестероса (Швеция), Киевского национального университета (Украина), Института математики СО РАН (г. Новосибирск), Института систем информатики СО РАН (г. Новосибирск).

Исследования, проводимые в рамках диссертации, были частью научно-исследовательских проектов, поддержанных в разные годы различными грантами Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 09-01-91334-ННИОа, 03-01-00403-а, 04-01-10547-з, 06-01-00094-а, 09-01- 00598-а, 09-01-09318-моб-з, 12-01-00873-а), президентской программой "Ведущие научные школы" (гранты НШ-7256.2010.1, НШ-544.2012.1), фондом DFG (грант 436 RUS 113/1002/01), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (соглашение 8206).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 ([49–57]) научных работ, в том числе 2 ([51, 57]) — в журналах из перечня ведущих периодических изданий ВАК, 5 ([49, 52, 53, 55, 56]) — в трудах международных симпозиумов, конференций и семинаров, 1 ([50]) — в периодическом издании НАН Украины, 1 ([54]) — в издании Университета г. Ольденбурга (Германия).

Личный вклад. Диссертация содержит результаты работ, выполненных автором в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН. В совместных работах [55–57], проф. А. Бесту (Германия) и проф. И.Б. Вирбицкайте (Россия) принадлежит постановка задачи сопоставления эквивалентностей полукубических множеств на основе открытых морфизмов, путей-морфизмов и коалгебраических морфизмов (грант DFG-РФФИ № 436 RUS 113/1002/01 и 09-01-91334-ННИОа).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 57 используемых источников. Общий объем диссертации составляет 106 страниц.

Во *введении* обосновывается актуальность рассматриваемых вопросов; формулируются цели диссертационных исследований; указываются методы исследований; излагается научная новизна результатов; приводится краткое описание содержания диссертации по главам.

Первая глава посвящена определению базовых понятий, связанных с полукубическими множествами, и ряда категорных и топологической эквивалентностей, а также установлению соотношений между данными эквивалентностями. В *разделе 1.1* даются определения некоторых понятий теории направленной топологии. В *разделе 1.2* вводятся и изучаются понятия полукубического множества (ПМ), его di-топологии, кубических путей, их гомотопии, а также $path$-эквивалентностей, которые строятся на кубических путях. В *разделе 1.3* определяется категория $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ полукубических множеств и ее полная подкатегория $\mathbb{P}$, а также изучаются свойства последней. В *разделе 1.4* формулируется понятие $\mathbb{P}$-открытого морфизма категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и дается его критерий посредством

di-накрытия одного полукубического множества другим, а затем определяется эквивалентность, базирующаяся на $\mathbb{P}$-открытых морфизмах. В *разделе 1.5* рассматриваются другие категорные эквивалентности — слабый и сильный варианты $Hom_{\mathbb{P}}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}$-эквивалентности, построенные на путях-морфизмах. В *разделе 1.6* вводится определение еще одной категорной эквивалентности — $F_{\mathbb{P}}$-эквивалентности, которая основана на категории коалгебр, индуцированных некоторым эндофунктором $F_{\mathbb{P}}$. В *разделе 1.7* устанавливаются строгие соотношения, имеющие место между указанными выше эквивалентностями полукубических множеств.

Во *второй главе* строятся сопряженные функторы, связывающие категорию полукубических множеств с категорией полукубических пространств, а также дается критерий $path$-эквивалентности на полукубических пространствах посредством конструкции открытых морфизмов и существования общего изометричного di-накрывающего полукубического пространства. В *разделе 2.1* определяется понятие полукубического пространства (ПП), являющегося топологическим пространством вместе с дифференциальной структурой, заданной кубами, реализованными в данном пространстве, и семейством норм на касательном расслоении, а также рассматривается di-топология ПП. В *разделах 2.2 и 2.3* строятся соответственно категория полукубических пространств $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$ и ее полная подкатегория путей-объектов $\mathfrak{P}^{\leq}$ и устанавливаются их взаимоотношения соответственно с категорией $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и подкатегорией $\mathbb{P}$. В *разделе 2.4* сначала показывается сохранение $\mathbb{P}$- и $\mathfrak{P}^{\leq}$-открытых морфизмов, а затем дается критерий $\mathfrak{P}^{\leq}$-открытости морфизма категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$ в терминах изометричного di-накрытия одного полукубического пространства другим. В *разделе 2.5* переносится понятие $path$-эквивалентности между полукубическими множествами на полукубические пространства, а также показывается, что эта эквивалентность на ПП может быть охарактеризована с помощью конструкции, построенной на изометричных di-накрытиях.

Третья глава описывает результаты исследований взаимосвязей полукубических множеств с Чу-пространствами. В *разделе 3.1* определяется категория **sChu** поступательных Чу-пространств и выделяется ее подкатегория **sP** Чу-путей в Чу-пространствах. В *разделе 3.2* сначала вводится понятие di-односвязного полукубического множества, а затем определяется универсальная di-накрывающая полукубического множества, которая, как показывается, является di-односвязным полукубическим множеством, а также рассматривается понятие универсального di-накрытия и доказывается, что функтор универсальной di-накрывающей сопряжен справа к функтору включения полной подкатегории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ di-односвязных ПМ в категорию $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$. В *разделе 3.3* сначала строятся функторы $\mathcal{F} : \mathbf{sChu} \to \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и $\mathcal{G} : \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et} \to \mathbf{sChu}$, а затем с помощью $\mathcal{G}$ показывается, что $\mathcal{F}$ — строгий, полный и плотный функтор, т.е. категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и **sChu** эквивалентны. В *разделе 3.4* выясняется, что **sP**-открытые морфизмы отображаются функтором $\mathcal{F}$ в $\mathbb{P}$-открытые морфизмы и наоборот, что позволяет установить совпадение $\mathbb{P}$-эквивалентности ПМ с **sP**-эквивалентностью поступательных Чу-пространств, полученных из образов данных ПМ под действием функтора универсальной di-накрывающей.

В *заключении* перечисляются основные результаты, полученные в ходе диссертационных исследований.

Глава 1

Полукубические множества. Категорные и di-топологическая эквивалентности

1.1. Некоторые понятия теории направленной топологии

Рассмотрим произвольное топологическое пространство X.

Определение 1. Семейство $\mathbf{U}$ пар $(U, \leq_U)$ частично упорядоченных открытых подмножеств, покрывающих X, называется *атласом порядка* на X, если для любого $x \in \mathsf{X}$ существует не пустая открытая окрестность $W(x) \subseteq \mathsf{X}$ такая, что для любых $(U_1, \leq_{U_1}), (U_2, \leq_{U_2}) \in \mathbf{U}$ и любых $y, z \in W(x) \cap U_1 \cap U_2$ выполнено соотношение:

$$y \leq_{U_1} z \;\Leftrightarrow\; y \leq_{U_2} z.$$

Открытая окрестность $W(x) \subseteq \mathsf{X}$ точки $x \in \mathsf{X}$, определенная выше, вместе с частичным порядком $\leq_{W(x)}$, индуцированным атласом порядка $\mathbf{U}$ на X, называется *окрестностью порядка* точки x.
Два атласа порядка на X *эквивалентны*, если их объединение является атласом порядка.
Топологическое пространство X вместе с классом эквивалентности атласов порядка называется *di-топологическим пространством.*

Рассмотрим произвольные di-топологические пространства X и Y с классами эквивалентности атласов порядка $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ соответственно.

Определение 2. Непрерывное отображение $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ называется *di-отображением*, если для всех представителей $\mathbf{V} = \{(V_j, \leq_{V_j})\}_{j\in J} \in \mathbb{V}$ существует представитель $\mathbf{U} = \{(U_i, \leq_{U_i})\}_{i\in I} \in \mathbb{U}$ такой, что для любого $x \in \mathsf{X}$ найдутся окрестности порядка $(W(x), \leq_{W(x)})$ и $(W(f(x)), \leq_{W(f(x))})$, в которых верны соотношения:

$$y \leq_{W(x)} z \ \Rightarrow \ f(y) \leq_{W(f(x))} f(z)$$

для всех $y, z \in W(x) \cap f^{-1}(W(f(x)))$.

Пусть X — произвольное *di*-топологическое пространство, $\overrightarrow{[0,1]}$ — единичный отрезок, снабженный естественным порядком.

Определение 3. *Di*-отображение $\gamma : \overrightarrow{[0,1]} \to \mathsf{X}$ называется *di-путем* в X. *Di*-отображение $H : [0,1] \times \overrightarrow{[0,1]} \to \mathsf{X}$ называется *di-гомотопией* *di*-путей γ_1 и γ_2 в X, если $H(0,t) = \gamma_1(t)$, $H(1,t) = \gamma_2(t)$, $H(s,0) = x_1$ и $H(s,1) = x_2$ для всех $s \in [0,1]$ и $t \in \overrightarrow{[0,1]}$.

Пусть X и Y — произвольные *di*-топологические пространства.

Определение 4. *Di*-отображение $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ называется *di-накрытием* над *di*-путями, если верно:

а) для любых точки $x_0 \in \mathsf{X}$ и *di*-пути $\gamma_{\mathsf{Y}} : \overrightarrow{[0,1]} \to \mathsf{Y}$ таких, что $\gamma_{\mathsf{Y}}(0) = \mathsf{f}(x_0)$, существует *di*-путь $\gamma_{\mathsf{X}} : \overrightarrow{[0,1]} \to \mathsf{X}$ такой, что $\mathsf{f}(\gamma_{\mathsf{X}}) = \gamma_{\mathsf{Y}}$ и $\gamma_{\mathsf{X}}(0) = x_0$.

б) для любых *di*-пути $\gamma_{\mathsf{X}} : \overrightarrow{[0,1]} \to \mathsf{X}$ и *di*-гомотопии $H_{\mathsf{Y}} : [0,1] \times \overrightarrow{[0,1]} \to \mathsf{Y}$ таких, что $H_{\mathsf{Y}}|_{0 \times \overrightarrow{[0,1]}} = \mathsf{f}(\gamma_{\mathsf{X}})$, существует *di*-гомотопия $H_{\mathsf{X}} : [0,1] \times \overrightarrow{[0,1]} \to \mathsf{X}$ такая, что $\mathsf{f}(H_{\mathsf{X}}) = H_{\mathsf{Y}}$ и $H_{\mathsf{X}}|_{0 \times \overrightarrow{[0,1]}} = \gamma_{\mathsf{X}}$.

1.2. Полукубические множества и *path*-эквивалентности

В данном разделе вводятся и изучаются понятия полукубического множества, его *di*-топологии, кубического пути, гомотопии и *path*-эквивалентности.

Полукубические множества — это аналог полусимплициальных множеств алгебраической топологии, учитывающих кубическую структуру элементов множества за счет граничных отображений. Рассмотрим формальное определение полукубического множества.

Полукубическое множество M — это набор попарно различных множеств $(M_n)_{n\geq 0}$ и граничных отображений $d^0_\lambda : M_{n+1} \to M_n$ и $d^1_\mu : M_{n+1} \to M_n$ $(1 \leq \lambda, \mu \leq (n+1))$, удовлетворяющих кубическим законам: для всех $1 \leq \lambda < \mu \leq (n+2)$ и $\alpha, \beta \in \{0,1\}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} M_{n+2} \arrow[r, "d^\beta_\mu"] \arrow[d, "d^\alpha_\lambda"'] & M_{n+1} \arrow[d, "d^\alpha_\lambda"] \\ M_{n+1} \arrow[r, "d^\beta_{\mu-1}"'] & M_n \end{tikzcd}$$

Для куба $x \in M_n$ $(n \geq 0)$ и индекса $0 \leq j \leq n$ построим множество $A(j,n) = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_j, \theta_1, \ldots, \theta_j) \mid \gamma_1, \ldots, \gamma_j \in \{0,1\},\ 1 \leq \theta_1 < \cdots < \theta_j \leq n\}$. Определим $(n-j)$-*компоненту* куба x относительно индексов $(\Gamma, \Theta) \in A(j,n)$ следующим образом:

$$D^\Gamma_\Theta(x) = \begin{cases} x, \text{ если } j = 0, \\ d^{\gamma_1}_{\theta_1} \circ \cdots \circ d^{\gamma_j}_{\theta_j}(x), \text{ иначе.} \end{cases}$$

При этом $D^\Gamma_\Theta(x)$ называется *нижней компонентой* куба x, если $\Gamma = (0, \ldots, 0)$, и *верхней компонентой* куба x, если $\Gamma = (1, \ldots, 1)$. Если $y = D^\Gamma_\Theta(x)$ — $(n-j)$-компонента x, положим $\kappa_\alpha(y,x) = |\{\ i \mid \gamma_i = \alpha,\ 1 \leq i \leq j\}|$ для любого $\alpha = 0,1$. Определим множества $A(n) = \bigcup\limits_{0\leq j\leq n} A(j,n)$ и $D(x) = \bigcup\limits_{(\Gamma,\Theta)\in A(n)} D^\Gamma_\Theta(x)$.

Пусть $u, v \in M_0$, $x \in M$ и $u, v, x \in D(y)$. Предположим, что $u = D^{\Gamma_u}_{(1,\ldots,n)}(y)$, $v = D^{\Gamma_v}_{(1,\ldots,n)}(y)$ и $x = D^{\Gamma_x}_{\Theta_x}(y)$, где $n = \dim y$, $k = \dim x$, $\Gamma_u = (\gamma^u_1, \ldots, \gamma^u_n)$, $\Gamma_v = (\gamma^v_1, \ldots, \gamma^v_n)$, $\Gamma_x = (\gamma^x_1, \ldots, \gamma^x_{n-k})$ и $\Theta_x = (\theta^x_1, \ldots, \theta^x_{n-k})$. Рассмотрим наборы $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ и $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, где $\theta_i \in \Theta$ и $\gamma_i \in \Gamma \ \Leftrightarrow\ \gamma^u_{\theta_i} = \gamma^v_{\theta_i}$ для всех $1 \leq i \leq m$. Тогда куб $D^\Gamma_\Theta(y)$ будет компонентой куба y, содержащей u и v. Теперь положим $\widetilde{\Theta} = (\theta_{i_1}, \ldots, \theta_{i_l}) \subseteq \Theta$ и $\widetilde{\Gamma} = (\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_l}) \subseteq \Gamma$, где

$$\theta_{i_j} \in \widetilde{\Theta} \text{ и } \gamma_{i_j} \in \widetilde{\Gamma} \ \Leftrightarrow\ \exists\, 1 \leq s \leq n-k \text{ такой, что } \theta_{i_j} = \theta^x_s \text{ и } \gamma_{i_j} = \gamma^x_s.$$

Тогда куб $D^{\widetilde{\Gamma}}_{\widetilde{\Theta}}(y)$ будет компонентой куба y, содержащей u,v и x. Такой куб будем обозначать $c_y(u,v,x)$.

Полукубическое множество M называется:

- *самонепересекающимся*, когда выполнены условия:
  - если $x \in M_n$ $(n \geq 1)$, то $d^{\alpha}_{\lambda}(x) = d^{\beta}_{\mu}(x)$ влечет $\alpha = \beta$ и $\lambda = \mu$;
  - если $u, v \in M_0$, $x, y, z \in M$, $u, v, x \in D(y) \cap D(z)$ и $D^{(1,\ldots,1)}_{\Theta_y}(y) = D^{(0,\ldots,0)}_{\Theta_z}(z)$, то $c_y(u, v, x) \in D(y) \cap D(z)$;
- *невырожденным*, если $|\{d^{\alpha}_{\lambda}(x) \ \mid \ 1 \leq \lambda \leq n\}| = n$ для любых $\alpha = 0, 1$ и $x \in M_n$ $(n \geq 1)$.

Замечание 1. Любое невырожденное полукубическое множество после двойного применения барицентрического разбиения (в смысле работы [18]) является самонепересекающимся.

Звездой куба $x \in M$ называется множество кубов из M, чьей компонентой является x, т.е.

$$St(x, M) = \{y \in M \mid \ x \in D(y)\}.$$

Замечание 2. Если M — самонепересекающееся полукубическое множество, то для любого $y \in St(x, M)$ существует единственная пара (Γ, Θ) такая, что $x = D^{\Gamma}_{\Theta} y$.

Полукубическое множество M обладает топологией, база которой состоит из звезд $St(x, M)$ $(x \in M)$. Следуя работе [18], рассмотрим покрытие $\{St(x, M) | x \in M_0\}$ полукубического множества M. Определим отношение $\leq_x$ на элементах множества $St(x, M)$ следующим образом:

$$y \leq_x z \ \Leftrightarrow \ \exists r \in St(x, M) \text{ такой, что } D^{(1,\ldots,1)}_{\Theta_1}(y) = r = D^{(0,\ldots,0)}_{\Theta_2}(z).$$

Утверждение 1. Самонепересекающееся полукубическое множество M вместе с классом эквивалентности атласов порядка, порожденным атласом порядка $\{(St(x, M), \leq_x) \mid x \in M_0\}$, является di-топологическим пространством.

Доказательство. Пусть M — самонепересекающееся полукубическое множество. Рассмотрим $x \in M_0$. Сначала покажем, что $\leq_x$ — частичный порядок на множестве $St(x, M)$. Поскольку рефлексивность очевидна, перейдем к проверке антисимметричности $\leq_x$. Пусть $y, z \in St(x, M)$, $y \leq_x z$ и $z \leq_x y$. Это означает, что существуют $r, \tilde{r} \in St(x, M)$ такие, что

$$D_{\Theta_1}^{(1,\ldots,1)}(y) = r = D_{\Theta_2}^{(0,\ldots,0)}(z) \text{ и } D_{\widetilde{\Theta}_1}^{(1,\ldots,1)}(z) = \tilde{r} = D_{\widetilde{\Theta}_2}^{(0,\ldots,0)}(y). \tag{1.1}$$

Поскольку $r, \tilde{r} \in St(x, M)$, найдутся пары (Γ, Θ) и $(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Theta})$ такие, что

$$x = D_{\Theta}^{\Gamma}(r) = D_{\widetilde{\Theta}}^{\widetilde{\Gamma}}(\tilde{r}). \tag{1.2}$$

Лемма A. Верны следующие равенства:

а) $\kappa_0(x, y) = \kappa_0(x, r)$ и $\kappa_0(x, y) = \kappa_0(x, \tilde{r}) + \kappa_0(\tilde{r}, y)$,

б) $\kappa_0(x, z) = \kappa_0(x, \tilde{r})$ и $\kappa_0(x, z) = \kappa_0(x, r) + \kappa_0(r, z)$,

в) $\kappa_1(x, z) = \kappa_1(x, r)$ и $\kappa_1(x, z) = \kappa_1(x, \tilde{r}) + \kappa_1(\tilde{r}, z)$,

г) $\kappa_1(x, y) = \kappa_1(x, \tilde{r})$ и $\kappa_1(x, y) = \kappa_1(x, r) + \kappa_1(r, y)$.

Доказательство. Докажем, к примеру, справедливость пункта а) (справедливость остальных пунктов доказывается аналогично). Поскольку $y \in St(x, M)$, найдется пара (Γ_y, Θ_y) такая, что $x = D_{\Theta_y}^{\Gamma_y}(y)$. В силу формул 1.1 и 1.2, верно $D_{\Theta_y}^{\Gamma_y}(y) = x = D_{\Theta}^{\Gamma}(r) = D_{\Theta}^{\Gamma}(D_{\Theta_1}^{(1,\ldots,1)}(y))$. Используя замечание 2, имеем $\kappa_0(x, y) = \kappa_0(x, r)$. Далее, из формул 1.1 и 1.2 следует $D_{\Theta_y}^{\Gamma_y}(y) = x = D_{\widetilde{\Theta}}^{\widetilde{\Gamma}}(\tilde{r}) = D_{\widetilde{\Theta}}^{\widetilde{\Gamma}}(D_{\widetilde{\Theta}_2}^{(0,\ldots,0)}(y))$. Вновь используя замечание 2, получаем $\kappa_0(x, y) = \kappa_0(x, \tilde{r}) + \kappa_0(\tilde{r}, y)$. □

Пункты а) и б) леммы A влекут равенство $\kappa_0(r, z) + \kappa_0(\tilde{r}, y) = 0$. Тогда $\kappa_0(r, z) = 0$ и $\kappa_0(\tilde{r}, y) = 0$ и, значит, в силу формулы 1.1, имеем $r = z$ и $\tilde{r} = y$. Аналогично, из пунктов в) и г) леммы A следует равенство $\kappa_1(r, y) + \kappa_1(\tilde{r}, z) = 0$. Таким образом, $\kappa_1(r, y) = 0$ и $\kappa_1(\tilde{r}, z) = 0$ и, значит, по формуле 1.1, верно $r = y$ и $\tilde{r} = z$. Следовательно, $y = z$.

Далее, проверим транзитивность $\leq_x$. Пусть $y, z, w \in St(x, M)$, $y \leq_x z$ и $z \leq_x w$. Это означает, что найдутся $r, \tilde{r} \in St(x, M)$ такие, что

$$D_{\Theta_1}^{(1,\dots,1)}(y) = r = D_{\Theta_2}^{(0,\dots,0)}(z) \text{ и } D_{\widetilde{\Theta}_1}^{(1,\dots,1)}(z) = \tilde{r} = D_{\widetilde{\Theta}_2}^{(0,\dots,0)}(w). \tag{1.3}$$

Поскольку $r, \tilde{r} \in St(x, M)$, существуют пары (Γ, Θ) и $(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Theta})$ такие, что

$$x = D_{\Theta}^{\Gamma}(r) = D_{\widetilde{\Theta}}^{\widetilde{\Gamma}}(\tilde{r}). \tag{1.4}$$

В силу формул 1.3 и 1.4, имеем $D_{\Theta}^{\Gamma}(D_{\Theta_2}^{(0,\dots,0)}(z)) = D_{\Theta}^{\Gamma}(r) = x = D_{\widetilde{\Theta}}^{\widetilde{\Gamma}}(\tilde{r}) = D_{\widetilde{\Theta}}^{\widetilde{\Gamma}}(D_{\widetilde{\Theta}_1}^{(1,\dots,1)}(z))$. Следовательно, $\kappa_1(x, r) \geq \kappa_1(\tilde{r}, z)$ и $\kappa_0(x, \tilde{r}) \geq \kappa_0(r, z)$. Таким образом, найдутся $\Theta' \subseteq \Theta$ и $\widetilde{\Theta}' \subseteq \widetilde{\Theta}$ такие, что $D_{\Theta'}^{(1,\dots,1)}(D_{\Theta_2}^{(0,\dots,0)}(z)) = D_{\widetilde{\Theta}'}^{(0,\dots,0)}(D_{\widetilde{\Theta}_1}^{(1,\dots,1)}(z)) = a$ и $x \in D(a)$. Тогда $a \in St(x, M)$ и, кроме того,

$$D_{\Theta'}^{(1,\dots,1)}(D_{\Theta_1}^{(1,\dots,1)}(y)) = D_{\Theta'}^{(1,\dots,1)}(r) = a = D_{\widetilde{\Theta}'}^{(0,\dots,0)}(\tilde{r}) = D_{\widetilde{\Theta}'}^{(0,\dots,0)}(D_{\Theta_2}^{(0,\dots,0)}(w)).$$

Значит, $y \leq_x w$.

Множества $St(x, M)$ для всех $x \in M_0$, очевидно, являются открытыми в введенной топологии на M.

Рассмотрим произвольное $x \in M$ и докажем, что для любых $u_1, u_2 \in M_0$ и любых $y, z \in St(x, M) \cap St(u_1, M) \cap St(u_2, M)$ выполнено соотношение:

$$y \leq_{u_1} z \;\Leftrightarrow\; y \leq_{u_2} z.$$

Пусть $y \leq_{u_1} z$, т.е. существует $r \in St(u_1, M)$ такой, что $D_{\Theta_1}^{(1,\dots,1)}(y) = r = D_{\Theta_2}^{(0,\dots,0)}(z)$. Поскольку M — самонепересекающееся полукубическое множество, $c_y(u_1, u_2, x) \in D(y) \cap D(z)$.

Лемма B. 1. Пусть $r = D_{\Theta_1}^{(1,\dots,1)}(y)$, $c \in D(y)$ и $v_1 = D_{(1,\dots,\dim c)}^{(1,\dots,1)}(c)$. Если $D(r) \cap D(c) \neq \emptyset$, то $v_1 \in D(r)$.

2. Пусть $r = D_{\Theta_2}^{(0,\dots,0)}(z)$, $c \in D(z)$ и $v_2 = D_{(1,\dots,\dim c)}^{(0,\dots,0)}(c)$. Если $D(r) \cap D(c) \neq \emptyset$, то $v_2 \in D(r)$.

Доказательство. Докажем пункт 1 (пункт 2 доказывается аналогично). Пусть $c = D^{\Gamma(c,y)}_{\Theta(c,y)}(y)$. Предположим, что $D(r) \cap D(c) \neq \emptyset$. Тогда найдется куб w такой, что $D^{\Gamma(w,r)}_{\Theta(w,r)}(D^{(1,\dots,1)}_{\Theta_1}(y)) = D^{\Gamma(w,r)}_{\Theta(w,r)}(r) = w = D^{\Gamma(w,c)}_{\Theta(w,c)}(c) = D^{\Gamma(w,c)}_{\Theta(w,c)}(D^{\Gamma(c,y)}_{\Theta(c,y)}(y))$. Отсюда видно, что если $\theta(c,y)_i$ — i-ая координата $\Theta(c,y)$ и $\gamma(c,y)_i$ — i-ая координата $\Gamma(c,y)$ такая, что $\gamma(c,y)_i = 0$, то $\theta(c,y)_i$ не принадлежит Θ_1. Тогда $v_1 = D^{(1,\dots,1)}_{(1,\dots,\dim c)}(c) = D^{(1,\dots,1)}_{(1,\dots,\dim c)}(D^{\Gamma(c,y)}_{\Theta(c,y)}(y))$ принадлежит $D^{(1,\dots,1)}_{\Theta_1}(y) = r$. □

В силу леммы B, нижняя и верхняя точки куба $c_y(u_1,u_2,x)$ принадлежат кубу r. Поскольку $c_y(u_1,u_2,x)$, r — компоненты куба y и M — самонепересекающееся полукубическое множество, имеем $c_y(u_1,u_2,x) \in D(r)$. Следовательно, $u_2 \in D(c_y(u_1,u_2,x)) \subseteq D(r)$. Таким образом, $r \in St(u_2, M)$ и $D^{(1,\dots,1)}_{\Theta_1}(y) = r = D^{(0,\dots,0)}_{\Theta_2}(z)$, т.е. $y \leq_{u_2} z$. Аналогично доказывается, что из $y \leq_{u_2} z$ следует $y \leq_{u_1} z$. □

Определение 5. *(Размеченным над множеством L действий) полукубическим множеством (с отмеченной точкой)* (ПМ) называется тройка $\mathrm{M} = (M, i_0, l)_L$, где

- M — *полукубическое множество*;
- $i_0 \in M_0$ — отмеченная точка;
- $l : M_1 \to L$ — *размечающая* функция из множества 1-кубов в множество L действий такая, что $l(d^0_\lambda(x)) = l(d^1_\lambda(x))$ $(\lambda = 1, 2)$ для всех $x \in M_2$.

Замечание 3. Расширение размечающей функции l на любой куб $x \in M_n$ $(n \geq 0)$ определяется следующим образом: $l(x) = \emptyset$, если $n = 0$, и $l(x) = (l_1(x), \dots, l_n(x))$, если $n > 1$. Здесь $l_\lambda(x) = l(d^0_1 \circ \dots d^0_{\lambda-1} \circ d^0_{\lambda+1} \circ \dots \circ d^0_n(x))$ для всех $1 \leq \lambda \leq n$.

Пример 1. Чтобы проиллюстрировать определение 5, рассмотрим ПМ $\mathrm{M} = (M, i_0, l)_L$ с множеством $L = \{a, b, c, d\}$ действий, изображенное на рис. 1.1.

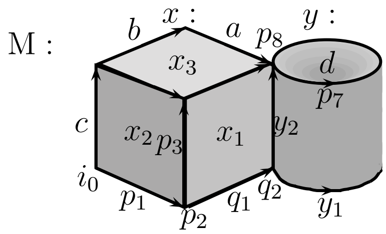


Рис. 1.1. Пример ПМ М

Множество M содержит 3-куб x и 2-куб y, свернутый в цилиндр. Для определения границ x и y положим: $x_1 = d_1^1(x)$, $x_2 = d_2^0(x)$, $x_3 = d_3^1(x)$, $y_1 = d_1^0(y)$ и $y_2 = d_2^0(y)$. Отметим, что границы любого куба, например, x представлены функциями двух типов: граничными функциями начала d_1^0, d_2^0, d_3^0 и граничными функциями завершения d_1^1, d_2^1, d_3^1 (в некотором смысле, $d_1^0(x)$, $d_2^0(x)$ и $d_3^0(x)$ — это копии соответственно $d_1^1(x)$, $d_2^1(x)$ и $d_3^1(x)$). Благодаря такому разделению, функции границ определяют направление. Точка $i_0 \in M_0$ является отмеченной. Размечающая функция l задана с помощью равенств: $l_1(x) = a$, $l_2(x) = b$, $l_3(x) = c$ и $l_2(y) = d$.

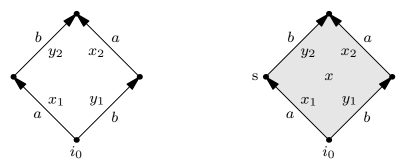


Рис. 1.2. Пример моделирования параллельного, альтернативного и последовательного выполнения действий a и b в ПМ

Полукубические множества активно используются в теории параллелизма, поскольку они позволяют моделировать параллельные процессы естественным образом: параллельное выполнение n действий представляется заполненным n-мерным кубом, последовательное выполнение действий — ребрами этого куба, альтернативное выполнение — незаполненным кубом. Заметим, что в теории параллелизма ПМ иногда называются автоматами высших размерностей. В качестве примера рассмотрим ПМ, изображенное на рис. 1.2. Как показано справа, параллельное выполнение действий a и b моделируется 2-кубом (заполненным квадратом) x, имеющим в качестве границ 1-кубы (отрезки) x_1, y_2 и y_1, x_2. На этом же рисунке слева показано альтернативное выполнение действий a, b и b, a, которое моделируется незаполненным 2-кубом, построенным из 1-кубов x_1, y_2 и y_1, x_2. На обоих рисунках действие a (b), соответствующее ребру x_2 (y_2), выполняется последовательно за действием b (a), соответствующем ребру y_1 (x_1).

Кубическим путем в ПМ М называется последовательность $P = p_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} p_1 \dots p_{k-1} \xrightarrow{d^{\alpha_k}_{\lambda_k}} p_k$[1] кубов и граничных функций такая, что $p_0 = i_0$ и либо $p_{s-1} = d^{\alpha_s}_{\lambda_s}(p_s)$, если $\alpha_s = 0$, либо $p_s = d^{\alpha_s}_{\lambda_s}(p_{s-1})$, если $\alpha_s = 1$, для всех $1 \leq s \leq k$.

Замечание 4. В работе [16] было показано, что di-путь в самонепересекающемся полукубическом множестве соответствует последовательности кубов, где каждый предыдущий является нижней компонентой последующего или, наоборот, каждый последующий является верхней компонентой предыдущего, не являясь равными кубами. Поскольку кубические пути являются частным случаем таких последовательностей, класс кубических путей в ПМ $\mathrm{M} = (M, i_0, l)_L$, где M — самонепересекающееся полукубическое множество, является сужением класса di-путей γ в M таких, что $\gamma(0) = i_0$.

Кубический путь $P = p_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} p_1 \dots p_{k-1} \xrightarrow{d^{\alpha_k}_{\lambda_k}} p_k$ называется *ациклическим*, если не найдется других соотношений между p_s и $p_{s'}$ $(0 \leq s < s' \leq k)$, чем имеющиеся в определении кубического пути. Далее, $\mathcal{CP}(\mathrm{M})$ ($\mathcal{CP}_{p_k}(\mathrm{M})$) есть множество всех кубических путей (заканчивающихся в кубе p_k) в ПМ М, а $\mathcal{CR}_1(\mathrm{M})$ — множество *одномерных кубических путей*, т.е. кубических путей $P = p_0 p_1 \dots p_k$ в М таких, что p_i — либо 0-куб, либо 1-куб для любого $0 \leq i \leq k$.

Предложение 1. Пусть $P = p_0 p_1 \dots p_{k-1} p_k$ — кубический путь в ПМ $\mathrm{M} = (M, i_0, l)_L$. Тогда $\mathrm{M}' = (M', i_0, l|_{M'_1})_L$ с $M'_n = \bigcup\limits_{0 \leq s \leq k} D(p_s) \cap M_n$ $(n \geq 0)$ есть размеченное над L ПМ и, более того, под-ПМ ПМ М. В этом случае говорим, что М$'$ *имеет форму кубического пути* P в ПМ М.

[1] В случае, когда не возникает двусмысленности, будем писать $P = p_0 p_1 \dots p_{k-1} p_k$.

Для кубических путей $P = p_0 \xrightarrow{d_{\lambda_1}^{\alpha_1}} p_1 \dots p_{k-1} \xrightarrow{d_{\lambda_k}^{\alpha_k}} p_k$ и $P' = p'_0 \xrightarrow{d_{\mu_1}^{\beta_1}} p'_1 \dots p'_{n-1} \xrightarrow{d_{\mu_n}^{\beta_n}} p'_n$ в ПМ М будем говорить, что P' есть *расширение по длине* кубического пути P и P есть *сужение по длине* кубического пути P' (обозначаем $P \to P'$), если $n \geq k$ и $p_s = p'_s$, $\alpha_s = \beta_s$, $\lambda_s = \mu_s$ для всех $1 \leq s \leq k$. В частности, пишем $P \xrightarrow{d_\lambda^\alpha} P'$, если $n = k+1$, $\beta_{k+1} = \alpha$ и $\mu_{k+1} = \lambda$.

Следуя работе [44], введем понятие комбинаторной гомотопии на кубических путях в ПМ М. *Гомотопия* — это наименьшая эквивалентность на кубических путях в ПМ М такая, что если кубический путь P' *s-смежен* кубическому пути P (обозначается $P \overset{s}{---} P'$), т.е. P' может быть получен из P заменой (для $\lambda < \mu$ и $\alpha = 0, 1$)

$$\text{либо отрезка } \xrightarrow{d_\lambda^0} p_s \xrightarrow{d_\mu^\alpha} \text{ отрезком } \xrightarrow{d_{\mu-1}^\alpha} p'_s \xrightarrow{d_\lambda^0}\text{, или наоборот;}$$

$$\text{либо отрезка } \xrightarrow{d_\mu^\alpha} p_s \xrightarrow{d_\lambda^1} \text{ отрезком } \xrightarrow{d_\lambda^1} p'_s \xrightarrow{d_{\mu-1}^\alpha}\text{, или наоборот,}$$

то P' эквивалентен P. Для любого кубического пути $P \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ пусть $[P]$ обозначает его гомотопический класс.

Замечание 5. В работе [16] было показано, что для ПМ с самонепересекающимся полукубическим множеством гомотопия кубических путей равносильна di-гомотопии соответствующих di-путей.

С этого момента будем использовать несколько видов s-смежности. Скажем, что кубический путь P' есть *расширение (сужение) по ширине* кубического пути P (обозначается $P \overset{s}{\longleftrightarrow} P'$ ($P \overset{s}{\rightarrow\!\leftarrow} P'$)), если $P \overset{s}{---} P'$ посредством замены отрезка $\xrightarrow{d_{\lambda'}^1} p_s \xrightarrow{d_{\mu'}^0}$ ($\xrightarrow{d_{\lambda'}^0} p_s \xrightarrow{d_{\mu'}^1}$). Также, будем писать $P \overset{s}{\longleftarrow\!\!\!\mapsto} P'$ ($P \overset{s}{\mapsto\!\leftarrow\!\!\dashv} P'$), если $P \overset{s}{---} P'$ и $\neg(P \overset{s}{\rightarrow\!\leftarrow} P')$ ($\neg(P \overset{s}{\longleftrightarrow} P')$. Ясно, что $P \overset{s}{\longleftrightarrow} P'$ тогда и только тогда, когда $P' \overset{s}{\rightarrow\!\leftarrow} P$, и $P \overset{s}{\longleftarrow\!\!\!\mapsto} P'$ тогда и только тогда, когда $P' \overset{s}{\mapsto\!\leftarrow\!\!\dashv} P$.

Пример 2. Вспомним ПМ М из примера 1. Последовательности $P = i_0 \xrightarrow{d_1^0} p_1 \xrightarrow{d_1^1} p_2 \xrightarrow{d_1^0} p_3 \xrightarrow{d_1^0} x_1 \xrightarrow{d_1^1} y_2 \xrightarrow{d_2^0} y \xrightarrow{d_1^1} p_7 \xrightarrow{d_1^1} p_8 \xrightarrow{d_1^0} p_7$ и $Q = i_0 \xrightarrow{d_1^0} p_1 \xrightarrow{d_1^1}$

$p_2 \xrightarrow{d_1^0} q_1 \xrightarrow{d_1^1} q_2 \xrightarrow{d_1^0} y_2 \xrightarrow{d_2^0} y \xrightarrow{d_1^1} p_7 \xrightarrow{d_1^1} p_8 \xrightarrow{d_1^0} p_7$, изображенные на рис. 1.1, являются кубическими путями в M. Ясно, что P и Q — гомотопные кубические пути, поскольку $P \overset{4}{\text{---}} (i_0 \xrightarrow{d_1^0} p_1 \xrightarrow{d_1^1} p_2 \xrightarrow{d_1^0} q_1 \xrightarrow{d_2^0} x_1 \xrightarrow{d_1^1} y_2 \xrightarrow{d_2^0} y \xrightarrow{d_1^1} p_7 \xrightarrow{d_1^1} p_8 \xrightarrow{d_1^0} p_7) \overset{5}{\text{---}} Q$. Примером ацикличного кубического пути может служить последовательность $i_0p_1p_2p_3x_1y_2$.

Рассмотрим понятия начала и завершения произвольного кубического пути P в ПМ M. Для этого нам понадобится следующий факт, доказанный в утверждении 2 работы [44].

Лемма 1. Пусть $P \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ содержит отрезок $\xrightarrow{d^0_{\lambda_s}} p_s \xrightarrow{d^1_{\lambda_{s+1}}}$ $(\lambda_s \neq \lambda_{s+1})$ или отрезок $\xrightarrow{d^0_{\lambda_s}} p_s \xrightarrow{d^0_{\lambda_{s+1}}}$ или отрезок $\xrightarrow{d^1_{\lambda_s}} p_s \xrightarrow{d^1_{\lambda_{s+1}}}$. Тогда существует единственный кубический путь P' в M такой, что $P \overset{s}{\mapsto\!\leftarrow} P'$.

Пусть $P \in \mathcal{CP}_{p_k}(\mathrm{M})$ и $1 \leq \lambda \leq n$ $(n = \dim p_k > 0)$. λ-*началом* кубического пути P называется кубический путь $d^0_\lambda(P) \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ такой, что имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&&&&& d^0_\lambda(P)\\ &&&&&&&& {\scriptstyle d^0_\lambda}\big\downarrow\\ P & \overset{s}{\mapsto\!\leftarrow} & P_{s+1} & \overset{s+1}{\mapsto\!\leftarrow} & \ldots & \overset{k-2}{\mapsto\!\leftarrow} & P_{k-1} & \overset{k-1}{\mapsto\!\leftarrow} & P_k \end{array}$$

для некоторого $1 \leq s \leq k$[2]. λ-*завершением* кубического пути P называется кубический путь $d^1_\lambda(P) \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ такой, что $P \xrightarrow{d^1_\lambda} d^1_\lambda(P)$.

Лемма 2. Пусть даны ПМ M, кубический путь $P \in \mathcal{CP}_{p_k}(\mathrm{M})$ и $1 \leq \lambda \leq n$ $(\dim p_k = n > 0)$. Тогда существует единственный кубический путь $d^\alpha_\lambda(P) \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ $(\alpha = 0, 1)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\alpha = 0$, поскольку случай $\alpha = 1$ тривиален. Пусть $P = p_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} p_1 \ldots p_{k-1} \xrightarrow{d^{\alpha_k}_{\lambda_k}} p_k$ $(\dim p_k = n > 0)$. Может случиться так, что P обладает различными экземплярами одного и того же действия

[2] При $s = k$ имеется в виду диаграмма $d^0_\lambda(P) \xrightarrow{d^0_\lambda} P$

(например, в случае, когда это действие параллельно самому себе). Для простоты изложения будем различать такие действия с помощью приписывания им индекса. Таким образом, без ограничения общности, можем считать, что в P найдется не более одного экземпляра любого действия.

Интуитивно ясно, что каждый отрезок $p_{s-1} \xrightarrow{d^{\alpha_s}_{\lambda_s}} p_s$ в P представляет собой либо начало действия $l_{\lambda_s}(p_s)$, если $\alpha_s = 0$, либо завершение действия $l_{\lambda_s}(p_{s-1})$, если $\alpha_s = 1$. Рассмотрим куб p_k в P. Он представляет одновременное выполнение n различных действий $l_1(p_k), \ldots, l_n(p_k)$. По определению кубического пути, найдется единственное $1 \leq s \leq k$ такое, что отрезок $p_{s-1} \xrightarrow{d^0_{\lambda_s}} p_s$ в P представляет начало действия $l_{\lambda_s}(p_s) = l_\lambda(p_k)$. Рассмотрим отрезок $\xrightarrow{d^0_{\lambda_s}} p_s \xrightarrow{d^{\alpha_{s+1}}_{\lambda_{s+1}}}$ в P. В случае, когда $\alpha_{s+1} = 0$, по лемме 1, найдется единственный кубический путь P_{s+1} в M такой, что $P \overset{s}{\mapsto\!\!\to\!\!\leftarrow\!\!\dashv} P_{s+1}$. Тогда P_{s+1} содержит отрезок $\xrightarrow{d^0_{\lambda^{s+1}_{s+1}}} p^{s+1}_s \xrightarrow{d^0_{\lambda^{s+1}_s}}$. Легко видеть, что $l_{\lambda_s}(p_s) = l_{\lambda^{s+1}_s}(p_{s+1})$ в M. В случае, когда $\alpha_{s+1} = 1$, рассуждения аналогичны предыдущему случаю, если $\lambda_s \neq \lambda_{s+1}$. Если же $\lambda_s = \lambda_{s+1}$, то действие $l_{\lambda_s}(p_s)$ в рассматриваемом отрезке начинается и тут же заканчивается, что невозможно в нашем случае, поскольку P не содержит завершения действия $l_{\lambda_s}(p_s) = l_\lambda(p_k)$, так как заканчивается в p_k. Повторяя эти рассуждения, получаем единственную цепочку смежных кубических путей следующего вида: $P \overset{s}{\mapsto\!\!\to\!\!\leftarrow\!\!\dashv} \cdots \overset{k-1}{\mapsto\!\!\to\!\!\leftarrow\!\!\dashv} P_k$ в M и $l_{\lambda_s}(p_s) = l_{\lambda^k_s}(p_k)$, где P_k заканчивается отрезком $p^k_{k-1} \xrightarrow{d^0_{\lambda^k_s}} p_k$. Поскольку $l_\lambda(p_k) = l_{\lambda_s}(p_s) = l_{\lambda^k_s}(p_k)$, заключаем, что $\lambda = \lambda^k_s$, так как P не содержит более одного экземпляра каждого своего действия. Следовательно, существует единственный кубический путь $d^0_\lambda(P)$, удовлетворяющий соотношению $d^0_\lambda(P) \xrightarrow{d^0_\lambda} P_k$. □

Теперь определим понятие *path*-эквивалентности на ПМ, которое является модификацией эквивалентности, введенной в статье [44], и которое, как будет показано в дальнейшем, в случае ПМ с самонепересекающимися полукубическими множествами, совпадает с наличием общего *di*-накрывающего ПМ.

Определение 6. Пусть M′ и M″ — размеченные над L ПМ.

Кубические пути $P = p_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} p_1 \ldots p_{k-1} \xrightarrow{d^{\alpha_k}_{\lambda_k}} p_k$ в M' и $Q = q_0 \xrightarrow{d^{\beta_1}_{\mu_1}} q_1 \ldots q_{k-1} \xrightarrow{d^{\beta_k}_{\mu_k}} q_k$ в M'' называются *dl-связными* тогда и только тогда, когда $\alpha_s = \beta_s$, $\lambda_s = \mu_s$, $l'(p_s) = l''(q_s)$ для всех $1 \leq s \leq k$.

ПМ M' и M'' называются *path-эквивалентными*, если существует бинарное отношение $\mathcal{R}$ на кубических путях в M' и M'' такое, что выполнены следующие условия:

(0) $(i'_0, i''_0) \in \mathcal{R}$ и для каждой пары $(P, Q) \in \mathcal{R}$ верно, что P и Q dl-связны, а также справедливо:

(1) если $P \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} P'$ в M', то $Q \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} Q'$ в M'' и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(2) если $Q \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} Q'$ в M'', то $P \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} P'$ в M' и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(3) если $P \overset{s}{\longleftrightarrow} P'$ в M', то $Q \overset{s}{\longleftrightarrow} Q'$ в M'' и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(4) если $Q \overset{s}{\longleftrightarrow} Q'$ в M'', то $P \overset{s}{\longleftrightarrow} P'$ в M' и $(P', Q') \in \mathcal{R}$.

M' и M'' *сильно path-эквивалентны* тогда и только тогда, когда они *path*-эквивалентны и $\mathcal{R}$ также удовлетворяет следующим условиям:

(5) если $P' \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} P$ в M', то $Q' \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} Q$ в M'' и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(6) если $Q' \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} Q$ в M'', то $P' \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} P$ в M' и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(7) если $P' \overset{s}{\longleftrightarrow} P$ в M', то $Q' \overset{s}{\longleftrightarrow} Q$ в M'' и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(8) если $Q' \overset{s}{\longleftrightarrow} Q$ в M'', то $P' \overset{s}{\longleftrightarrow} P$ в M' и $(P', Q') \in \mathcal{R}$.

Заметим, что свойство ПМ быть (сильно) *path*-эквивалентными действительно является отношением эквивалентности.

Пример 3. Чтобы лучше понять введенное выше определение, рассмотрим ПМ $\check{\mathrm{M}}$, $\widetilde{\mathrm{M}}$ и $\widehat{\mathrm{M}}$, изображенные на рис. 1.3. Представим граничные функции следующим образом: $d^0_1(\check{x}_1) = \check{p}_1$, $d^1_2(\check{x}_1) = \check{p}_3$, $d^0_1(\check{x}_2) = \check{p}_9$, $d^1_2(\check{x}_2) = \check{p}_{16}$, $d^0_1(\check{x}_3) =$

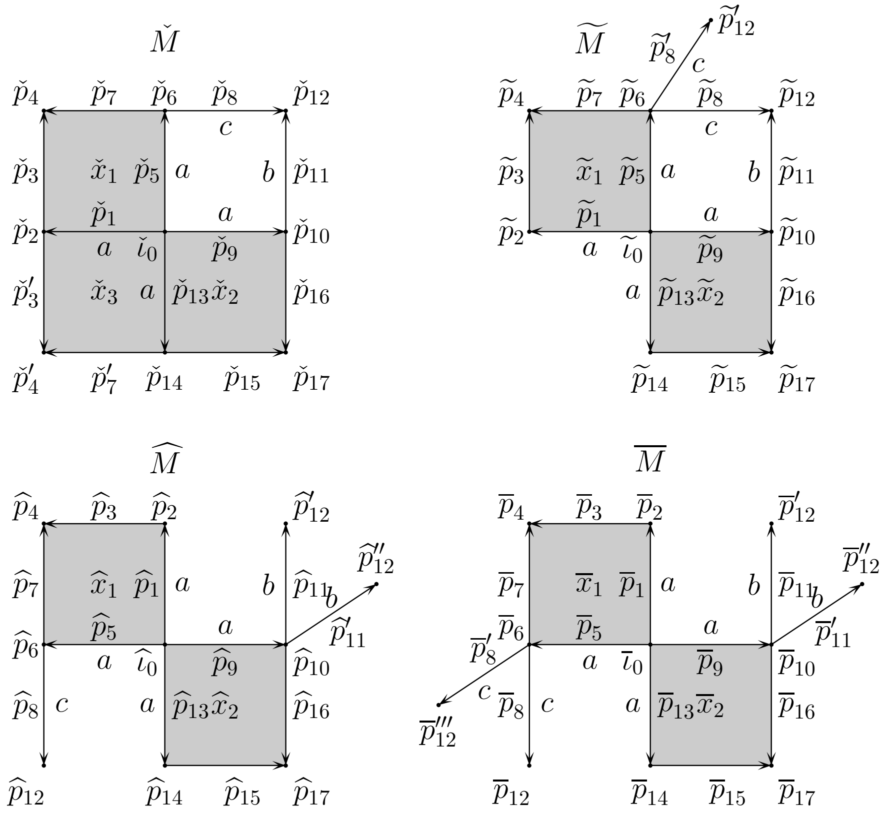


Рис. 1.3. Примеры *path*-, не сильно *path*-, и сильно *path*-эквивалентных ПМ

$\check{p}_1$, $d_2^1(\check{x}_3) = \check{p}_3'$ в ПМ $\check{\mathrm{M}}$; $d_1^0(\widetilde{x}_1) = \widetilde{p}_1$, $d_2^1(\widetilde{x}_1) = \widetilde{p}_3$, $d_1^0(\widetilde{x}_2) = \widetilde{p}_9$, $d_2^1(\widetilde{x}_2) = \widetilde{p}_{16}$ в ПМ $\widetilde{\mathrm{M}}$; $d_1^0(\widehat{x}_1) = \widehat{p}_1$, $d_2^1(\widehat{x}_1) = \widehat{p}_3$, $d_1^0(\widehat{x}_2) = \widehat{p}_9$, $d_2^1(\widehat{x}_2) = \widehat{p}_{16}$ в ПМ $\widehat{\mathrm{M}}$. Для дальнейших рассуждений необходимо ознакомиться со следующими фактами. В $\check{\mathrm{M}}$ имеем: $\check{P}_0 = \check{i}_0\check{p}_{13}\check{p}_{14}\check{p}_7'\check{p}_4' \stackrel{2}{\longleftrightarrow} \check{P}_1 = \check{i}_0\check{p}_{13}\check{x}_3\check{p}_7'\check{p}_4' \stackrel{1}{\longleftrightarrow} \check{P}_2 = \check{i}_0\check{p}_1\check{x}_3\check{p}_7'\check{p}_4' \stackrel{3}{\longleftrightarrow} \check{P}_3 = \check{i}_0\check{p}_1\check{x}_3\check{p}_3'\check{p}_4'$, $\check{P}_4 = \check{i}_0\check{p}_1\check{p}_2\check{p}_3'\check{p}_4' \stackrel{2}{\longleftrightarrow} \check{P}_3$. В $\widetilde{\mathrm{M}}$ имеем: $\widetilde{P}^0 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_5\widetilde{p}_6\widetilde{p}_7\widetilde{p}_4 \stackrel{2}{\longleftrightarrow} \widetilde{P}^1 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_5\widetilde{x}_1\widetilde{p}_7\widetilde{p}_4 \stackrel{1}{\longleftrightarrow} \widetilde{P}^2 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_1\widetilde{x}_1\widetilde{p}_7\widetilde{p}_4 \stackrel{3}{\longleftrightarrow} \widetilde{P}^3 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_1\widetilde{x}_1\widetilde{p}_3\widetilde{p}_4$, $\widetilde{P}^4 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3\widetilde{p}_4 \stackrel{2}{\longleftrightarrow} \widetilde{P}^3$ и $\widetilde{P}_0 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_{13}\widetilde{p}_{14}\widetilde{p}_{15}\widetilde{p}_{17} \stackrel{2}{\longleftrightarrow} \widetilde{P}_1 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_{13}\widetilde{x}_2\widetilde{p}_{15}\widetilde{p}_{17} \stackrel{1}{\longleftrightarrow} \widetilde{P}_2 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_9\widetilde{x}_2\widetilde{p}_{15}\widetilde{p}_{17} \stackrel{3}{\longleftrightarrow} \widetilde{P}_3 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_9\widetilde{x}_2\widetilde{p}_{16}\widetilde{p}_{17}$, $\widetilde{P}_4 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_9\widetilde{p}_{10}\widetilde{p}_{16}\widetilde{p}_{17} \stackrel{2}{\longleftrightarrow} \widetilde{P}_3$.

Нетрудно построить *path*-эквивалентность между ПМ $\check{\mathrm{M}}$ и $\widetilde{\mathrm{M}}$. Любая *path*-эквивалентность должна связывать кубический путь $\check{P}_1$ в $\check{\mathrm{M}}$ либо с кубическим путем $\widetilde{P}^1$, либо с кубическим путем $\widetilde{P}_1$, либо с обоими этими кубическими путями в $\widetilde{\mathrm{M}}$. Следовательно, при попытке расширить эту эквивалентность до сильной *path*-эквивалентности нам необходимо связать кубический путь $\check{P}_0$ в $\check{\mathrm{M}}$ либо с кубическим путем $\widetilde{P}^0$, либо с кубическим путем $\widetilde{P}_0$, либо с обоими этими кубическими путями в $\widetilde{\mathrm{M}}$. Однако сужение $\check{P}'_0 = \check{i}_0\check{p}_{13}\check{p}_{14}$ по длине кубического пути $\check{P}_0$ и сужение $\widetilde{P}'^0 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_5\widetilde{p}_6$ по длине кубического пути $\widetilde{P}^0$ не могут быть связаны, так как $\widetilde{P}'^0$ расширяется по длине на 1-куб, размеченный действием c, но это не так для $\check{P}'_0$. Рассмотрим теперь кубические пути $\check{P}_0$ и $\widetilde{P}_0$. Если они были бы связаны, то $\check{P}_4$ и $\widetilde{P}_4$ тоже были бы связаны. А это значит, что сужение $\check{P}'_4 = \check{i}_0\check{p}_1\check{p}_2$ по длине кубического пути $\check{P}_4$ и сужение $\widetilde{P}'_4 = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_9\widetilde{p}_{10}$ по длине кубического пути $\widetilde{P}_4$ также должны быть связаны. Однако $\widetilde{P}'_4$ может быть расширен по длине на 1-куб, размеченный действием b, но это не так для $\check{P}'_4$. Таким образом, $\check{\mathrm{M}}$ и $\widetilde{\mathrm{M}}$ — *path*-эквивалентны, но не сильно *path*-эквивалентны. С другой стороны, нетрудно видеть, что $\widetilde{\mathrm{M}}$ и $\widehat{\mathrm{M}}$ являются сильно *path*-эквивалентными.

Сформулируем очевидное

Утверждение 2. Одномерные ПМ M' и M'' *path*-эквивалентны, если и только если они сильно *path*-эквивалентны.

1.3. Категория $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и ее полная подкатегория $\mathbb{P}$

Сначала определим понятие морфизма между двумя полукубическими множествами как пару функций, отображающих кубы и действия одного полукубического множества в соответствующие кубы и действия другого полукубического множества и удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям.

Определение 7. Пусть $\mathrm{M} = (M, i_0, l)_L$ и $\mathrm{M}' = (M', i'_0, l')_{L'}$ — полукубические множества. Отображение $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle$ (где $f = \cup f_n,\ f_n : M_n \to M'_n$ и $\sigma : L \to L'$ — отображения множеств) называется *морфизмом* из M в M' тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. $f_0(i_0) = i'_0$;

2. $l' \circ f_n = \sigma \circ l$;

3. $f_n \circ d^\alpha_\lambda = d^\alpha_\lambda \circ f_{n+1}$.

В этом определении первое условие гарантирует, что морфизм сохраняет отмеченные точки, второе и третье условия обеспечивают согласованность действий и границ кубов соответственно.

Утверждение 3. Первые компоненты морфизмов между ПМ с самонепересекающимися полукубическими множествами являются di-отображениями.

Доказательство. Следствие утверждения 1 и пункта 3 определения 7. □

Полукубические множества вместе с морфизмами между ними формируют категорию $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$, в которой композиция двух морфизмов $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ и $\mathrm{g} = \langle g, \varrho \rangle : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}''$ есть морфизм $\mathrm{g} \circ \mathrm{f} = \langle g \circ f,\ \varrho \circ \sigma \rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{M}''$ и единичный морфизм состоит из двух тождественных отображений.

Для дальнейших целей нам необходимо наделить категорию $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ расслоенной структурой. Обозначим $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ подкатегорию категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$, чьи объекты — ПМ, размеченные над множеством L действий, а вторые компоненты морфизмов — тождественные отображения. Подобные обозначения будем использовать и для других категорий, определяемых в этой работе.

Введем ряд вспомогательных понятий, которые понадобятся для построения полной подкатегории категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$. Пусть N — некоторое натуральное число. Определим множество

$$\boxplus^N = \begin{cases} \{0\}, \text{ если } N = 0, \\ \{(t_1, \ldots, t_N) \mid t_j \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}\}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что множество $\boxplus^N$ может быть разбито на подмножества вида

$$\boxplus^N_n = \{(t_1, \ldots, t_N) \in \boxplus^N \mid |\{t_j = \frac{1}{2} \mid 1 \leq j \leq N\}| = n\},$$

где $0 \leq n \leq N$. Пусть $(t_1, \ldots, t_N) \in \boxplus^N_n$ и индексы $1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq N$ такие, что $t_{j_i} = \frac{1}{2}$ для всех $1 \leq i \leq n$. Определим граничные функции

$$\mathsf{d}^\alpha_\lambda : \boxplus^N_n \to \boxplus^N_{n-1}$$

следующим образом:

$$\mathsf{d}_\lambda^\alpha(t_1,\ldots,t_N) = (t_1,\ldots,t_{j_\lambda-1},\alpha,t_{j_\lambda+1}\ldots,t_N)$$

для всех $\alpha \in \{0,1\}$, $1 \le \lambda \le n$ и $0 < n \le N$. Очевидно, что $\boxplus^N$ — полукубическое множество. Построим размеченное над L полукубическое множество с отмеченной точкой, положив $\boxplus^{\mathrm{N}} = (\boxplus^0, 0, \emptyset)_L$, если $N = 0$, и $\boxplus^{\mathrm{N}} = (\boxplus^N, (\underbrace{0,\ldots,0}_N), l^{\boxplus^{\mathrm{N}}})_L$, иначе. Здесь $l^{\boxplus^{\mathrm{N}}}$ — любая размечающая функция из $\boxplus_1^N$ в L, удовлетворяющая равенству $l^{\boxplus^{\mathrm{N}}}(\mathsf{d}_\lambda^0(p)) = l^{\boxplus^{\mathrm{N}}}(\mathsf{d}_\lambda^1(p))$ для всех $\lambda = 1,2$ и $p \in \boxplus_2^N$.

Путь-объект $\bar{\Box}$ есть ПМ, имеющее форму некоторого кубического пути $P \in \mathcal{CP}(\boxplus^{\mathrm{N}})$ $(N \ge 0)$, согласованного[3] с $\boxplus^N$. Будем использовать обозначение $\mathbb{P}$ для полной подкатегории путей-объектов категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$. Заметим, что при фиксированом множестве L, категория $\mathbb{P}_L$ является малой.

Кубический путь P в пути-объекте $\bar{\Box}$ называется *максимальным*, если $\bar{\Box}$ имеет форму P. Обозначим через $\mathcal{CP}_{\max}(\bar{\Box})$ множество всех максимальных кубических путей в $\bar{\Box}$. Морфизм $\mathrm{m} = \langle m, 1_L\rangle : \bar{\Box} \to \bar{\Box}'$ подкатегории $\mathbb{P}_L$ называется *le-шагом* (*wi-шагом*), если $m(P) \xrightarrow{d_\lambda^\alpha} Q$ $(m(P) \xleftrightarrow{s} Q)$ в $\bar{\Box}'$ для некоторых $P \in \mathcal{CP}_{\max}(\bar{\Box})$ и $Q \in \mathcal{CP}_{\max}(\bar{\Box}')$. Заметим, что любой морфизм категории $\mathbb{P}_L$ есть композиция le- и wi-шагов.

Определим дополнительные понятия и обозначения, которые понадобятся в дальнейшем. Пусть $P = p_0 \xrightarrow{d_{\lambda_1}^{\alpha_1}} p_1 \ldots p_{k-1} \xrightarrow{d_{\lambda_k}^{\alpha_k}} p_k$ — кубический путь в размеченном над L ПМ M. Найдем индексы $0 \le \upsilon_1 < \ldots < \upsilon_a \le k$ такие, что $\alpha_{\upsilon_u} = 0$ и $\alpha_{\upsilon_u+1} = 1$ для любого $1 \le u \le a$ (предполагая, что $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_{k+1} = 1$), т.е. размерности кубов $p_{\upsilon_1},\ldots,p_{\upsilon_a}$ являются локальными максимумами в P. Аналогично, найдем индексы $0 \le \upsilon_1 < \omega_1 < \upsilon_2 < \ldots < \upsilon_{a-1} < \omega_{a-1} < \upsilon_a \le k$ такие, что $\alpha_{\omega_u} = 1$ и $\alpha_{\omega_u+1} = 0$ для всех $1 \le u < a$, т.е. размерности кубов $p_{\omega_1},\ldots,p_{\omega_{a-1}}$

[3] Кубический путь $P \in \mathcal{CP}_p(\boxplus^{\mathrm{N}})$ *согласован* с $\boxplus^N$, если $N = 0$ или выполняется равенство $D_\Theta^\Gamma(p) = (\underbrace{1,\ldots,1}_N)$, где $\Gamma = (\underbrace{1,\ldots,1}_{\dim p})$ и $\Theta = (1,\ldots,\dim p)$.

— локальные минимумы в P. Тогда имеем $p_{\omega_u} = d^1_{\lambda_{\omega_u}} \circ \cdots \circ d^1_{\lambda_{\upsilon_u+1}}(p_{\upsilon_u}) = d^0_{\lambda_{\omega_u+1}} \circ \cdots \circ d^0_{\lambda_{\upsilon_{u+1}}}(p_{\upsilon_{u+1}})$ для всех $1 \le u < a$. Пусть $n_{\upsilon_u} = \dim p_{\upsilon_u}$ и $n_{\omega_u} = \dim p_{\omega_u}$. Используя кубические законы, приведенные в определении полукубического множества, получаем $p_{\omega_u} = d^1_{\hat{\xi}^{\upsilon_u}_1} \circ \cdots \circ d^1_{\hat{\xi}^{\upsilon_u}_{n_{\upsilon_u}-n_{\omega_u}}}(p_{\upsilon_u}) = d^0_{\hat{\eta}^{\upsilon_{u+1}}_1} \circ \cdots \circ d^0_{\hat{\eta}^{\upsilon_{u+1}}_{n_{\upsilon_{u+1}}-n_{\omega_u}}}(p_{\upsilon_{u+1}})$ для некоторых $\hat{\xi}^{\upsilon_u}_1 < \cdots < \hat{\xi}^{\upsilon_u}_{n_{\upsilon_u}-n_{\omega_u}}$ и $\hat{\eta}^{\upsilon_{u+1}}_1 < \cdots < \hat{\eta}^{\upsilon_{u+1}}_{n_{\upsilon_{u+1}}-n_{\omega_u}}$. Рассмотрим последовательности $\xi^{\upsilon_u}_1 < \cdots < \xi^{\upsilon_u}_{n_{\omega_u}}$ и $\eta^{\upsilon_{u+1}}_1 < \cdots < \eta^{\upsilon_{u+1}}_{n_{\omega_u}}$, получающиеся дополнением последовательностей $\hat{\xi}^{\upsilon_u}_1 < \cdots < \hat{\xi}^{\upsilon_u}_{n_{\upsilon_u}-n_{\omega_u}}$ и $\hat{\eta}^{\upsilon_{u+1}}_1 < \cdots < \hat{\eta}^{\upsilon_{u+1}}_{n_{\upsilon_{u+1}}-n_{\omega_u}}$ до последовательностей $1 < \ldots < n_{\upsilon_u}$ и $1 < \ldots < n_{\upsilon_{u+1}}$ соответственно. Неформально говоря, приведенные выше равенства означают, что кубы p_{υ_u} и $p_{\upsilon_{u+1}}$ с локально максимальными размерностями пересекаются друг с другом по кубу p_{ω_u} с локально минимальной размерностью, и поэтому каждая τ-координата куба p_{ω_u} представима как $\xi^{\upsilon_u}_\tau$-координата куба p_{υ_u} и как $\eta^{\upsilon_{u+1}}_\tau$-координата куба $p_{\upsilon_{u+1}}$ для всех $1 \le u < a$.

Рассмотрим полукубическое множество $\boxplus^{N_P}$, где $N_P = \sum\limits_{u=1}^{a} n_{\upsilon_u} - \sum\limits_{u=1}^{a-1} n_{\omega_u}$. Для $1 \le u \le a$ определим отображение $h_u : \{1, \ldots, n_{\upsilon_u}\} \to \{1, \ldots, N_P\}$, сопоставляющее координате куба p_{υ_u} координату куба $\boxplus^{N_P}_{N_P}$ таким образом, что выполняются следующие условия:

1. $h_u(i) < h_u(i+1)$ для всех $1 \le i < n_{\upsilon_u}$,
2. $h_u(i) = h_{u+1}(j) \iff i = \xi^{\upsilon_u}_\tau$ и $j = \eta^{\upsilon_{u+1}}_\tau$ для некоторого $1 \le \tau \le n_{\omega_u}$,
3. $h_u(i) < h_{u+1}(j)$, если $\xi^{\upsilon_u}_\tau < i < \xi^{\upsilon_u}_{\tau+1}$ и $\eta^{\upsilon_{u+1}}_\tau < j < \eta^{\upsilon_{u+1}}_{\tau+1}$[4] для некоторого $0 \le \tau \le n_{\omega_u}$.

Первый пункт есть не что иное, как требование, чтобы отображение h сохраняло порядок координат куба p_{υ_u}. Второй пункт говорит о том, что h-образы координат p_{υ_u} и $p_{\upsilon_{u+1}}$ совпадают тогда и только тогда, когда эти координаты являются одной и той же координатой пересечения кубов p_{υ_u} и $p_{\upsilon_{u+1}}$. Третий пункт

[4] Здесь предполагается, что $\xi^{\upsilon_u}_0 = 0$, $\eta^{\upsilon_{u+1}}_0 = 0$ и $\xi^{\upsilon_u}_{n_{\omega_u}+1} = n_{\upsilon_u} + 1$, $\eta^{\upsilon_{u+1}}_{n_{\omega_u}+1} = n_{\upsilon_{u+1}} + 1$.

нужен, чтобы h задавалось единственным образом. Для $1 \le u \le a$ определим множество $B_u = \{h_u(i) \mid 1 \le i \le n_{\upsilon_u}\}$.

Теперь по кубическому пути $P = p_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} p_1 \dots p_{k-1} \xrightarrow{d^{\alpha_k}_{\lambda_k}} p_k$ в размеченном над L ПМ M построим кубический путь $\dot{P} = \dot{p}_{[P_0]} \xrightarrow{\mathsf{d}^{\alpha_1}_{\lambda_1}} \dot{p}_{[P_1]} \dots \dot{p}_{[P_{k-1}]} \xrightarrow{\mathsf{d}^{\alpha_k}_{\lambda_k}} \dot{p}_{[P_k]}$ в размеченном над L ПМ $\boxplus^{\mathrm{N_P}}$, где $P_s = p_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} p_1 \dots p_{s-1} \xrightarrow{d^{\alpha_s}_{\lambda_s}} p_s$ для всех $0 \le s \le k$. Заметим, что, достаточно задать лишь кубы $\dot{p}_{[P_{\upsilon_u}]}$ $(1 \le u \le a)$, поскольку остальные $\dot{p}_{[P_s]}$ определены следующим образом:

$$\dot{p}_{[P_s]} = \begin{cases} \mathsf{d}^0_{\lambda_{s+1}} \circ \dots \circ \mathsf{d}^0_{\lambda_{\upsilon_u}}(\dot{p}_{[P_{\upsilon_u}]}), & \text{если} \quad \omega_{u-1} \le s < \upsilon_u, \\ \mathsf{d}^1_{\lambda_s} \circ \dots \circ \mathsf{d}^1_{\lambda_{\upsilon_u+1}}(\dot{p}_{[P_{\upsilon_u}]}), & \text{если} \quad \upsilon_u < s \le \omega_u, \end{cases}$$

предполагая, что $\omega_0 = 0$ и $\omega_a = k$.

Предложение 2. Для каждого $1 \le u \le a$ множество $\dot{p}_{[P_{\upsilon_u}]} = (t_1, \dots, t_{N_P}) \in \boxplus^{N_P}$, где

$$t_o = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ если } o \in B_u, \\ 1, \text{ если } o \in B_j \setminus B_u \ (1 \le j < u), \\ 0, \text{ если } o \in B_j \setminus B_u \ (u < j \le a) \end{cases}$$

$(1 \le o \le N_P)$, есть n_{υ_u}-куб полукубического множества $\boxplus^{N_P}$.

Далее, построим размеченное над L ПМ $\bar{\square}_{\dot{\mathrm{P}}}$, имеющее форму кубического пути $\dot{P}$ в ПМ $\boxplus^{\mathrm{N_P}}$ ($l^{\boxplus}_o(\boxplus^{N_P}_{N_P}) = l_i(p_{\upsilon_u})$, если $o = h_u(i)$, для всех $o \in \{1, \dots, N_P\}$). Ясно, что $\bar{\square}_{\dot{\mathrm{P}}}$ есть путь-объект. Таким образом, доказана следующая

Лемма 3. Пусть M — объект категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$. Для каждого кубического пути P в M найдется морфизм $\pi = \langle \pi, 1_L \rangle : \bar{\square}_{\dot{\mathrm{P}}} \to$ M категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$, заданный с помощью формулы $\pi(D^{\Gamma}_{\Theta}(\dot{p}_{[P_{\upsilon_u}]})) = D^{\Gamma}_{\Theta}(p_{\upsilon_u})$ для всех $(\Gamma, \Theta) \in A(\dim \dot{p}_{[P_{\upsilon_u}]})$ и $1 \le u \le a$ и удовлетворяющий равенству $\pi(\dot{P}) = P$.

В заключение приведем очевидный факт.

Лемма 4. Пусть $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle$: M $\to$ M$'$ — морфизм в $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$. Тогда для любого кубического пути $P = p_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} \dots \xrightarrow{d^{\alpha_k}_{\lambda_k}} p_k \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ верно:

1. $f(P) = f(p_0) \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} \ldots \xrightarrow{d^{\alpha_k}_{\lambda_k}} f(p_k) \in \mathcal{CP}(\mathrm{M}')$;

2. если $P \xrightarrow{d^{\alpha}_{\lambda}} P'$ в M, то $f(P) \xrightarrow{d^{\alpha}_{\lambda}} f(P')$ в M′;

3. если $P \overset{s}{-\!-\!-} P'$ в M, то $f(P) \overset{s}{-\!-\!-} f(P')$ в M′[5].

1.4. Di-топологический критерий $\mathbb{P}$-открытости. $\mathbb{P}$-эквивалентность

В этом разделе сначала определяется понятие открытого морфизма категории p$\mathbb{S}$et, затем дается его критерий в терминах di-накрытия над кубическими путями для самонепересекающихся ПМ. Также вводится понятие эквивалентности, базирующейся на открытых морфизмах.

Рассмотрим произвольную категорию $\mathbf{M}$ и ее подкатегорию $\mathbf{P}$. Пусть $\mathbf{I} : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathbf{M}$ — функтор вложения. Приведем формальное определение $\mathbf{P}$-открытого морфизма.

Определение 8. Морфизм $\mathsf{f} : \mathsf{M} \to \mathsf{M}'$ категории $\mathbf{M}$ называется $\mathbf{P}$-*открытым*, если он удовлетворяет свойству правого поднятия, т.е. для любого морфизма $\mathsf{m} : \mathsf{P} \to \mathsf{Q}$ категории $\mathbf{P}$ и любого коммутативного квадрата категории $\mathbf{M}$, изображенного ниже,

$$\begin{tikzcd} \mathsf{P} \arrow[r, "\mathsf{p}"] \arrow[d, "\mathsf{m}"'] & \mathsf{M} \arrow[d, "\mathsf{f}"] \\ \mathsf{Q} \arrow[r, "\mathsf{q}"'] \arrow[ur, dashed, "\mathsf{r}"'] & \mathsf{M}' \end{tikzcd}$$

существует морфизм $\mathsf{r} : \mathsf{Q} \to \mathsf{M}$, разбивающий этот квадрат на два коммутативных треугольника.

[5] Поскольку морфизм f сохраняет границы кубов (см. определение 7), то этот пункт выполняется для всех видов s-смежности.

Заметим, что объекты категории $\mathbf{M}$ и $\mathbf{P}$-открытые морфизмы образуют подкатегорию категории $\mathbf{M}$, так как очевидно, что тождественные морфизмы и композиции $\mathbf{P}$-открытых морфизмов являются $\mathbf{P}$-открытыми морфизмами.

Иногда полезно рассмотреть определение $\mathbf{P}$-открытого морфизма категории $\mathbf{M}$ в терминах категории запятой $\mathbf{I} \downarrow Id_{\mathbf{M}}$. Морфизм $\mathsf{f} : \mathsf{M} \to \mathsf{M}'$ категории $\mathbf{M}$ называется $\mathbf{P}$-*открытым* тогда и только тогда, когда любой морфизм $(\mathsf{m}, \mathsf{f}) : (\mathsf{P}, \mathsf{p}, \mathsf{M}) \to (\mathsf{Q}, \mathsf{q}, \mathsf{M}')$ категории $\mathbf{I} \downarrow Id_{\mathbf{M}}$ разлагается в композицию морфизмов $(1_{\mathsf{Q}}, \mathsf{f})(\mathsf{m}, 1_{\mathsf{M}})$.

Пусть множество L фиксированно. Для определения открытого морфизма выберем в качестве основной категории — $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$, а в качестве ее подкатегории — $\mathbb{P}_L$.

Теорема 1. Пусть даны объекты M и M' категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$. Морфизм $\mathrm{f} = \langle f, 1_L \rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ $\mathbb{P}_L$-открыт тогда и только тогда, когда для любого кубического пути $P \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ верно:

а) если $f(P) \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} Q'$ в M', то $P \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} P'$ в M и $f(P') = Q'$;

б) если $f(P) \overset{s}{-\!\!-\!\!-} Q'$ в M', то $P \overset{s}{-\!\!-\!\!-} P'$ в M и $f(P') = Q'$[6].

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим, что морфизм $\mathrm{f} = \langle f, 1_L \rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ $\mathbb{P}_L$-открыт. Докажем условие а) (доказательство условия б) аналогично). Допустим, что $P \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ и $f(P) \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} Q'$ в M'. По лемме 3, существуют морфизмы $\pi = \langle \pi, 1_L \rangle : \bar{\Box}_{\dot{\mathrm{P}}} \to \mathrm{M}$ и $\pi' = \langle \pi', 1_L \rangle : \bar{\Box}_{\dot{\mathrm{Q}}'} \to \mathrm{M}'$ категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$. Зададим отображение $\mathrm{m} = \langle m, 1_L \rangle : \bar{\Box}_{\dot{\mathrm{P}}} \to \bar{\Box}_{\dot{\mathrm{Q}}'}$, положив $m(D^\Gamma_\Theta(\dot{p}_{[\hat{P}]})) = D^\Gamma_\Theta(\dot{p}_{[f(\hat{P})]})$ для всех индексов $(\Gamma, \Theta) \in A(\dim \dot{p}_{[\hat{P}]})$ и всех сужений $\hat{P}$ кубического пути P. Легко видеть, что m — морфизм подкатегории $\mathbb{P}_L$ и $\mathrm{f} \circ \pi = \pi' \circ \mathrm{m}$, по определению m. Поскольку f — $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм, существует морфизм $\mathrm{r} : \bar{\Box}_{\dot{\mathrm{Q}}'} \to \mathrm{M}$ категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ такой, что $\pi = \mathrm{r} \circ \mathrm{m}$ и $\pi' = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$. Следовательно, найдется кубический путь $r(\dot{Q}')$ в M. Используя конструкции $\dot{P}$ и $\dot{Q}'$ и тот факт, что $f(P) \xrightarrow{d^\alpha_\lambda} Q'$ в

[6] Аналогично сноске 5.

M', получаем $m(\dot{P}) \xrightarrow{\mathsf{d}^{\alpha}_{\lambda}} \dot{Q}'$ в $\bar{\square}_{\dot{\mathrm{Q}}'}$. Значит, $r(m(\dot{P})) \xrightarrow{d^{\alpha}_{\lambda}} r(\dot{Q}')$ в M, в силу леммы 4. Так как $\pi = \mathrm{r} \circ \mathrm{m}$ и $\pi' = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$, верно, что $P = \pi(\dot{P}) = r(m(\dot{P})) \xrightarrow{d^{\alpha}_{\lambda}} r(\dot{Q}')$ в M и $f(r(\dot{Q}')) = \pi'(\dot{Q}') = Q'$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathrm{f} = \langle f, 1_L \rangle : \ \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ — морфизм категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ и выполнены условия теоремы. Докажем, что f $\mathbb{P}_L$-открыт. Предположим, что найдутся морфизмы $\pi : \bar{\square} \to \mathrm{M}$, $\pi' : \bar{\square}' \to \mathrm{M}'$ категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ и морфизм $\mathrm{m} : \bar{\square} \to \bar{\square}'$ подкатегории $\mathbb{P}_L$ такие, что $\mathrm{f} \circ \pi = \pi' \circ \mathrm{m}$. Покажем, что существует морфизм $\mathrm{r} = \langle r, 1_L \rangle : \bar{\square}' \to \mathrm{M}$ категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ такой, что $\pi = \mathrm{r} \circ \mathrm{m}$ и $\pi' = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$. Рассмотрим доказательство случая, когда m — wi-шаг (доказательство случая, когда m — le-шаг, аналогично). Поскольку m — wi-шаг, найдутся $P \in \mathcal{CP}_{\max}(\bar{\square})$ и $Q \in \mathcal{CP}_{\max}(\bar{\square}')$ такие, что $m(P) \overset{s}{\longmapsto\!\!\!\!\mid} Q = q_0 \dots q_k$ в $\bar{\square}'$. Более того, имеем $\pi'(m(P)) \overset{s}{\longmapsto\!\!\!\!\mid} \pi'(Q)$ в M', в силу леммы 4. Так как $f(\pi(P)) = \pi'(m(P))$, получаем $\pi(P) \overset{s}{\longmapsto\!\!\!\!\mid} P' = p_0 \dots p_k$ в M и $f(P') = \pi'(Q)$, благодаря условиям этой теоремы. Определим отображение $\mathrm{r} = \langle r, 1_L \rangle : \bar{\square}' \to \mathrm{M}$, полагая $r(D^{\Gamma}_{\Theta}(q_s)) = D^{\Gamma}_{\Theta}(p_s)$ для всех $(\Gamma, \Theta) \in A(\dim q_s)$ и $0 \leq s \leq k$. Легко видеть, что r — морфизм категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$, удовлетворяющий равенствам $\pi = \mathrm{r} \circ \mathrm{m}$ и $\pi' = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$. Поскольку каждый морфизм подкатегории $\mathbb{P}_L$ есть композиция le- и wi-шагов, то, последовательно повторяя рассуждения из доказательства случаев, изложенных выше, получим общий случай. Следовательно, f — $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм. $\square$

Пусть M и M' — ПМ с самонепересекающимися полукубическими множествами M и M' соответственно. Учитывая замечания 4 и 5, определим понятие di-накрытия di-топологического пространства M' di-топологическим пространством M над кубическими путями.

Определение 9. *Di-накрытием* над кубическими путями называется di-отображение $f : M \to M'$, если верно:

а) для любых кубических путей $P \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ и $Q' \in \mathcal{CP}(\mathrm{M}')$ таких, что $f(P) \to Q'$, существует кубический путь $P' \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ такой, что $P \to P'$ и $f(P') = Q'$.

б) для любых кубического пути $P \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})$ и гомотопии $(f(P) = Q_0) \overset{s_1}{---} \cdots \overset{s_m}{---} Q_m$ существует гомотопия $(P = P_0) \overset{s_1}{---} \cdots \overset{s_m}{---} P_m$ такая, что $f(P_i) = Q_i$ для всех $1 \le i \le m$.

Тогда, используя утверждение 3, теорему 1 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 2. Пусть M и M' — объекты категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ с самонепересекающимися полукубическими множествами. Морфизм $\mathrm{f} = \langle f, 1_L \rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ $\mathbb{P}_L$-открыт тогда и только тогда, когда отображение f является di-накрытием над кубическими путями.

Рассмотрим снова произвольную категорию $\mathbf{M}$ и ее подкатегорию $\mathbf{P}$. В работе [30] было предложено использовать понятие $\mathbf{P}$-открытого морфизма для определения $\mathbf{P}$-эквивалентности на объектах категории $\mathbf{M}$.

Определение 10. Два объекта X и Y категории $\mathbf{M}$ называются $\mathbf{P}$-*эквивалентными*, если существует конструкция $\mathbf{P}$-открытых морфизмов $\mathsf{X} \xleftarrow{f} \mathsf{Z} \xrightarrow{f'} \mathsf{Y}$.

Пример 4. Сначала рассмотрим ПМ $\widetilde{\mathrm{M}} = (\widetilde{M}, \widetilde{i}_0, \widetilde{l})_L$ и $\widehat{\mathrm{M}} = (\widehat{M}, \widehat{i}_0, \widehat{l})_L$ из примера 3. Построим отображение $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widetilde{M}$ следующим образом: $\widehat{f}(\widehat{i}_0) = \widetilde{i}_0$, $\widehat{f}(\widehat{x}_i) = \widetilde{x}_i$ $(i = 1, 2)$, а также $\widehat{f}(\widehat{p}_i) = \widetilde{p}_i$ $(i = 1, \ldots, 17)$, $\widehat{f}(\widehat{p}'_{11}) = \widetilde{p}_{11}$, $\widehat{f}(\widehat{p}'_{12}) = \widetilde{p}_{12}$, $\widehat{f}(\widehat{p}''_{12}) = \widetilde{p}_{12}$. Нетрудно заметить, что $\widehat{\mathrm{f}} = (\widehat{f}, 1_L)$ — это морфизм в $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$. С другой стороны, используя теорему 1, приходим к выводу, что $\widehat{\mathrm{f}}$ не является $\mathbb{P}_L$-открытым морфизмом. Это вызвано тем, что существует кубический путь $\widehat{P} = \widehat{i}_0 \widehat{p}_5 \widehat{p}_6$ в $\widehat{\mathrm{M}}$ такой, что $\widehat{f}(\widehat{P})$ в $\widetilde{\mathrm{M}}$ может быть расширен по длине до кубического пути $\widetilde{P}' = \widetilde{i}_0 \widetilde{p}_5 \widetilde{p}_6 \widetilde{p}'_8$ с $\widetilde{l}(\widetilde{p}'_8) = c$. У кубического пути $\widehat{P}$ имеется единственное расширение по длине $\widehat{P}' = \widehat{i}_0 \widehat{p}_5 \widehat{p}_6 \widehat{p}_8$ на 1-куб, размеченный действием c, однако $\widehat{f}(\widehat{P}') \neq \widetilde{P}'$.

Далее, рассмотрим ПМ $\overline{\mathrm{M}} = (\overline{M}, \overline{i}_0, \overline{l})_L$, изображенное на рис. 1.3. Представим граничные функции так: $d_1^0(\overline{x}_1) = \overline{p}_1$, $d_2^1(\overline{x}_1) = \overline{p}_3$, $d_1^0(\overline{x}_2) = \overline{p}_9$, $d_2^1(\overline{x}_2) = \overline{p}_{16}$. Определим отображение $\overline{f}_1 : \overline{M} \to \widetilde{M}$ следующим образом: $\overline{f}_1(\overline{i}_0) = \widetilde{i}_0$, $\overline{f}_1(\overline{x}_i) =$

$\widetilde{x}_i$ $(i = 1, 2)$ и $\overline{f}_1(\overline{p}_i) = \widetilde{p}_i$ $(i = 1, \ldots, 17)$, $\overline{f}_1(\overline{p}'_8) = \widetilde{p}'_8$, $\overline{f}_1(\overline{p}'_i) = \widetilde{p}_i$ $(i = 11, 12)$, $\overline{f}_1(\overline{p}''_{12}) = \widetilde{p}_{12}$, $\overline{f}_1(\overline{p}'''_{12}) = \widetilde{p}'_{12}$. Нетрудно заметить, что $\overline{\mathrm{f}}_1 = (\overline{f}_1, 1_L)$ — морфизм и, кроме того, $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм в $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$, согласно теореме 1. Это обусловлено тем, что для всех $\overline{P} \in \mathcal{CP}(\overline{\mathrm{M}})$ справедливо следующее: если $\overline{f}_1(\overline{P})$ может быть расширен по длине до некоторого $\widetilde{P}$ в $\widetilde{\mathrm{M}}$, то $\overline{P}$ может быть расширен по длине до некоторого $\overline{P}'$ в $\overline{\mathrm{M}}$ и $\overline{f}_1(\overline{P}') = \widetilde{P}$, и если некоторый $\widetilde{P}$ является s-смежным к $\overline{f}_1(\overline{P})$ в $\widetilde{\mathrm{M}}$, то некоторый $\overline{P}'$ является s-смежным к $\overline{P}$ в $\overline{\mathrm{M}}$ и $\overline{f}_1(\overline{P}') = \widetilde{P}$. Чтобы убедиться в истинности этого утверждения, рассмотрим, например, кубический путь $\overline{P} = \overline{i}_0\overline{p}_5\overline{p}_6$ в $\overline{\mathrm{M}}$. Отметим, что $\overline{f}_1(\overline{P})$ может быть расширен по длине до $\widetilde{P} = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_5\widetilde{p}_6\widetilde{p}'_8$ в $\widetilde{\mathrm{M}}$, $\overline{P}$ может быть расширен по длине до $\overline{P}' = \overline{i}_0\overline{p}_5\overline{p}_6\overline{p}'_8$ в $\overline{\mathrm{M}}$ и $\overline{f}_1(\overline{P}') = \widetilde{P}$. Далее, рассмотрим кубический путь $\overline{P}'' = \overline{i}_0\overline{p}_5\overline{p}_6\overline{p}_7\overline{p}_4$ в $\overline{\mathrm{M}}$. Нетрудно установить, что $\widetilde{P}' = \widetilde{i}_0\widetilde{p}_5\widetilde{x}_1\widetilde{p}_7\widetilde{p}_4$ является 2-смежным к $\overline{f}_1(\overline{P}'')$ в $\widetilde{\mathrm{M}}$, $\overline{P}''' = \overline{i}_0\overline{p}_5\overline{x}_1\overline{p}_7\overline{p}_4$ является 2-смежным к $\overline{P}''$ в $\overline{\mathrm{M}}$ и $\overline{f}_1(\overline{P}''') = \widetilde{P}'$.

1.5. $Hom^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}_{\mathbb{P}}$-эквивалентность

В этом разделе определяется понятие еще одной категорной эквивалентности, введенной в работе [30].

Определение 11. Пусть $\mathbf{M}$ — некоторая категория, $\mathbf{P}$ — ее малая подкатегория и I — их общий начальный объект. Тогда

- два объекта X_1 и X_2 в $\mathbf{M}$ называются $Hom^{\mathbf{M}}_{\mathbf{P}}$*-эквивалентными*, если и только если существует множество $\mathcal{B}$ пар морфизмов $(\pi_1 : \mathsf{P} \to \mathsf{X}_1, \pi_2 : \mathsf{P} \to \mathsf{X}_2)$ категории $\mathbf{M}$ с общей областью определения P такое, что верно:

  (o) $(o_1 : \mathsf{I} \to \mathsf{X}_1, o_2 : \mathsf{I} \to \mathsf{X}_2) \in \mathcal{B}$, а также для всех $(\pi_1, \pi_2) \in \mathcal{B}$ и $m : \mathsf{P} \to \mathsf{Q}$ в $\mathbf{P}$ выполнено следующее:

  (a) если существует $\pi'_1 : \mathsf{Q} \to \mathsf{X}_1$ такой, что $\pi'_1 \circ m = \pi_1$, то существует $\pi'_2 : \mathsf{Q} \to \mathsf{X}_2$ такой, что $\pi'_2 \circ m = \pi_2$ и $(\pi'_1, \pi'_2) \in \mathcal{B}$;

(б) если существует $\pi_2' : \mathsf{Q} \to \mathsf{X}_2$ такой, что $\pi_2' \circ m = \pi_2$, то существует $\pi_1' : \mathsf{Q} \to \mathsf{X}_1$ такой, что $\pi_1' \circ m = \pi_1$ и $(\pi_1', \pi_2') \in \mathcal{B}$.

- Два объекта X_1 и X_2 в $\mathbf{M}$ являются *сильно $Hom_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}}$-эквивалентными*, если и только если они являются $Hom_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}}$-эквивалентными и множество $\mathcal{B}$ также удовлетворяет условию:

(в) если $(\pi_1' : \mathsf{Q} \to \mathsf{X}_1, \pi_2' : \mathsf{Q} \to \mathsf{X}_2) \in \mathcal{B}$ и существует $m : \mathsf{P} \to \mathsf{Q}$ в $\mathbf{P}$, то $(\pi_1' \circ m, \pi_2' \circ m) \in \mathcal{B}$.

Для полукубических множеств, когда в качестве $\mathbf{M}$ и $\mathbf{P}$ рассматриваются соответственно категория $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ и малая подкатегория $\mathbb{P}_L$ с их общим начальным объектом $\boxplus^0$, будем говорить о $Hom_{\mathbb{P}}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}$-эквивалентности.

1.6. $F_{\mathbb{P}}$-эквивалентность

Еще одна категорная эквивалентность основана на категории коалгебр, индуцированной эндофунктором категории индексированных множеств.

Начнем с определения понятий из работы [32]. Пусть $\mathbf{M}$ — локально малая категория с малой подкатегорией $\mathbf{P}$. Рассмотрим категорию $Set^{|\mathbf{P}|}$ $|\mathbf{P}|$-индексированных множеств, где $|\mathbf{P}|$ — множество объектов в $\mathbf{P}$. Определим эндофунктор $F_{\mathbf{P}} : Set^{|\mathbf{P}|} \longrightarrow Set^{|\mathbf{P}|}$ на объектах категории $Set^{|\mathbf{P}|}$ как отображение, действующее по правилу:

$$\{S_{\mathsf{P}}\}_{\mathsf{P}\in|\mathbf{P}|} \longmapsto \{\prod_{\mathsf{Q}\in|\mathbf{P}|} (\mathcal{P}(S_{\mathsf{Q}}))^{Hom_{\mathbf{P}}(\mathsf{P},\mathsf{Q})}\}_{\mathsf{P}\in|\mathbf{P}|},$$

где $\mathcal{P}(\cdot)$ — множество всех подмножеств, S_{P} — компонента $|\mathbf{P}|$-индексированного множества S для $\mathsf{P} \in |\mathbf{P}|$ и $Hom_{\mathbf{P}}(\mathsf{P}, \mathsf{Q})$ обозначает множество всех морфизмов из P в Q в категории $\mathbf{P}$. На морфизмах категории $Set^{|\mathbf{P}|}$ эндофунктор $F_{\mathbf{P}}$ действует следующим образом:

$$\{f_{\mathsf{P}} : S_{\mathsf{P}} \to S'_{\mathsf{P}}\}_{\mathsf{P}\in|\mathbf{P}|} \longmapsto \{\prod_{\mathsf{Q}\in|\mathbf{P}|} g_{\mathsf{Q}}^{\mathsf{P}} : \mathcal{P}(S_{\mathsf{Q}})^{Hom_{\mathbf{P}}(\mathsf{P},\mathsf{Q})} \to \mathcal{P}(S'_{\mathsf{Q}})^{Hom_{\mathbf{P}}(\mathsf{P},\mathsf{Q})}\}_{\mathsf{P}\in|\mathbf{P}|},$$

где $g^{\mathsf{P}}_{\mathsf{Q}} : u \longmapsto v$, $v(m) = \{f_{\mathsf{Q}}(x) \mid x \in u(m)\}$ для всех $m \in Hom_{\mathbf{P}}(\mathsf{P}, \mathsf{Q})$.

Коалгебра, индуцированная эндофунктором $F_{\mathbf{P}}$, или $F_{\mathbf{P}}$-*коалгебра* является парой (S, tr), где S — объект в $Set^{|\mathbf{P}|}$ и $tr : S \to F_{\mathbf{P}}(S)$ — морфизм в $Set^{|\mathbf{P}|}$, состоящий из семейства функций:

$$\{tr_{\mathsf{P}} : S_{\mathsf{P}} \to \prod_{\mathsf{Q} \in |\mathbf{P}|} (\mathcal{P}(S_{\mathsf{Q}}))^{Hom_{\mathbf{P}}(\mathsf{P},\mathsf{Q})}\}_{\mathsf{P} \in |\mathbf{P}|}.$$

Множество S называется *карьером* и функция tr — *коалгебраической структурой* $F_{\mathbf{P}}$-коалгебры. Морфизм $f : S \to S'$ категории $Set^{|\mathbf{P}|}$ называется *когомоморфизмом* между $F_{\mathbf{P}}$-коалгебрами (S, tr) и (S', tr'), если и только если $F_{\mathbf{P}}(f) \circ tr = tr' \circ f$. $F_{\mathbf{P}}$-коалгебры и когомоморфизмы между ними образуют категорию, обозначаемую как $\mathcal{CA}_{\mathbf{P}}$.

Далее, согласно [32], ослабим условия на когомоморфизмы. Морфизм $f : S \to S'$ в $Set^{|\mathbf{P}|}$ является *слабым когомоморфизмом* между (S, tr) и (S', tr'), если для каждого $s \in S_{\mathsf{P}}$ и $m \in Hom_{\mathbf{P}}(\mathsf{P}, \mathsf{Q})$ выполняется соотношение $f_{\mathsf{Q}}(tr_{\mathsf{P}}(s)(m)) \subseteq tr'_{\mathsf{P}}(f_{\mathsf{P}}(s))(m)$. $F_{\mathbf{P}}$-коалгебры и слабые когомоморфизмы формируют категорию, обозначаемую как $\mathcal{CA}^{lax}_{\mathbf{P}}$.

Обычно в теории коалгебр эквивалентность представляется следующим образом (см., например, работу [40]). Два объекта (S_1, tr_1) и (S_2, tr_2) категории $\mathcal{CA}^{lax}_{\mathbf{P}}$ *коалгебраически эквивалентны*, если существует конструкция из когомоморфизмов следующего вида: $(S_1, tr_1) \xleftarrow{f_1} (S, tr) \xrightarrow{f_2} (S_2, tr_2)$.

В нашем случае коалгебраическая эквивалентность может иметь явную формулировку. Для начала рассмотрим $F_{\mathbf{P}}$-коалгебру (S, tr). Обозначим через $m_1 \overset{m}{\to} m_2$ тройку $\langle m_1, m, m_2 \rangle$, где $m_1 \in S_{\mathsf{P}}$, $m_2 \in S_{\mathsf{Q}}$ и $m \in Hom_{\mathbf{P}}(\mathsf{P}, \mathsf{Q})$, удовлетворяющую $m_2 \in tr_{\mathsf{P}}(m_1)(m)$. $F_{\mathbf{P}}$-*эквивалентность* между двумя коалгебрами (S_1, tr_1) и (S_2, tr_2) есть $|\mathbf{P}|$-индексированное отношение $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_{\mathsf{P}}\}_{\mathsf{P} \in |\mathbf{P}|} \subseteq (S_1 \times S_2)$ такое, что если $(m_1, m_2) \in \mathcal{F}_{\mathsf{P}}$ и $m : \mathsf{P} \to \mathsf{Q}$ в $\mathbf{P}$, то

- если $m_1 \overset{m}{\to} m'_1$, то $m_2 \overset{m}{\to} m'_2$ и $(m'_1, m'_2) \in \mathcal{F}_{\mathsf{Q}}$ для некоторого $m'_2 \in S_2$,
- если $m_2 \overset{m}{\to} m'_2$, то $m_1 \overset{m}{\to} m'_1$ и $(m'_1, m'_2) \in \mathcal{F}_{\mathsf{Q}}$ для некоторого $m'_1 \in S_1$.

Для заданных категорий $\mathbf{M}$ и $\mathbf{P}$ определим функтор $\mathcal{B}eh_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \to \mathcal{CA}_{\mathbf{P}}^{lax}$. $\mathcal{B}eh_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}}$ сопоставляет объекту X из $\mathbf{M}$ $F_{\mathbf{P}}$-коалгебру, карьером которой является

$$\{Hom_{\mathbf{M}}(\mathsf{P}, \mathsf{X})\}_{\mathsf{P} \in |\mathbf{P}|},$$

а коалгебраической структурой —

$$\{tr_{\mathsf{P}} : m_1 \longmapsto \{x_{\mathsf{Q}} : m \longmapsto \{m_2 \mid m_1 = m_2 \circ m\}\}_{\mathsf{Q} \in |\mathbf{P}|}\}_{\mathsf{P} \in |\mathbf{P}|}.$$

$\mathcal{B}eh_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}}$ действует на морфизмах $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ в $\mathbf{M}$ следующим образом:

$$\mathcal{B}eh_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}}(f)_{\mathsf{P}} : Hom_{\mathbf{M}}(\mathsf{P}, \mathsf{X}) \to Hom_{\mathbf{M}}(\mathsf{P}, \mathsf{Y}) : \alpha \longmapsto (f \circ \alpha).$$

Утверждение 4. [32] Для любых двух объектов X и Y в $\mathbf{M}$ $|\mathbf{P}|$-индексированное отношение $\mathcal{F}$ является $Hom_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}}$-эквивалентностью между X и Y, если и только если $\mathcal{F}$ — $F_{\mathbf{P}}$-эквивалентность между $\mathcal{B}eh_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}}(\mathsf{X})$ и $\mathcal{B}eh_{\mathbf{P}}^{\mathbf{M}}(\mathsf{Y})$, содержащая пару $(o_{\mathsf{X}}, o_{\mathsf{Y}})$, где $o_{\mathsf{X}} : \mathsf{I} \to \mathsf{X}$ и $o_{\mathsf{Y}} : \mathsf{I} \to \mathsf{Y}$ — морфизмы категории $\mathbf{M}$ с областью определения — начальным объектом I.

Для полукубических множеств, когда в качестве $\mathbf{M}$ и $\mathbf{P}$ рассматриваются соответственно локально малая категория $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ и ее малая подкатегория $\mathbb{P}_L$ с их общим начальным объектом $\boxplus^0$, будем говорить о $F_{\mathbb{P}}$-эквивалентности.

1.7. Соотношения эквивалентностей на полукубических множествах

Сначала для ПМ установим совпадение сильной *path*-эквивалентности с $\mathbb{P}_L$-эквивалентностью, а также с наличием общей *di*-накрывающей над кубическими путями для самонепересекающихся ПМ.

Теорема 3. Для размеченных над одним и тем же множеством L действий ПМ M' и M'' следующие условия эквивалентны:

1. M' и M'' сильно *path*-эквивалентны;

2. M' и M'' $\mathbb{P}_L$-эквивалентны.

Доказательство. ($2 \Rightarrow 1$) Допустим, существует конструкция $\mathrm{M}' \xleftarrow{\mathrm{f}'} \mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{f}''} \mathrm{M}''$, где $\mathrm{f}' = \langle f', 1_L\rangle$ и $\mathrm{f}'' = \langle f'', 1_L\rangle$ — $\mathbb{P}_L$-открытые морфизмы категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$. Тогда легко показать, что отношение $\mathcal{R} = \{(f'(P),\ f''(P)) \mid P \in \mathcal{CP}(\mathrm{M})\}$ — сильная *path*-эквивалентность между M' и M'', в силу определения 7, леммы 4 и теоремы 1.

($1 \Rightarrow 2$) Пусть $\mathcal{R}$ — сильная *path*-эквивалентность между M' и M''. Для пары $(P,Q) \in \mathcal{R}$ определим множество $\langle P,Q\rangle = \{(P',Q') \mid (P = P_0) \overset{s_1}{---} \ldots \overset{s_m}{---} (P_m = P'),\ (Q = Q_0) \overset{s_1}{---} \ldots \overset{s_m}{---} (Q_m = Q'),\ (P_j,Q_j) \in \mathcal{R}\ (1 \le j \le m),\ m \ge 0$[7]$\}$. Зададим структуру $\langle \mathrm{M}', \mathrm{M}''\rangle = (M, i_0, l)_L$ следующим образом:

- $M_n = \{\langle P,Q\rangle \mid (P,Q) \in \mathcal{R},\ P \in \mathcal{CP}_p(\mathrm{M}'),\ \dim p = n\}$ и $\bar{d}^\alpha_\lambda(\langle P,Q\rangle) = \langle d^\alpha_\lambda(P), d^\alpha_\lambda(Q)\rangle$ для всех $\langle P,Q\rangle \in M_n$ $(n > 0)$;
- $i_0 = \langle i'_0, i''_0\rangle$;
- $l(\langle P,Q\rangle) = l'(p)$ для всех $\langle P,Q\rangle \in M_1$.

Покажем, что $\langle \mathrm{M}', \mathrm{M}''\rangle$ — ПМ.

Пусть $\langle P,Q\rangle \in M_{n+1}$ $(n \ge 0)$. Докажем, что $\bar{d}^0_\lambda(\langle P,Q\rangle) = \langle d^0_\lambda(P), d^0_\lambda(Q)\rangle \in M_n$. Предположим, что кубический путь $d^0_\lambda(P)$ был получен благодаря выполнению следующих соотношений: $(P = P_s) \overset{s}{\mapsto\!\!\rightarrow\!\!\leftarrow\!\!\dashv} P_{s+1} \overset{s+1}{\mapsto\!\!\rightarrow\!\!\leftarrow\!\!\dashv} \cdots \overset{k-1}{\mapsto\!\!\rightarrow\!\!\leftarrow\!\!\dashv} P_k$ и $d^0_\lambda(P) \xrightarrow{d^0_\lambda} P_k$. Тогда поскольку $(P,Q) \in \mathcal{R}$, кубические пути P и Q dl-связны и, значит, кубический путь $d^0_\lambda(Q)$ получается благодаря соотношениям: $(Q = Q_s) \overset{s}{\mapsto\!\!\rightarrow\!\!\leftarrow\!\!\dashv} Q_{s+1} \overset{s+1}{\mapsto\!\!\rightarrow\!\!\leftarrow\!\!\dashv} \cdots \overset{k-1}{\mapsto\!\!\rightarrow\!\!\leftarrow\!\!\dashv} Q_k$ и $d^0_\lambda(Q) \xrightarrow{d^0_\lambda} Q_k$. С другой стороны, так как $(P,Q) \in \mathcal{R}$, то существуют кубические пути $Q'_{s+1}, \ldots, Q'_k \in \mathcal{CP}(\mathrm{M}'')$ такие, что $(Q = Q_s) \overset{s}{\mapsto\!\!\rightarrow\!\!\leftarrow\!\!\dashv} Q'_{s+1} \overset{s+1}{\mapsto\!\!\rightarrow\!\!\leftarrow\!\!\dashv} \cdots \overset{k-1}{\mapsto\!\!\rightarrow\!\!\leftarrow\!\!\dashv} Q'_k$ и $(P_j, Q'_j) \in \mathcal{R}$ для всех $(s+1) \le j \le k$, по пункту 7 определения 6. В соответствии с леммой 1, верно, что $Q_j = Q'_j$ для всех $(s+1) \le j \le k$. Следовательно, $(P_k, Q_k) \in \mathcal{R}$. Используя пункт 5

[7] При $m = 0$ имеется в виду, что $(P,Q) \in \langle P,Q\rangle$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & d^0_\lambda(P) \arrow[dl, "d^0_\lambda"'] \arrow[dr, "d^1_{\mu-1}"] & \\
P \arrow[d, "d^1_\mu"'] & \overset{s}{\mapsto\leftarrow\!\!\dashv} & \ldots & \overset{k-1}{\mapsto\leftarrow\!\!\dashv} & P_k \arrow[d, "d^1_\mu"'] & & d^1_{\mu-1}(d^0_\lambda(P)) \arrow[d, "d^0_\lambda"] \\
d^1_\mu(P) & \overset{s}{\mapsto\leftarrow\!\!\dashv} & \ldots & \overset{k-1}{\mapsto\leftarrow\!\!\dashv} & d^1_\mu(P_k) & \overset{k}{\mapsto\leftarrow\!\!\dashv} & \bar{P}_{k+1}
\end{tikzcd}$$

Рис. 1.4. Диаграмма кубических путей в M'

определения 6, получаем $(d^0_\lambda(P),\ d^0_\lambda(Q)) \in \mathcal{R}$, т.е. $\bar{d}^0_\lambda(\langle P, Q\rangle) \in M_n$. Применяя пункт 1 определения 6 к паре $(P, Q) \in \mathcal{R}$, имеем $\bar{d}^1_\lambda(\langle P, Q\rangle) \in M_n$.

Теперь докажем, что для $\langle \mathrm{M}', \mathrm{M}''\rangle$ выполняются кубические законы, т.е. для всех $\langle P, Q\rangle \in M_{n+2}$ $(n \geq 0)$ выполняется равенство $\bar{d}^\alpha_\lambda(\bar{d}^\beta_\mu(\langle P, Q\rangle)) = \bar{d}^\beta_{\mu-1}(\bar{d}^\alpha_\lambda(\langle P, Q\rangle))$, если $1 \leq \lambda < \mu \leq (n+2)$ и $\alpha, \beta = 0, 1$. Проверим случай, когда $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ (проверка остальных случаев аналогична). Предположим, что кубический путь $d^0_\lambda(P)$ получен благодаря выполнению соотношений: $P \overset{s}{\mapsto\leftarrow\!\!\dashv} \cdot \overset{k-1}{\mapsto\leftarrow\!\!\dashv} P_k$ и $d^0_\lambda(P) \xrightarrow{d^0_\lambda} P_k$. Тогда, в силу справедливости кубических законов для p_k (последнего куба в P), верна диаграмма на рис. 1.4. С другой стороны, $d^1_\mu(P)$ — расширение по длине кубического пути P, т.е. $d^0_\lambda(d^1_\mu(P))$ получается благодаря соотношениям: $d^1_\mu(P) \overset{s}{\mapsto\leftarrow\!\!\dashv} \cdots \overset{k}{\mapsto\leftarrow\!\!\dashv} P_{k+1}$ и $d^0_\lambda(d^1_\mu(P)) \xrightarrow{d^0_\lambda} P_{k+1}$. В силу леммы 1, эта цепочка смежных кубических путей совпадает с нижней цепочкой на рис. 1.4, т.е. $P_{k+1} = \bar{P}_{k+1}$. Следовательно, $d^0_\lambda(d^1_\mu(P)) = d^1_{\mu-1}(d^0_\lambda(P))$. Аналогично, $d^0_\lambda(d^1_\mu(Q)) = d^1_{\mu-1}(d^0_\lambda(Q))$. Таким образом, $\bar{d}^0_\lambda(\bar{d}^1_\mu(\langle P, Q\rangle)) = \bar{d}^1_{\mu-1}(\bar{d}^0_\lambda(\langle P, Q\rangle))$. Итак, $\langle \mathrm{M}', \mathrm{M}''\rangle$ — ПМ.

Определим отображения

$$\langle pr_1, 1_L\rangle : \langle \mathrm{M}', \mathrm{M}''\rangle \to \mathrm{M}' \text{ и } \langle pr_2, 1_L\rangle : \langle \mathrm{M}', \mathrm{M}''\rangle \to \mathrm{M}''$$

следующим образом: $pr_1(\langle P, Q\rangle) = p$ и $pr_2(\langle P, Q\rangle) = q$ для всех $\langle P, Q\rangle \in M$, $P \in \mathcal{CP}_p(\mathrm{M}')$ и $Q \in \mathcal{CP}_q(\mathrm{M}'')$. Легко проверить, что $\langle pr_1, 1_L\rangle$ и $\langle pr_2, 1_L\rangle$ — морфизмы в категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$. Докажем, что морфизм $\langle pr_1, 1_L\rangle$ является $\mathbb{P}_L$-открытым (доказательство факта, что морфизм $\langle pr_2, 1_L\rangle$ $\mathbb{P}_L$-открыт аналогично). Возьмем произвольный кубический путь $O = o_0 \ldots o_k \in \mathcal{CP}(\langle \mathrm{M}',\ \mathrm{M}''\rangle)$. Тогда $pr_1(O) \in$

$\mathcal{CP}(\mathrm{M}')$ и $pr_2(O) \in \mathcal{CP}(\mathrm{M}'')$, по лемме 4. Пусть $pr_1(O) = p_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} p_1 \dots p_{k-1} \xrightarrow{d^{\alpha_k}_{\lambda_k}} p_k$ и $pr_2(O) = q_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} q_1 \dots q_{k-1} \xrightarrow{d^{\alpha_k}_{\lambda_k}} q_k$. Индукцией по числу кубов в кубическом пути O легко показать, что $o_s = \langle p_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} p_1 \dots p_{s-1} \xrightarrow{d^{\alpha_s}_{\lambda_s}} p_s, q_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} q_1 \dots q_{s-1} \xrightarrow{d^{\alpha_s}_{\lambda_s}} q_s\rangle$ для всех $0 \le s \le k$. Таким образом, $(pr_1(O), pr_2(O)) \in \mathcal{R}$, в силу конструирования $\langle \mathrm{M}', \mathrm{M}''\rangle$. Докажем, что для морфизма $\langle pr_1, 1_L\rangle$ выполняется пункт а) теоремы 1 (доказательство выполнения пункта б) той же теоремы аналогично). Допустим, $pr_1(O) \xrightarrow{d^{\alpha_{k+1}}_{\lambda_{k+1}}} P'$ для некоторого $P' \in \mathcal{CP}(\mathrm{M}')$. По пункту 1 определения 6, существует кубический путь $Q' \in \mathcal{CP}(\mathrm{M}'')$ такой, что $pr_2(O) \xrightarrow{d^{\alpha_{k+1}}_{\lambda_{k+1}}} Q'$ и $(P', Q') \in \mathcal{R}$. Положим $o_{k+1} = \langle P', Q'\rangle$. Тогда, в силу конструирования $\langle \mathrm{M}', \mathrm{M}''\rangle$, получаем $O' = o_0 \xrightarrow{d^{\alpha_1}_{\lambda_1}} o_1 \dots o_{k-1} \xrightarrow{d^{\alpha_k}_{\lambda_k}} o_k \xrightarrow{d^{\alpha_{k+1}}_{\lambda_{k+1}}} o_{k+1} \in \mathcal{CP}(\langle \mathrm{M}', \mathrm{M}''\rangle)$ и $O \xrightarrow{d^{\alpha_{k+1}}_{\lambda_{k+1}}} O'$. Ясно, что $pr_1(O') = P'$. $\square$

Теорема 4. Если M' и M'' — объекты категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ с самонепересекающимися полукубическими множествами, то следующие условия эквивалентны:

1. M' и M'' сильно *path*-эквивалентны;

2. M' и M'' $\mathbb{P}_L$-эквивалентны;

3. для M' и M'' существуют ПМ M с самонепересекающимся полукубическим множеством M и морфизмы $\mathrm{f}' : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ и $\mathrm{f}'' : \mathrm{M} \to \mathrm{M}''$ категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$, первые компоненты которых являются *di*-накрытиями.

Доказательство. То, что пункты 1 и 2 равносильны и из пункта 3 следует пункт 2, является следствием теорем 3 и 2 соответственно. Докажем, что пункты 1 и 2 повлекут пункт 3. Пусть $\mathcal{R}$ — сильная *path*-эквивалентность между M' и M''. Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 3, имеем конструкцию $\mathrm{M}' \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} \mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathrm{M}''$, где pr_1, pr_2 — $\mathbb{P}_L$-открытые морфизмы категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ и $\mathrm{M} = \langle \mathrm{M}', \mathrm{M}''\rangle$. Покажем, что M — самонепересекающееся ПМ. Проверим справедливость первого пункта определения самонепересекающегося ПМ (справедливость второго пункта проверяется аналогично). Пусть

$\langle P, Q\rangle \in M$, $P \in \mathcal{CP}_p(\mathrm{M}')$, $Q \in \mathcal{CP}_q(\mathrm{M}'')$ и $\bar{d}^{\alpha}_{\lambda}(\langle P, Q\rangle) = \bar{d}^{\beta}_{\mu}(\langle P, Q\rangle)$. Тогда $d^{\alpha}_{\lambda}(P) \overset{s_1}{---} \ldots \overset{s_m}{---} d^{\beta}_{\mu}(P)$ и $d^{\alpha}_{\lambda}(Q) \overset{s_1}{---} \ldots \overset{s_m}{---} d^{\beta}_{\mu}(Q)$. Следовательно, $d^{\alpha}_{\lambda}(p) = d^{\beta}_{\mu}(p)$ и $d^{\alpha}_{\lambda}(q) = d^{\beta}_{\mu}(q)$. Поскольку M' и M'' — самонепересекающиеся ПМ, имеем $\alpha = \beta$ и $\lambda = \mu$. Применяя теорему 2, получаем, что отображения pr_1 и pr_2 являются di-накрытиями. □

Пример 5. Как показано в примере 3, ПМ $\widetilde{\mathrm{M}}$ и $\widehat{\mathrm{M}}$, изображенные на рис. 1.3, сильно *path*-эквивалентны. Таким образом, они $\mathbb{P}_L$-эквивалентны, согласно теореме 3. Чтобы убедиться в этом, нам необходимо ПМ $\overline{\mathrm{M}}$ из примера 4. Определим отображение $\overline{f}_2 : \overline{M} \to \widehat{M}$ следующим образом: $\overline{f}_2(\bar{i}_0) = \widehat{i}_0$, $\overline{f}_2(\overline{x}_i) = \widehat{x}_i$ $(i = 1, 2)$ и $\overline{f}_2(\overline{p}_i) = \widehat{p}_i$ $(i = 1, \ldots, 17)$, $\overline{f}_2(\overline{p}'_8) = \widehat{p}_8$, $\overline{f}_2(\overline{p}'_i) = \widehat{p}'_i$ $(i = 11, 12)$, $\overline{f}_2(\overline{p}''_{12}) = \widehat{p}''_{12}$, $\overline{f}_2(\overline{p}'''_{12}) = \widehat{p}_{12}$. Нетрудно заметить, что $(\overline{f}_2, 1_L)$ — морфизм и, кроме того, $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм в $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$, согласно теореме 1. Используя $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм $(\overline{f}_1, 1_L) : \overline{\mathrm{M}} \to \widetilde{\mathrm{M}}$, введенный в примере 4, получим мост с общим объектом $\overline{\mathrm{M}}$ $\mathbb{P}_L$-открытых морфизмов $(\overline{f}_1, 1_L)$ и $(\overline{f}_2, 1_L)$.

Теорема 5. Два объекта в $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ являются (сильно) $Hom^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}_{\mathbb{P}}$-эквивалентными, если и только если они (сильно) *path*-эквивалентны.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{B}$ — (сильная) $Hom^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}_{\mathbb{P}}$-эквивалентность между ПМ M' и M''. Определим отношение $\mathcal{R} = \{(\pi_1(P), \pi_2(P)) \mid P \in \mathcal{CP}_{\max}(\square),\ (\pi_1 : \square \to \mathrm{M}', \pi_2 : \square \to \mathrm{M}'') \in \mathcal{B}\}$. Используя определение 7, леммы 3 и 4, нетрудно заметить, что $\mathcal{R}$ наследует все свойства, необходимые для (сильной) *path*-эквивалентности, из свойств отношения $\mathcal{B}$.

($\Leftarrow$) Пусть теперь $\mathcal{R}$ — (сильная) *path*-эквивалентность между M' и M''. Определим множество

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \{(\widetilde{P}, \widetilde{Q}) \mid\ \exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_j \text{ т.ч. } (d^1_{\lambda_1} \circ \cdots \circ d^1_{\lambda_j}(\widetilde{P}), d^1_{\lambda_1} \circ \cdots \circ d^1_{\lambda_j}(\widetilde{Q})) \in \mathcal{R}\}.$$

Нетрудно показать, что $\widetilde{\mathcal{R}}$ также удовлетворяет определению (сильной) *path*-эквивалентности между M' и M''. Построим $\mathcal{B} = \{(\pi_1 : \square \to \mathrm{M}', \pi_2 : \square \to \mathrm{M}'') \mid$

$(\pi_1(P), \pi_2(P)) \in \widetilde{\mathcal{R}}$ для некоторого $P \in \mathcal{CP}_{\max}(\Box)\}$. Покажем, что $\mathcal{B}$ — (сильная) $Hom_{\mathbb{P}}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}$-эквивалентность. Очевидно, что пара $(o_{\mathrm{M}'} : \boxplus^0 \to \mathrm{M}', o_{\mathrm{M}''} : \boxplus^0 \to \mathrm{M}'')$ принадлежит $\mathcal{B}$. Приведем очевидное

Предложение A. Пусть $\pi_1 : \Box \to \mathrm{M}'$, $\pi_2 : \Box \to \mathrm{M}''$ — морфизмы в $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ и $P, P' \in \mathcal{CP}_{\max}(\Box)$. Тогда из $(\pi_1(P), \pi_2(P)) \in \widetilde{\mathcal{R}}$ следует $(\pi_1(P'), \pi_2(P')) \in \widetilde{\mathcal{R}}$.

Теперь, покажем, что для $\mathcal{B}$ выполняется пункт (а) определения 11 (пункт (б) симметричен). Предположим, что $(\pi_1, \pi_2) \in \mathcal{B}$, $\mathrm{m} : \Box \to \Box'$ и $\pi_1' : \Box' \to \mathrm{M}'$ такие, что $\pi_1 = \pi_1' \circ \mathrm{m}$. Рассмотрим случай, когда m — le-шаг (оставшийся случай доказывается аналогично). Тогда имеем $m(P') \xrightarrow{\mathsf{d}_\lambda^\alpha} Q'$ в $\Box'$ для некоторых $P' \in \mathcal{CP}_{max}(\Box)$ и $Q' \in \mathcal{CP}_{max}(\Box')$. Следовательно, $\pi_1(P') = \pi_1'(m(P')) \xrightarrow{d_\lambda^\alpha} \pi_1'(Q')$ в M', согласно лемме 4. Поскольку $P, P' \in \mathcal{CP}_{\max}(\Box)$, получаем $(\pi_1(P'), \pi_2(P')) \in \widetilde{\mathcal{R}}$, по предложению A. Тогда $\pi_2(P') \xrightarrow{d_\lambda^\alpha} Q''$ для некоторого $Q'' \in \mathcal{CP}(\mathrm{M}'')$ и $(\pi_1'(Q'), Q'') \in \widetilde{\mathcal{R}}$, так как $\widetilde{\mathcal{R}}$ является (сильной) $path$-эквивалентностью. Предположим, что $Q' = q_0' \ldots q_k'$ и $Q'' = q_0'' \ldots q_k''$. Определим отображение $\pi_2' = \langle \pi_2', 1_L \rangle : \Box' \to \mathrm{M}''$, полагая $\pi_2'(D_\Theta^\Gamma(q_s')) = D_\Theta^\Gamma(q_s'')$, для всех $(\Gamma, \Theta) \in A(\dim q_s')$ и $0 \leq s \leq k$. Очевидно, π_2' — морфизм в $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ такой, что $\pi_2 = \pi_2' \circ \mathrm{m}$ и $(\pi_1', \pi_2') \in \mathcal{B}$.

Если $\widetilde{\mathcal{R}}$ — сильная $path$-эквивалентность, покажем, что для $\mathcal{B}$ выполняется пункт (в) определения 11. Допустим, $(\pi_1, \pi_2) \in \mathcal{B}$ и $\mathrm{m} : \Box' \to \Box$. Рассмотрим случай, когда m — wi-шаг (оставшийся случай аналогичен). Тогда имеем $m(Q') \overset{s}{\longleftrightarrow} P'$ в $\Box$ для некоторых $Q' \in \mathcal{CP}_{max}(\Box')$ и $P' \in \mathcal{CP}_{max}(\Box)$. Следовательно, $\pi_1(m(Q')) \overset{s}{\longleftrightarrow} \pi_1(P')$ в M' и $\pi_2(m(Q')) \overset{s}{\longleftrightarrow} \pi_2(P')$ в M'', в силу леммы 4. Так как $P, P' \in \mathcal{CP}_{\max}(\Box)$, то $(\pi_1(P'), \pi_2(P')) \in \widetilde{\mathcal{R}}$, согласно предложению A. Тогда $Q'' \overset{s}{\longleftrightarrow} \pi_2(P')$ для некоторого $Q'' \in \mathcal{CP}(\mathrm{M}'')$, а также $(\pi_1(m(Q')), Q'') \in \widetilde{\mathcal{R}}$, поскольку $\widetilde{\mathcal{R}}$ является сильной $path$-эквивалентностью. Согласно лемме 1, $Q'' = \pi_2(m(Q'))$. Таким образом, $(\pi_1 \circ \mathrm{m}, \pi_2 \circ \mathrm{m}) \in \mathcal{B}$. $\Box$

Из утверждения 4 имеем

Следствие 1. Для объектов M' и M'' в $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ их $Hom_{\mathbb{P}}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}$-эквивалентность совпадает с $F_{\mathbb{P}}$-эквивалентностью между объектами $\mathcal{B}eh_{\mathbb{P}_L}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L}(\mathrm{M}')$ и $\mathcal{B}eh_{\mathbb{P}_L}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L}(\mathrm{M}'')$ в

$\mathcal{CA}_{\mathbf{P}}^{lax}$, содержащей пару $(o_{\mathrm{M}'}, o_{\mathrm{M}''})$, где $o_{\mathrm{M}'} : \boxplus^0 \to \mathrm{M}'$ и $o_{\mathrm{M}''} : \boxplus^0 \to \mathrm{M}''$.

Пример 6. Построим $Hom_{\mathbb{P}}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}$-эквивалентность $\check{\mathcal{B}}$ между ПМ $\check{\mathrm{M}}$ и $\widetilde{\mathrm{M}}$, как указано в доказательстве теоремы 5. Согласно следствию 1, $\check{\mathcal{B}}$ — $F_{\mathbb{P}}$-эквивалентность между $\mathcal{B}eh_{\mathbb{P}_L}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L}(\check{\mathrm{M}})$ и $\mathcal{B}eh_{\mathbb{P}_L}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L}(\widetilde{\mathrm{M}})$, содержащая пару $(\mathrm{o}_{\check{\mathrm{M}}}, \mathrm{o}_{\widetilde{\mathrm{M}}})$. Продемонстрируем истинность этого факта. Функтор $\mathcal{B}eh_{\mathbb{P}_L}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L}$ сопоставляет ПМ M $F_{\mathbb{P}}$-коалгебру, карьером которой является

$$\left\{S_\square = \{\pi_{\mathrm{M}}^{\square} \in Hom_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L}(\square, \mathrm{M})\}\right\}_{\square \in |\mathbb{P}_L|},$$

а коалгебраической структурой —

$$\left\{tr_\square : \pi_{\mathrm{M}}^{\square} \longmapsto \{x_{\square'} : \mathrm{m} \longmapsto \{\pi_{\mathrm{M}}^{\square'} \in S_{\square'} \mid \pi_{\mathrm{M}}^{\square} = \pi_{\mathrm{M}}^{\square'} \circ \mathrm{m}\}\}_{\square' \in |\mathbb{P}_L|}\right\}_{\square \in |\mathbb{P}_L|}.$$

Рассмотрим произвольную пару $(\pi_{\check{\mathrm{M}}}^{\square}, \pi_{\widetilde{\mathrm{M}}}^{\square}) \in \check{\mathcal{B}}$. Предположим, что $\pi_{\check{\mathrm{M}}}^{\square} \xrightarrow{m} \pi_{\check{\mathrm{M}}}^{\square'}$, т.е. $\pi_{\check{\mathrm{M}}}^{\square'} \in tr_\square(\pi_{\check{\mathrm{M}}}^{\square})(\mathrm{m})$. Отсюда следует, что $\pi_{\check{\mathrm{M}}}^{\square} = \pi_{\check{\mathrm{M}}}^{\square'} \circ \mathrm{m}$. Так как $\check{\mathcal{B}}$ — $Hom_{\mathbb{P}}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}$-эквивалентность, существует $\pi_{\widetilde{\mathrm{M}}}^{\square'} : \square' \to \widetilde{\mathrm{M}}$ такой, что $\pi_{\widetilde{\mathrm{M}}}^{\square} = \pi_{\widetilde{\mathrm{M}}}^{\square'} \circ \mathrm{m}$ и $(\pi_{\check{\mathrm{M}}}^{\square'}, \pi_{\widetilde{\mathrm{M}}}^{\square'}) \in \check{\mathcal{B}}$. Тогда имеем $\pi_{\widetilde{\mathrm{M}}}^{\square'} \in tr_\square(\pi_{\widetilde{\mathrm{M}}}^{\square})(\mathrm{m})$, т.е. $\pi_{\widetilde{\mathrm{M}}}^{\square} \xrightarrow{\mathrm{m}} \pi_{\widetilde{\mathrm{M}}}^{\square'}$. Таким образом, $\check{\mathcal{B}}$ — $F_{\mathbb{P}}$-эквивалентность между $\mathcal{B}eh_{\mathbb{P}_L}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L}(\check{\mathrm{M}})$ и $\mathcal{B}eh_{\mathbb{P}_L}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L}(\widetilde{\mathrm{M}})$, содержащая пару $(\mathrm{o}_{\check{\mathrm{M}}}, \mathrm{o}_{\widetilde{\mathrm{M}}})$.

Из теорем 3, 5, утверждения 2 и следствия 1 имеем

Следствие 2. Для одномерных объектов M' и M'' в $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ их $\mathbb{P}_L$-эквивалентность, $Hom_{\mathbb{P}}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}$-эквивалентность, сильная $Hom_{\mathbb{P}}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}$-эквивалентность, сильная *path*-эквивалентность и *path*-эквивалентность совпадают с $F_{\mathbb{P}}$-эквивалентностью между $\mathcal{B}eh_{\mathbb{P}_L}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L}(\mathrm{M}')$ и $\mathcal{B}eh_{\mathbb{P}_L}^{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L}(\mathrm{M}'')$, содержащей пару $(o_{\mathrm{M}'}, o_{\mathrm{M}''})$.

Глава 2

Полукубические множества и полукубические пространства

2.1. Полукубические пространства

Полукубическое пространство, введенное в работе [20], является топологическим пространством, снабженным дифференциальной структурой, которая задана кубами, реализованными в данном пространстве, и семейством норм на касательном расслоении. Для формального определения полукубического пространства введем некоторые дополнительные понятия и обозначения.

Рассмотрим единичный куб размерности $n \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\square^n = \begin{cases} \{0\}, \text{ если } n = 0, \\ \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \ 0 \leq t_i \leq 1, \ 1 \leq i \leq n\}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пусть $\mathring{\square}^n$ обозначает топологическую внутренность $\square^n$. Считаем, что $\mathring{\square}^0 = \{0\}$.

Определим граничные отображения $\delta_\lambda^\alpha : \square^n \to \square^{n+1}$ ($\lambda \in \{1, \ldots, n+1\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$, $n \geq 0$) как непрерывные отображения, заданные следующим образом:

$$\delta_\lambda^\alpha(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_{\lambda-1}, \alpha, t_\lambda, \ldots, t_n).$$

Такие отображения удовлетворяют кубическим законам: $\delta_\lambda^\alpha \circ \delta_\mu^\beta = \delta_{\mu+1}^\beta \circ \delta_\lambda^\alpha$, если $\lambda \leq \mu$.

Рассмотрим компактно порожденное Хаусдорфово пространство[1] X. Определим куб как непрерывное отображение $x : \square^n \to X$, индуцирующее гомоморфизм $\mathring{\square}^n$ на его образ. Таким образом, отображение x наделяет множество

[1] *Компактно порожденным пространством* называется топологическое пространство X, удовлетворяющее следующему условию: каждое подмножество $U \subset X$, пересекающееся с каждым компактным подмножеством $K \subset X$ по замкнутому множеству, само замкнуто.

$x(\mathring{\square}^n)$ тривиальной структурой дифференцируемого многообразия [9]. Локальные координаты на многообразии $x(\mathring{\square}^n)$ $(n > 0)$ определяются стандартно: $(x(t_1, \ldots, t_n))_i = t_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Для корректного взятия границ куба потребуем замкнутости совокупности кубов относительно применения граничных отображений: для всех кубов $x : \square^n \to X$ $(n \geq 1)$ и всех $\lambda \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$ отображение $x \circ \delta_\lambda^\alpha : \square^{n-1} \to X$ также является кубом. В качестве примера рассмотрим квадрат $\square^2$, отрезок $\square^1$ и тор T, изображенные на рис. 2.1. Отображение x_2 непрерывно отображает квадрат $\square^2$ на тор T таким образом, что $x_2(\mathring{\square}^2)$ есть тор без малой окружности $x_2(0, t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ и большой окружности $x_2(t, 0)$ $(0 \leq t \leq 1)$, а отображение x_1 непрерывно отображает отрезок $\square^1$ на малую окружность тора T таким образом, что $x_1(\mathring{\square}^1)$ есть малая окружность без точки пересечения этих окружностей. Тогда $x_1 = x_2 \circ \delta_1^0$.

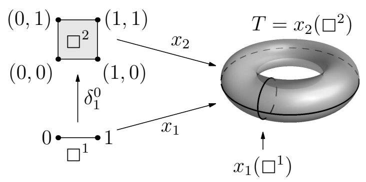


Рис. 2.1. Пример взятия границы куба

Разобьем совокупность кубов на множества вида X_n $(n \geq 0)$, содержащие только кубы с областью определения $\square^n$. Также потребуем, чтобы пространство X покрывалось всеми своими кубами, а именно, чтобы X было дизъюнктным объединением $\bigsqcup\limits_{x \in X_n,\ n \geq 0} x(\mathring{\square}^n)$. И наконец, зададим нормы $\| \cdot \|_u$ на касательных пространствах $T_u X =_{def} T_u x(\mathring{\square}^n)$ $(u \in x(\mathring{\square}^n))$ в каждой точке $u \in X$. Для согласованности с пространством норма $F(u, \dot{u}) = \| \, \dot{u} \, \|_u$ должна быть непрерывным отображением для всех $u \in X$ и $\dot{u} \in T_u X$.

Теперь формально определим понятие полукубического пространства.

Определение 12. *Полукубическое пространство* — это компактно порожденное Хаусдорфово пространство X вместе с его представлением кубами, т.е.

$X = \bigsqcup\limits_{x \in X_n,\ n \geq 0} x(\mathring{\Box}^n)$, где X_n состоит из непрерывных отображений $x : \Box^n \to X$, индуцирующих гомоморфизмы внутренности $\mathring{\Box}^n$ куба на его образы и таких, что $x \circ \delta^\alpha_\lambda \in X_{n-1}$ для всех $\alpha = 0, 1$, $1 \leq \lambda \leq n$ и $n > 0$, а также с семейством норм $\|\cdot\|_u$ на каждом касательном пространстве $T_u X =_{def} T_u x(\mathring{\Box}^n)$ $(u \in x(\mathring{\Box}^n))$ таким, что $F(u, \dot{u}) = \| \dot{u} \|_u$ — непрерывное отображение из касательного расслоения $TX =_{def} \bigsqcup\limits_{u \in X} T_u X$ с его естественной топологией[2] в полупрямую $\mathbb{R}^+$ с индуцированной топологией из $\mathbb{R}$.

Замечание 6. В отличие от полукубических множеств, полукубические пространства не только моделируют параллельные процессы, но и позволяют оценивать временную длительность их вычислений в пространстве X с помощью норм на касательном расслоении TX. Фактически, касательное пространство состоит из всевозможных "направлений" в точке u, а норма характеризует бесконечно малые длины вычисления в этой точке. Введем определение пути (символизирующего вычисление) в ПП как некоторой кривой между двумя точками из X. Непрерывное отображение $\gamma : [0, 1] \to X$ называется *путем* в ПП X, если существуют открытые интервалы $I_j = (\tau_{j-1}, \tau_j)$ и кубы $x_j \in X_{n_j}$ $(1 \leq j \leq m)$ такие, что $\tau_0 = 0$, $\tau_m = 1$ и для каждого $1 \leq j \leq m$ выполнены следующие условия: отображение $\gamma : I_j \to x_j(\mathring{\Box}^{n_j})$ не убывает по отношению к каждой координате куба x_j и отображение $x_j^{-1} \circ \gamma : I_j \to \mathring{\Box}^{n_j}$ дифференцируемо для всех $n_j > 0$. *Длина* пути γ (временная длительность вычисления) задается естественным образом: $length(\gamma) = \int\limits_0^1 \|\dot{\gamma}(s)\|_{\gamma(s)} ds$.

В силу непрерывности отображений $x : \Box^n \to X$ $(n \geq 0)$, для любого

[2] Пусть $\mathcal{B}_X$ — некоторая база топологии на X. Зададим множество $\mathcal{B}_{TX}$ следующим образом: $V \in \mathcal{B}_{TX}$ тогда и только тогда, когда $V = \bigsqcup\limits_{x \in X^U_n, n \geq 0} \theta_x^{-1}(W_x, B_x)$. Здесь $U \in \mathcal{B}_X$, $X^U_n = \{x \in X_n \mid U \cap x(\mathring{\Box}^n) \neq \emptyset\}$, $\theta_x : Tx(\mathring{\Box}^n) \to \mathring{\Box}^n \times \mathbb{R}^n$ — естественная биекция, определенная для любого $x \in X_n$, $W_x = x^{-1}(U \cap x(\mathring{\Box}^n))$ и B_x — произвольный открытый шар в $\mathbb{R}^n$, для которого выполнено равенство $B_x = pr_\lambda B_{\bar{x}}$ для всех $\bar{x} \in X^U_{n+1}$ таких, что $x = \bar{x} \circ \delta^\alpha_\lambda$, где $pr_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ — проекция, заданная равенством $pr_\lambda(t_1, \ldots, t_{n+1}) = (t_1, \ldots, \widehat{t_\lambda}, \ldots, t_{n+1})$ для всех $(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Легко проверить, что множество $\mathcal{B}_{TX}$ является базой топологии TX и не зависит от выбора базы $\mathcal{B}_X$.

полукубического пространства X верно: U открыто в $X \Rightarrow x^{-1}(U)$ открыто в $\square^n$[3] для всех $x \in X_n$ и $n \geq 0$.

Полукубическое пространство X называется:

- $\square$-*топологическим* пространством, если его топология определяется следующим образом: U открыто в $X \iff x^{-1}(U)$ открыто в $\square^n$ для всех $x \in X_n$ и $n \geq 0$;

- *самонепересекающимся*, если для всех кубов $x \in X_n$ $(n \geq 1)$ равенство $x \circ \delta^\alpha_\lambda = x \circ \delta^\beta_\mu$ влечет равенства $\alpha = \beta$ и $\lambda = \mu$;

- *невырожденным*, если $|\{x \circ \delta^\alpha_\lambda \in X_{n-1} \mid 1 \leq \lambda \leq n\}| = n$ для любого $\alpha = 0, 1$ и $n \geq 1$.

Замечание 7. Ясно, что $\square$-топологические пространства являются клеточными пространствами (CW-комплексами);

Замечание 8. Барицентрическое подразделение (в смысле работы [18]) любого невырожденного полукубического пространства является самонепересекающимся полукубическим пространством.

Пусть $n \geq 0$ и $0 \leq j \leq n$. Определим $(n-j)$-компоненту относительно индексов $(\Gamma, \Theta) \in A(j, n)$ куба $x \in X_n$ следующим образом:

$$x \circ \Delta^\Gamma_\Theta = \begin{cases} x, \text{ если } j = 0, \\ x \circ \delta^{\gamma_j}_{\theta_j} \circ \cdots \circ \delta^{\gamma_1}_{\theta_1}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

При этом $x \circ \Delta^\Gamma_\Theta$ называется *нижней компонентой* x, если $\Gamma = (0, \ldots, 0)$, и *верхней компонентой* x, если $\Gamma = (1, \ldots, 1)$. Пусть $x \circ \Delta = \bigcup\limits_{(\Gamma,\Theta) \in A(n)} x \circ \Delta^\Gamma_\Theta$.

Звездой куба $x \in X_n$ $(n \geq 0)$ называется множество кубов, чьей компонентой является x, т.е.

$$St(x, X) = \{y \in \bigcup_{n \geq 0} X_n \mid \ x \in y \circ \Delta\}.$$

---

[3] Топология на $\square^n \subseteq \mathbb{R}^n$ индуцируется стандартной топологией на $\mathbb{R}^n$.

Замечание 9. Если X — самонепересекающееся полукубическое пространство, то для любого $y \in St(x, X)$ существует единственная пара (Γ, Θ) такая, что $x = y \circ \Delta^{\Gamma}_{\Theta}$.

Поскольку X разбивается на кубы $x(\mathring{\square}^n)$, для каждой точки $u \in X$ найдется единственный куб x такой, что $u = x(t)$, где $t \in \mathring{\square}^n$. В этом случае x будем называть *носителем* точки u и обозначать как x_u.

Пусть $u \in X$, $\dim x_u = k$ и $u = x_u(\tau_1, \dots, \tau_k)$. Тогда ε-*звездой точки* $u \in X$ называется множество

$$St_\varepsilon(u, X) = \{v \in X \mid \ \dim y_v = n,\ v = y_v(t_1, \dots, t_n),\ x_u = y_v \circ \Delta^{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})}_{(\theta_1, \dots, \theta_{n-k})},$$

$$\forall\ 1 \leq i \leq n\ \exists 1 \leq j \leq n-k \text{ такое, что}$$

$$t_i \in \begin{cases} (0, \varepsilon),\ \text{если } i = \theta_j \text{ и } \gamma_j = 0; \\ (1-\varepsilon, 1),\ \text{если } i = \theta_j \text{ и } \gamma_j = 1; \\ (max(\tau_{i-j} - \varepsilon, 0), min(\tau_{i-j} + \varepsilon, 1)),\ \text{если } \theta_j < i < \theta_{j+1}\}. \end{cases}$$

Здесь считаем, что $\theta_0 = 0$ и $\theta_{n-k+1} = n + 1$.

Рассмотрим $\square$-топологическое пространство X. Совокупность

$$\{St_{\frac{2}{3}}(u, X) \mid x_u \in X_0\}$$

является покрытием пространства X. Определим отношение $\leq_u$ на множестве $St_{\frac{2}{3}}(u, X)$ следующим образом:

$$y(s) \leq_u z(\varsigma)\ \Leftrightarrow\ \exists r(t) \in St_{\frac{2}{3}}(u, X) \text{ т.ч. } y \circ \Delta^{(1,\dots,1)}_{\Theta_y} = r = z \circ \Delta^{(0,\dots,0)}_{\Theta_z},$$

$$s \leq \Delta^{(1,\dots,1)}_{\Theta_y}(t) \ \text{ и } \ \Delta^{(0,\dots,0)}_{\Theta_z}(t) \leq \varsigma,$$

где y, z, r — носители точек $y(s), z(\varsigma), r(t)$ соответственно.

Утверждение 5. Самонепересекающееся $\square$-топологическое пространство X вместе с классом эквивалентности атласов порядка, порожденным атласом порядка $\{(St_{\frac{2}{3}}(u, X), \leq_u) \mid x_u \in X_0\}$, является di-топологическим пространством.

Доказательство. Предположим, что X — самонепересекающееся $\square$-топологическое пространство. Рассмотрим точку $u \in X$ такую, что $x_u \in X_0$. Сначала покажем, что $\leq_u$ — частичный порядок на множестве $St_{\frac{2}{3}}(u, X)$. Рефлексивность $\leq_u$ очевидна. Перейдем к проверке антисимметричности. Пусть y и z — носители точек $y(s)$ и $z(\varsigma)$ соответственно. Предположим, что $y(s), z(\varsigma) \in St_{\frac{2}{3}}(u, X)$, $y(s) \leq_u z(\varsigma)$ и $z(\varsigma) \leq_u y(s)$. Это означает, что найдутся $r(t), \tilde{r}(\tilde{t}) \in St_{\frac{2}{3}}(u, X)$ такие, что

$$y \circ \Delta_{\Theta_y}^{(1,\ldots,1)} = r = z \circ \Delta_{\Theta_z}^{(0,\ldots,0)}, z \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}_z}^{(1,\ldots,1)} = \tilde{r} = y \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}_y}^{(0,\ldots,0)}, \tag{2.1}$$

$$s \leq \Delta_{\Theta_y}^{(1,\ldots,1)}(t),\ \Delta_{\Theta_z}^{(0,\ldots,0)}(t) \leq \varsigma,\ \varsigma \leq \Delta_{\widetilde{\Theta}_z}^{(1,\ldots,1)}(\tilde{t}) \text{ и } \Delta_{\widetilde{\Theta}_y}^{(0,\ldots,0)}(\tilde{t}) \leq s, \tag{2.2}$$

где r и $\tilde{r}$ — носители точек $r(t)$ и $\tilde{r}(\tilde{t})$ соответственно. Поскольку $r(t), \tilde{r}(\tilde{t}) \in St_{\frac{2}{3}}(u, X)$, существуют пары (Γ, Θ) и $(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Theta})$ такие, что

$$x_u = r \circ \Delta_{\Theta}^{\Gamma} = \tilde{r} \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}}^{\widetilde{\Gamma}}. \tag{2.3}$$

Используя формулы (2.1) и (2.3) и рассуждая так же, как в доказательстве утверждения 1, имеем $y = r = \tilde{r} = z$. Тогда формула (2.2) переписывается в виде

$$s \leq t \leq \varsigma \leq \tilde{t} \leq s. \tag{2.4}$$

Таким образом, $y(s) = z(\varsigma)$.

Проверим транзитивность $\leq_u$. Пусть y,z и w — носители точек $y(s)$,$z(\varsigma)$ и $w(\zeta)$ соответственно. Возьмем $y(s), z(\varsigma), w(\zeta) \in St_{\frac{2}{3}}(u, X)$ такие, что $y(s) \leq_u z(\varsigma)$ и $z(\varsigma) \leq_u w(\zeta)$. Это означает, что найдутся $r(t), \tilde{r}(\tilde{t}) \in St_{\frac{2}{3}}(u, X)$ такие, что

$$y \circ \Delta_{\Theta_y}^{(1,\ldots,1)} = r = z \circ \Delta_{\Theta_z}^{(0,\ldots,0)}, z \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}_z}^{(1,\ldots,1)} = \tilde{r} = w \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}_w}^{(0,\ldots,0)}, \tag{2.5}$$

$$s \leq \Delta_{\Theta_y}^{(1,\ldots,1)}(t),\ \Delta_{\Theta_z}^{(0,\ldots,0)}(t) \leq \varsigma,\ \varsigma \leq \Delta_{\widetilde{\Theta}_z}^{(1,\ldots,1)}(\tilde{t}) \text{ и } \Delta_{\widetilde{\Theta}_w}^{(0,\ldots,0)}(\tilde{t}) \leq \zeta, \tag{2.6}$$

где r и $\tilde{r}$ — носители точек $r(t)$ и $\tilde{r}(\tilde{t})$ соответственно. Поскольку $r(t), \tilde{r}(\tilde{t}) \in St_{\frac{2}{3}}(u, X)$, существуют пары (Γ, Θ) и $(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\Theta})$ такие, что

$$x_u = r \circ \Delta_{\Theta}^{\Gamma} = \tilde{r} \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}}^{\widetilde{\Gamma}}. \tag{2.7}$$

Используя формулы (2.5) и (2.7) и рассуждая так же, как в доказательстве утверждения 1, находим куб $a \in St(x_u, X)$ такой, что

$$r \circ \Delta_{\Theta'}^{(1,\dots,1)} = a = \tilde{r} \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}'}^{(0,\dots,0)}. \tag{2.8}$$

Далее, пусть $\dim a = m$, $\dim r = n$, $\dim \tilde{r} = \tilde{n}$ и $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{\tilde{n}})$. Положим $t^i = (t_{i_1}, \dots, t_{i_m}) \subseteq (t_1, \dots, t_n) = t$, где $t_{i_j} \in t^i \;\Leftrightarrow\; t_{i_j} \in t$ и $i_j \notin \Theta'$. Аналогично, положим $\tilde{t}^{\tilde{i}} = (\tilde{t}_{\tilde{i}_1}, \dots, \tilde{t}_{\tilde{i}_m}) \subseteq (\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{\tilde{n}}) = \tilde{t}$, где $\tilde{t}_{\tilde{i}_j} \in \tilde{t}^{\tilde{i}} \;\Leftrightarrow\; \tilde{t}_{\tilde{i}_j} \in \tilde{t}$ и $\tilde{i}_j \notin \widetilde{\Theta}'$. Учитывая формулу (2.6), имеем

$$\Delta_{\Theta_z}^{(0,\dots,0)}(\Delta_{\Theta'}^{(0,\dots,0)}(t^i)) \le \Delta_{\Theta_z}^{(0,\dots,0)}(t) \le \Delta_{\widetilde{\Theta}_z}^{(1,\dots,1)}(\tilde{t}) \le \Delta_{\widetilde{\Theta}_z}^{(1,\dots,1)}(\Delta_{\widetilde{\Theta}'}^{(1,\dots,1)}(\tilde{t}^{\tilde{i}})). \tag{2.9}$$

В силу формул (2.5) и (2.8), получаем равенство кубов $z \circ \Delta_{\Theta_z}^{(0,\dots,0)} \circ \Delta_{\Theta'}^{(1,\dots,1)} = z \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}_z}^{(1,\dots,1)} \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}'}^{(0,\dots,0)}$. По замечанию 9, $\Delta_{\Theta_z}^{(0,\dots,0)} \circ \Delta_{\Theta'}^{(1,\dots,1)} = \Delta_{\widetilde{\Theta}_z}^{(1,\dots,1)} \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}'}^{(0,\dots,0)}$. Значит, из формулы (2.9) следует $t^i \le \tilde{t}^{\tilde{i}}$, учитывая, что $\le$ — покоординатный порядок. В силу первого равенства формулы (2.8), конструкции $t^i \subseteq t$ и того, что $r(t) \in St_{\frac{2}{3}}(u, X)$ и $a \in St(x_u, X)$, имеем $a(t^i) \in St_{\frac{2}{3}}(u, X)$, по замечанию 9. Кроме того, используя формулы (2.8), (2.5) и (2.6), получаем соотношения

$$y \circ (\Delta_{\Theta_y}^{(1,\dots,1)} \circ \Delta_{\Theta'}^{(1,\dots,1)}) = a = w \circ (\Delta_{\widetilde{\Theta}_w}^{(0,\dots,0)} \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}'}^{(0,\dots,0)}),$$

$$s \le \Delta_{\Theta_y}^{(1,\dots,1)}(t) \le \Delta_{\Theta_y}^{(1,\dots,1)} \circ \Delta_{\Theta'}^{(1,\dots,1)}(t^i) \text{ и}$$

$$\Delta_{\widetilde{\Theta}_w}^{(0,\dots,0)} \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}'}^{(0,\dots,0)}(t^i) \le \Delta_{\widetilde{\Theta}_w}^{(0,\dots,0)} \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}'}^{(0,\dots,0)}(\tilde{t}^{\tilde{i}}) \le \Delta_{\widetilde{\Theta}_w}^{(0,\dots,0)}(\tilde{t}) \le \zeta.$$

Таким образом, $y(s) \le_u w(\zeta)$.

Поскольку X — $\square$-топологическое пространство, множество $St_{\frac{2}{3}}(u, X)$, очевидно, является открытым для любого $u \in X$ такого, что $x_u \in X_0$.

Рассмотрим произвольное $u \in X$ и докажем, что для любых $u_1, u_2 \in X$ таких, что $x_{u_1}, x_{u_2} \in X_0$, и любых $y(s), z(\varsigma) \in St_{\frac{1}{3}}(u, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_1, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_2, X)$ выполнено соотношение:

$$y(s) \le_{u_1} z(\varsigma) \;\Leftrightarrow\; y(s) \le_{u_2} z(\varsigma),$$

где y, z — носители точек $y(s), z(\varsigma)$ соответственно. Пусть $y(s) \le_{u_1} z(\varsigma)$, т.е. найдется $r(t) \in St_{\frac{2}{3}}(u_1, X)$ такой, что

$$y \circ \Delta_{\Theta_y}^{(1,\dots,1)} = r = z \circ \Delta_{\Theta_z}^{(0,\dots,0)}, \tag{2.10}$$

$$s \le \Delta_{\Theta_y}^{(1,\dots,1)}(t) \text{ и } \Delta_{\Theta_z}^{(0,\dots,0)}(t) \le \varsigma, \tag{2.11}$$

где r — носитель точки $r(t)$. Поскольку $r(t) \in St_{\frac{2}{3}}(u_1, X)$, найдется пара (Γ, Θ) такая, что

$$x_{u_1} = r \circ \Delta_{\Theta}^{\Gamma}. \tag{2.12}$$

Покажем, что $r(t) \in St_{\frac{2}{3}}(u_2, X)$. Тогда, учитывая формулы (2.10) и (2.11), получаем, что $y(s) \le_{u_2} z(\varsigma)$.

Лемма А. Если $y(s) \in St_{\frac{1}{3}}(u, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_1, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_2, X)$, то $x_{u_1}, x_{u_2} \in (x_u \circ \Delta)$.

Доказательство. Пусть $\dim x_u = k$ и $\dim y = l$. Предположим, что $x_u = y \circ \Delta_{\Theta_u}^{\Gamma_u}$, $x_{u_1} = y \circ \Delta_{(1,\dots,l)}^{\Gamma^1}$ и $x_{u_2} = y \circ \Delta_{(1,\dots,l)}^{\Gamma^2}$, где $\Gamma_u = (\gamma_1^u, \dots, \gamma_{l-k}^u)$, $\Theta_u = (\theta_1^u, \dots, \theta_{l-k}^u)$, $\Gamma^1 = (\gamma_1^1, \dots, \gamma_l^1)$ и $\Gamma^2 = (\gamma_1^2, \dots, \gamma_l^2)$. Положим $\widetilde{\Theta} = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_m)$ и $\widetilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m)$, где

$$\tilde{\theta}_i \in \widetilde{\Theta} \text{ и } \tilde{\gamma}_i \in \widetilde{\Gamma} \;\Leftrightarrow\; \gamma_{\tilde{\theta}_i}^1 = \gamma_{\tilde{\theta}_i}^2 \text{ для всех } 1 \le i \le m. \tag{2.13}$$

Тогда куб $c(u_1, u_2) = y \circ \Delta_{\widetilde{\Theta}}^{\widetilde{\Gamma}}$ есть компонента куба y такая, что x_u и x_v — ее компоненты. Докажем, что $c(u_1, u_2) \in (x_u \circ \Delta)$. Отсюда $x_{u_1}, x_{u_2} \in (c(u_1, u_2) \circ \Delta) \subseteq (x_u \circ \Delta)$.

Из $y(s) \in St_{\frac{1}{3}}(u, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_1, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_2, X) \subseteq St_{\frac{2}{3}}(u_1, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_2, X)$, следует, что для любого $1 \le i \le l$ верно:

$$s_i \in \begin{cases} (0, \frac{2}{3}), & \text{если } \gamma_i^1 = \gamma_i^2 = 0; \\ (\frac{1}{3}, 1), & \text{если } \gamma_i^1 = \gamma_i^2 = 1; \\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), & \text{если } \gamma_i^1 \ne \gamma_i^2. \end{cases}$$

Эти условия переписываются в виде

$$s_i \in \begin{cases} (0, \frac{2}{3}), & \text{если } i = \tilde{\theta}_j \text{ и } \tilde{\gamma}_j = 0; \\ (\frac{1}{3}, 1), & \text{если } i = \tilde{\theta}_j \text{ и } \tilde{\gamma}_j = 1; \\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), & \text{если } i \notin \widetilde{\Theta}, \end{cases}$$

учитывая формулу (2.13). Из $y(s) \in St_{\frac{1}{3}}(u, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_1, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_2, X)$ следует, что для всех $1 \le i \le l$ таких, что существуют $1 \le j \le l-k$ и $1 \le \tilde{j} \le m$, удовлетворяющие соотношениям $i = \theta^u_j = \tilde{\theta}_{\tilde{j}}$ и $\gamma^u_j \neq \tilde{\gamma}_{\tilde{j}}$, верно, что $s_i \in ((0, \frac{2}{3}) \cap (\frac{2}{3}, 1)) \cup ((\frac{1}{3}, 1) \cap (0, \frac{1}{3})) = \emptyset$. Таким образом, если $i = \theta^u_j = \tilde{\theta}_{\tilde{j}}$, то $\gamma^u_j = \tilde{\gamma}_{\tilde{j}}$. Аналогично, из $y(s) \in St_{\frac{1}{3}}(u, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_1, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_2, X)$, следует, что для всех $1 \le i \le l$ таких, что существует $1 \le j \le l-k$, удовлетворяющий соотношениям $i = \theta^u_j$ и $i \notin \widetilde{\Theta}$, верно, что $s_i \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cap ((0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1)) = \emptyset$. Таким образом, $\Theta_u \subseteq \widetilde{\Theta}$.

Следовательно, $c(u_1, u_2) = y \circ \Delta^{\widetilde{\Gamma}}_{\widetilde{\Theta}}$ является компонентой $x_u = y \circ \Delta^{\Gamma_u}_{\Theta_u}$. $\square$

Поскольку $y(s), z(\varsigma) \in St_{\frac{1}{3}}(u, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_1, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_2, X) \subseteq St_{\frac{1}{3}}(u, X)$, имеем $x_u \in (y \circ \Delta) \cap (z \circ \Delta)$. Используя лемму А, формулы (2.10) и (2.12) и рассуждая так же, как в доказательстве утверждения 1, находим $x_u \in (r \circ \Delta)$. Вновь применяя лемму А, получаем $x_{u_2} \in (r \circ \Delta)$.

Далее, пусть $\dim r = n$, $\dim y = l$, $\dim z = \nu$, $x_{u_2} = r \circ \Delta^{(\gamma^r_1, \dots, \gamma^r_n)}_{(1, \dots, n)}$, $x_{u_2} = y \circ \Delta^{(\gamma^y_1, \dots, \gamma^y_l)}_{(1, \dots, l)}$ и $x_{u_2} = z \circ \Delta^{(\gamma^z_1, \dots, \gamma^z_\nu)}_{(1, \dots, \nu)}$. Тогда, в силу формулы (2.10), имеем

$$y \circ \Delta^{(\gamma^y_1, \dots, \gamma^y_l)}_{(1, \dots, l)} = x_{u_2} = y \circ \Delta^{(1, \dots, 1)}_{\Theta_y} \circ \Delta^{(\gamma^r_1, \dots, \gamma^r_n)}_{(1, \dots, n)} \text{ и} \tag{2.14}$$

$$z \circ \Delta^{(\gamma^z_1, \dots, \gamma^z_\nu)}_{(1, \dots, \nu)} = x_{u_2} = z \circ \Delta^{(0, \dots, 0)}_{\Theta_z} \circ \Delta^{(\gamma^r_1, \dots, \gamma^r_n)}_{(1, \dots, n)}. \tag{2.15}$$

Положим $s^i = (s_{i_1}, \dots, s_{i_n}) \subseteq (s_1, \dots, s_l) = s$, где $s_{i_j} \in s^i \;\Leftrightarrow\; s_{i_j} \in s$ и $i_j \notin \Theta_y$. Аналогично, положим $\varsigma^{i'} = (\varsigma_{i'_1}, \dots, \varsigma_{i'_n}) \subseteq (\varsigma_1, \dots, \varsigma_\nu) = \varsigma$, где $\varsigma_{i'_j} \in \varsigma^{i'} \;\Leftrightarrow\; \varsigma_{i'_j} \in \varsigma$ и $i'_j \notin \Theta_z$. Тогда формула (2.11) переписывается в виде

$$\Delta^{(0, \dots, 0)}_{\Theta_y}(s^i) \le s \le \Delta^{(1, \dots, 1)}_{\Theta_y}(t) \text{ и } \Delta^{(0, \dots, 0)}_{\Theta_z}(t) \le \varsigma \le \Delta^{(1, \dots, 1)}_{\Theta_z}(\varsigma^{i'}). \tag{2.16}$$

Поскольку $\leq$ — покоординатный порядок, из формулы (2.16) следует

$$s^i \leq t \leq \varsigma^{i'}. \tag{2.17}$$

Так как $y(s), z(\varsigma) \in St_{\frac{1}{3}}(u, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_1, X) \cap St_{\frac{2}{3}}(u_2, X) \subseteq St_{\frac{2}{3}}(u_2, X)$, для всех $1 \leq i \leq l$ и $1 \leq j \leq \nu$ имеем

$$s_i \in \begin{cases} (0, \frac{2}{3}), & \text{если } \gamma_i^y = 0; \\ (\frac{1}{3}, 1), & \text{если } \gamma_i^y = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \varsigma_j \in \begin{cases} (0, \frac{2}{3}), & \text{если } \gamma_j^z = 0; \\ (\frac{1}{3}, 1), & \text{если } \gamma_j^z = 1. \end{cases}$$

Учитывая конструкции

$$s^i = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}) \subseteq (s_1, \ldots, s_l) = s \text{ и } \varsigma^{i'} = (\varsigma_{i'_1}, \ldots, \varsigma_{i'_n}) \subseteq (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_\nu) = \varsigma,$$

а также формулы (2.14), (2.15), получаем, что для всех $1 \leq j \leq n$ верно:

$$s_{i_j} \in \begin{cases} (0, \frac{2}{3}), & \text{если } \gamma_{i_j}^y = \gamma_j^r = 0; \\ (\frac{1}{3}, 1), & \text{если } \gamma_{i_j}^y = \gamma_j^r = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \varsigma_{i'_j} \in \begin{cases} (0, \frac{2}{3}), & \text{если } \gamma_{i'_j}^z = \gamma_j^r = 0; \\ (\frac{1}{3}, 1), & \text{если } \gamma_{i'_j}^z = \gamma_j^r = 1. \end{cases}$$

Следовательно, используя формулу (2.17), для всех $1 \leq j \leq n$ имеем

$$t_j \in \begin{cases} (0, \frac{2}{3}), & \text{если } \gamma_j^r = 0; \\ (\frac{1}{3}, 1), & \text{если } \gamma_j^r = 1. \end{cases}$$

Таким образом, $r(t) \in St_{\frac{2}{3}}(u_2, X)$. □

Теперь рассмотрим следующее

Определение 13. *(Размеченным над множеством L действий) полукубическим пространством (с отмеченной точкой)* (ПП) называется набор $\mathrm{X} = (X, i_0, l)_L$, где

- X — полукубическое пространство;
- i_0 — *отмеченная точка* пространства X, представимая в виде $i_0 = x(0)$ для некоторого отображения $x \in X_0$;

- $l : X_1 \to L$ — *размечающая функция*, действующая из 1-кубов пространства X в множество L действий и такая, что $l(x \circ \delta^0_\lambda) = l(x \circ \delta^1_\lambda)$ для всех $\lambda = 1, 2$ и $x \in X_2$.

Замечание 10. Расширение размечающей функции l на любой элемент $x \in X_n$ определяется следующим образом: $l(x) = \emptyset$, если $n = 0$, и $l(x) = (l_1(x), \ldots, l_n(x))$, если $n > 1$. Здесь $l_\lambda(x) = l(x \circ \delta^0_n \circ \cdots \circ \delta^0_{\lambda+1} \circ \delta^0_{\lambda-1} \circ \cdots \circ \delta^0_1(x))$ для всех $1 \leq \lambda \leq n$.

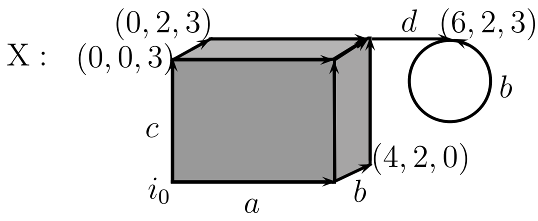


Рис. 2.2. Пример ПП X

Пример 7. Рассмотрим в качестве примера показанное на рис. 2.2 размеченное над множеством $L = \{a, b, c, d\}$ ПП $\mathrm{X} = (X,\ i_0,\ l)_L$. Полукубическое пространство $X = x(\square_3) \cup x_1(\square_1) \cup x_0(\square_1)$ порождено 3-кубом $x(t_1, t_2, t_3) = (4t_1, 2t_2, 3t_3)$ $((t_1, t_2, t_3) \in \square_3)$, 1-кубом $x_1(t) = (4 + 2t, 2, 3)$ $(t \in \square_1)$ и 1-кубом $x_0(t) = (6 - \sin(2\pi t), 2, 2 + \cos(2\pi t))$ $(t \in \square_1)$, которые изображены на рисунке как заполненный куб, отрезок и окружность соответственно. Норма индуцируется Евклидовой нормой в $\mathbb{R}^3$. Отмеченной точкой данного ПП является $i_0 = (0, 0, 0)$. Размечающая функция задана с помощью формул: $l_1(x) = a$, $l_2(x) = b$, $l_3(x) = c$, $l(x_1) = d$ и $l(x_0) = b$.

2.2. Категория $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$ и ее соотношение с категорией $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$

Сначала определим морфизм между двумя ПП, отображающий топологическое пространство и множество действий одного ПП в топологическое про-

$$
\begin{tikzcd}
\square^n \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "y"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y
\end{tikzcd}
$$

Рис. 2.3. Диаграмма, связывающая куб $x \in X_n$ с кубом $y \in Y_n$ через отображение f

странство и множество действий соответственно другого ПП и удовлетворяющий некоторым дополнительным требованиям.

Определение 14. Пусть $\mathrm{X} = (X,\, i_0^{\mathrm{X}},\, l^{\mathrm{X}})_{L^{\mathrm{X}}}$ и $\mathrm{Y} = (Y,\, i_0^{\mathrm{Y}},\, l^{\mathrm{Y}})_{L^{\mathrm{Y}}}$ — ПП. Отображение $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle$ (где $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, $\sigma : L^{\mathrm{X}} \to L^{\mathrm{Y}}$ — отображение множеств) называется *морфизмом* из X в Y тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1. $f(i_0^{\mathrm{X}}) = i_0^{\mathrm{Y}}$;

2. для любого отображения $x \in X_n$ $(n \geq 0)$ найдется отображение $y \in Y_n$ такое, что верно:

   а) диаграмма на рис. 2.3 коммутирует,

   б) $l^{\mathrm{Y}}(y) = \sigma(l^{\mathrm{X}}(x))$;

3. $\|d_u f(\dot{u})$[4]$\|_{f(u)} \leq \|\dot{u}\|_u$ для всех $\dot{u} \in T_u X$ и $u \in X$.

Первое условие в этом определении требует сохранения отмеченных точек при действии морфизма. Второе условие гарантирует, что морфизм отображает n-куб из X в n-куб из Y, обеспечивая согласованность их действий. Третье условие показывает, что df — нерастягивающее отображение, т.е. длина образа каждого пути в X не больше его собственной длины. Если в третьем условии

[4] В силу коммутативности диаграммы на рис. 2.3, дифференциал $df : TX \to TY$ отображения f задается следующим образом: для $u \in x(\mathring{\square}^n)$, $f(u) \in y(\mathring{\square}^n)$ и $\dot{u} \in T_u X$, $d_u f(\dot{u}) = \theta_y^{-1} \circ d(y^{-1} \circ f \circ x) \circ \theta_x(u, \dot{u}) = \theta_y^{-1} \circ \theta_x(u, \dot{u})$.

выполнено равенство $\|d_u f(\dot{u})\|_{f(u)} = \|\dot{u}\|_u$ для всех $\dot{u} \in T_u X$ и $u \in X$, то отображение df является изометрией, т.е. сохраняет длину каждого пути.

ПП и морфизмы между ними образуют категорию $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$, в которой композиция двух морфизмов $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ и $\mathrm{g} = \langle g, \varrho \rangle : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ есть морфизм $\mathrm{g} \circ \mathrm{f} = \langle g \circ f,\ \varrho \circ \sigma \rangle : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ и единичный морфизм — это пара тождественных отображений.

Рассмотрим некоторое вспомогательное свойство отображений между полукубическими пространствами.

Лемма 5. Пусть X и Y — полукубические пространства и $f : X \to Y$ — отображение, удовлетворяющее пункту 2a) определения 14. Если X — $\square$-топологическое пространство, то $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Более того, $df : TX \to TY$ также является непрерывным отображением.

Доказательство. Сначала покажем, что $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим произвольное открытое множество V в Y. Множество $y^{-1}(V)$ открыто в $\square^n$ для всех $y \in Y_n$ $(n \geq 0)$, поскольку любое отображение $y : \square^n \to Y$ непрерывно. В частности, множество $x^{-1} \circ f^{-1}(V)$ открыто в $\square^n$ для всех $x \in X_n$ $(n \geq 0)$. В силу того, что X является $\square$-топологическим пространством, $f^{-1}(V)$ открыто в X.

Теперь докажем, что $df : TX \to TY$ — непрерывное отображение. Пусть $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$ — некоторые базы топологий на X и Y соответственно и $\widetilde{V}$ — произвольное множество из базы $\mathcal{B}_{TY}$ топологии на TY, т.е. $\widetilde{V} = \bigsqcup\limits_{y \in Y_n^V, n \geq 0} \theta_y^{-1}(W_y, B_y)$, где $V \in \mathcal{B}_Y$, $W_y = y^{-1}(V \cap y(\mathring{\square}^n))$ и B_y — открытый шар в $\mathbb{R}^n$, при этом $y = \bar{y} \circ \delta_k^m$ влечет $B_y = pr_k B_{\bar{y}}$ (см. сноску 2). Нужно доказать, что $(df)^{-1}(\widetilde{V})$ — открытое множество в TX. Имеем

$$(df)^{-1}(\widetilde{V}) = \bigsqcup_{y \in Y_n^V, n \geq 0} (df)^{-1}(\theta_y^{-1}(W_y, B_y)) = \bigsqcup_{x \in \{x | f \circ x \in Y_n^V\}, n \geq 0} \theta_x^{-1}(W_{f \circ x}, B_{f \circ x}).$$

Поскольку $f : X \to Y$ — непрерывное отображение и $V \in \mathcal{B}_Y$, то $f^{-1}(V)$ — открытое множество в X, т.е., по определению базы топологии, оно представимо в виде $f^{-1}(V) = \cup_\alpha U_\alpha$, где $U_\alpha \in \mathcal{B}_X$. Легко проверить, что $(df)^{-1}(\widetilde{V}) = \cup_\alpha \widetilde{U}_\alpha$, где

$$\widetilde{U}_\alpha = \bigsqcup_{x_\alpha \in X_n^{U_\alpha}, n \geq 0} \theta_{x_\alpha}^{-1}(x_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap x_\alpha(\mathring{\square}^n)), B_{(f \circ x_\alpha)}) \in \mathcal{B}_{TX}.$$

Таким образом, $(df)^{-1}(\widetilde{V})$ — открытое множество в TX. $\square$

Замечание 11. Поскольку доказательство леммы 5 топологическое и не содержит рассуждений, зависящих от норм на касательных расслоениях пространств X и Y, формулировку леммы 5 можно усилить, потребовав, чтобы пространства X и Y удовлетворяли всем свойствам полукубических пространств, кроме наличия норм на касательных расслоениях.

Утверждение 6. Отображения $f : X \to Y$ в морфизмах $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ между ПП с самонепересекающимися $\square$-топологическими пространствами являются *di*-отображениями.

Доказательство. Следствие утверждения 5, пункта 2a) определения 14 и леммы 5. $\square$

Далее, с целью перенесения результатов теорем 1 и 3 (см. разделы 1.4 и 1.7 соответственно) на ПП строятся отображения между категориями $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$.

В своей диссертации [20] Губо указал на сопряженные функторы $\mathcal{T} : \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et} \to \mathfrak{pSpace}$ и $\mathcal{F}t : \mathfrak{pSpace} \to \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ между категориями $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и $\mathfrak{pSpace}$. Объекты категории $\mathfrak{pSpace}$ есть ПП (см. определение 13), а морфизмы — отображения, удовлетворяющие только пунктам 1 и 2 определения 14. Рассмотрим эти функторы в контексте категорий $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$.

Утверждение 7.

1. Определим отображение $\mathcal{T} : \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et} \to \mathfrak{pSpace}^{\leq}$ на объектах $(M, i_0^{\mathrm{M}}, l^{\mathrm{M}})_L$ следующим образом: $\mathcal{T}((M, i_0^{\mathrm{M}}, l^{\mathrm{M}})_L) = (X, i_0^{\mathrm{X}}, l^{\mathrm{X}})_L$, где

- $X = \bigsqcup\limits_{x \in M_n, n \geq 0} (x, \square^n)/\equiv$ с топологией фактор-пространства, индуцированной пространством $\bigsqcup\limits_{x \in M_n, n \geq 0} (x, \square^n)$ с топологией прямой суммы, где каждый $(x, \square^n)$ наследует стандартную топологию из $\mathbb{R}^n$. Здесь отношение эквивалентности $\equiv$ задается следующим образом: $(d_\lambda^\alpha(x), \square^{n-1}) \equiv (x, \delta_\lambda^\alpha(\square^{n-1}))$. Положим $X_n = \{(x, \cdot) : \square^n \to X \mid x \in M_n\}$, а также $\|\dot{u}\|_{(x,t)} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |u_i|$[5] для всех $\dot{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n = T_{(x,t)}(x, \mathring{\square}^n)$, $x \in M_n$ и $t \in \mathring{\square}^n$;
- $i_0^{\mathrm{X}} = (i_0^{\mathrm{M}}, \square^0)$;
- $l^{\mathrm{X}}(x, \cdot) = l^{\mathrm{M}}(x)$ для всех $x \in M_1$,

а на морфизмах $\langle f, \sigma \rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ с помощью формулы $\mathcal{T}(\langle f, \sigma \rangle) = \langle \bar{f}, \sigma \rangle$, где $\bar{f}(x, t) = (f(x), t)$ для всех точек (x, t) из $\mathcal{T}(\mathrm{M})$. Тогда $\mathcal{T}$ — функтор, обычно называемый функтором геометрической реализации.

2. Определим отображение $\mathcal{F}t : \mathfrak{pSpace}^{\leq} \to \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ на объектах $(X, i_0^{\mathrm{X}}, l^{\mathrm{X}})_L$ следующим образом: $\mathcal{F}t((X, i_0^{\mathrm{X}}, l^{\mathrm{X}})_L) = (M, i_0^{\mathrm{M}}, l^{\mathrm{M}})_L$, где

   - $M_n = X_n$ $(n \geq 0)$ и $d_\lambda^\alpha(x) = x \circ \delta_\lambda^\alpha$ для всех $x \in X_n$ $(n \geq 1)$;
   - $i_0^{\mathrm{M}} = x_0$, где $x_0(0) = i_0^{\mathrm{X}}$;
   - $l^{\mathrm{M}} = l^{\mathrm{X}}$,

   а на морфизмах $\langle f, \sigma \rangle : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ с помощью формулы $\mathcal{F}t(\langle f, \sigma \rangle) = \langle \check{f}, \sigma \rangle$, где $\check{f}(x) = f \circ x$ для всех кубов x из $\mathcal{F}t(\mathrm{X})$. Тогда $\mathcal{F}t$ — функтор, обычно называемый забывающим функтором.

Доказательство. Исходя из того, что морфизмы категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$ отличаются от морфизмов категории $\mathfrak{pSpace}$ только наличием пункта 3 определения 14, достаточно показать, что данный пункт выполняется для отображения

[5] Напомним, что эта норма называется Чебышевской.

$\langle \bar{f}, \sigma \rangle = \mathcal{T}(\langle f, \sigma \rangle)$ ($\langle f, \sigma \rangle$ — морфизм категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$). Это очевидно, поскольку неравенство $\|d_{(x,t)}\bar{f}(\dot{t})\|_{\bar{f}(x,t)} \leq \|\dot{t}\|_{(x,t)}$ превращается в тождество, так как векторы одни и те же и обе нормы — Чебышевские. $\square$

В отличие от работы [20], функторы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}t$ между категориями $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$ не являются сопряженными, поскольку условие на нормы ПП, лежащего в образе функтора $\mathcal{T}$, слишком строго и не всегда согласуется с пунктом 3 определения 14. Ослабим это условие, построив функторы между категорией запятой $\mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}} \downarrow \mathcal{F}t$ и категорией морфизмов $\overrightarrow{\mathfrak{pSpace}}^{\leq} = \mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}} \downarrow \mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}}$, что позволит доказать, что аналоги теорем 1 и 3 имеют место и для ПП.

Утверждение 8. 1. Определим отображение $\mathcal{G} : \mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}} \downarrow \mathcal{F}t \to \overrightarrow{\mathfrak{pSpace}}^{\leq}$ на объектах $(\mathrm{M}, \langle f, \sigma \rangle, \mathrm{Y})$ как функцию $\hat{\mathrm{f}} = \langle \hat{f}, \sigma \rangle : \mathcal{T}_{\mathrm{f},\mathrm{Y}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{Y}$, заданную формулой $\hat{f}(x,t) = f(x)(t)$ для всех точек (x,t) из $\mathcal{T}_{\mathrm{f},\mathrm{Y}}(\mathrm{M})$, где $\mathcal{T}_{\mathrm{f},\mathrm{Y}}(\mathrm{M}) = (X, i_0^{\mathrm{X}}, l^{\mathrm{X}})_L$ с X, i_0^{X} и l^{X}, определенными в пункте 1 утвеждения 7, и с нормой, определенной как $\|\cdot\|_{(x,t)}^{\mathcal{T}_{\mathrm{f},\mathrm{Y}}(\mathrm{M})} = \|d_{(x,t)}\hat{f}(\cdot)\|_{\hat{f}(x,t)}^{\mathrm{Y}}$ для всех $(x,t) \in X$, а на морфизмах $(\mathrm{g}, \mathrm{h}) = (\langle g, \sigma_g \rangle, \langle h, \sigma_h \rangle) : (\mathrm{M}, \mathrm{f}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{M}', \mathrm{f}', \mathrm{Y}')$ как пара функций $(\bar{\mathrm{g}}, \mathrm{h}) = (\langle \bar{g}, \sigma_g \rangle, \langle h, \sigma_h \rangle) : \hat{\mathrm{f}} \to \hat{\mathrm{f}}'$, где $\bar{g}(x,t) = (g(x), t)$ для всех точек (x,t) из $\mathcal{T}_{\mathrm{f},\mathrm{Y}}(\mathrm{M})$. Тогда $\mathcal{G}$ — функтор.

2. Функтор $\mathcal{F}t$ индуцирует отображение $\mathcal{F} : \overrightarrow{\mathfrak{pSpace}}^{\leq} \to \mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}} \downarrow \mathcal{F}t$, определенное на объектах как $\mathcal{F}(\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}) = (\mathcal{F}t(\mathrm{X}), \mathcal{F}t(\mathrm{f}), Y)$ и на морфизмах как $\mathcal{F}(g,h) = (\mathcal{F}t(g), h)$. Тогда $\mathcal{F}$ — функтор.

Доказательство. Будем доказывать справедливость только первого пункта, поскольку второй пункт очевиден. Проверим, что отображение $\hat{\mathrm{f}}$ — объект категории $\overrightarrow{\mathfrak{pSpace}}^{\leq}$.

Лемма B. X — $\square$-топологическое пространство.

Доказательство. Рассмотрим отображение $(x, \cdot) : \square^n \to X$ из X_n. Ясно, что оно совпадает с композицией отображений $\phi \circ \iota_x \circ \sigma_x$, где $\sigma_x : \square^n \to (x, \square^n)$

— тождественное отображение, $\iota_x : (x, \square^n) \to \bigsqcup_{x \in M_n, n \geq 0} (x, \square^n)$ — отображение включения и $\phi : \bigsqcup_{x \in M_n, n \geq 0} (x, \square^n) \to X$ — фактор-отображение. По определению соответствующих топологий,

$$\begin{aligned} U \text{ открыто в } X \;&\Leftrightarrow\; \phi^{-1}(U) \text{ открыто в } \bigsqcup_{x \in M_n, n \geq 0} (x, \square^n) \\ &\Leftrightarrow\; \iota_x^{-1}(\phi^{-1}(U)) \text{ открыто в } (x, \square^n)\ \forall x \in M_n\ (n \geq 0) \\ &\Leftrightarrow\; \sigma_x^{-1}(\iota_x^{-1}(\phi^{-1}(U))) \text{ открыто в } \square^n\ \forall x \in M_n\ (n \geq 0), \\ &\;\; \text{т.е. } (x, \cdot)^{-1}(U) \text{ открыто в } \square^n\ \forall (x, \cdot) \in X_n\ (n \geq 0). \end{aligned}$$

Следовательно, X — $\square$-топологическое пространство. $\square$

По определению отображения $\hat{f}$, пункт 2a) определения 14 также выполнен. Тогда, в силу леммы 5 и замечания 11, $\hat{f}$ — непрерывное отображение. Ясно, что отображение $\langle \hat{f}, \sigma \rangle : \mathcal{T}_{\mathrm{f,Y}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{Y}$ удовлетворяет остальным пунктам определения 14. Тем не менее, это отображение не может быть расценено как объект категории $\overrightarrow{\mathfrak{pSpace}}^{\leq}$, пока не доказано, что $\mathcal{T}_{\mathrm{f,Y}}(\mathrm{M})$ есть ПП. Для этого, в силу пункта 1 утверждения 7, достаточно показать, что норма $\|\cdot\|^{\mathcal{T}_{\mathrm{f,Y}}(\mathrm{M})}$ непрерывна на TX. В свете конструкции $\mathcal{T}_{\mathrm{f,Y}}(\mathrm{M})$ имеем, что $\|\cdot\|^{\mathcal{T}_{\mathrm{f,Y}}(\mathrm{M})} = \|\cdot\|^{\mathrm{Y}} \circ d\hat{f}$. По лемме 5, $d\hat{f}$ — также непрерывное отображение. Поскольку Y — полукубическое пространство, его норма $\|\cdot\|^{\mathrm{Y}}$ непрерывна. Значит, норма $\|\cdot\|^{\mathcal{T}_{\mathrm{f,Y}}(\mathrm{M})}$ как композиция непрерывных отображений также непрерывна. Таким образом, $\mathcal{T}_{\mathrm{f,Y}}(\mathrm{M})$ — объект категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$ и, значит, $\langle \hat{f}, \sigma \rangle : \mathcal{T}_{\mathrm{f,Y}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{Y}$ — объект категории $\overrightarrow{\mathfrak{pSpace}}^{\leq}$.

Пусть $(\mathrm{g}, \mathrm{h}) : (\mathrm{M}, \mathrm{f}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{M}', \mathrm{f}', \mathrm{Y}')$ — морфизм категории $\mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}} \downarrow \mathcal{F}t$, т.е. выполнено равенство $\mathrm{f}' \circ \mathrm{g} = \mathrm{h} \circ \mathrm{f}$. Тогда $\hat{f}' \circ \bar{g} = h \circ \hat{f}$. Благодаря последнему равенству, легко видеть, что не только $\bar{\mathrm{g}}$ — морфизм категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$, но и $(\bar{\mathrm{g}}, \mathrm{h})$ — морфизм категории $\overrightarrow{\mathfrak{pSpace}}^{\leq}$. $\square$

Утверждение 9. Функторы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются сопряженными, при этом коединица сопряжения $\varepsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \to \mathcal{I}d_{\mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}} \downarrow \mathcal{F}t}$ — естественный изоморфизм.

Доказательство. Для произвольного объекта $(\mathrm{M}, \mathrm{f}, \mathrm{Y})$ категории $\mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}} \downarrow \mathcal{F}t$ определим коединицу сопряжения ε следующим образом:

$$\varepsilon_{(\mathrm{M},\mathrm{f},\mathrm{Y})} = (\langle \varepsilon_{(M,f,Y)}, 1_L\rangle, 1_{\mathrm{Y}}) : (\mathcal{F}t(\mathcal{T}_{\mathrm{f},\mathrm{Y}}(\mathrm{M})),\ \mathcal{F}t(\hat{\mathrm{f}}), Y) \to (\mathrm{M}, \mathrm{f}, \mathrm{Y}),$$

где $\varepsilon_{(M,f,Y)}(x, \cdot) = x$ для всех кубов $(x, \cdot)$ из $\mathcal{F}t(\mathcal{T}_{\mathrm{f},\mathrm{Y}}(\mathrm{M}))$. Морфизм $\varepsilon^{-1}_{(\mathrm{M},\mathrm{f},\mathrm{Y})} = (\langle \varepsilon^{-1}_{(M,f,Y)}, 1_L\rangle,\ 1_{\mathrm{Y}})$ категории $\mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}} \downarrow \mathcal{F}t$, заданный как $\varepsilon^{-1}_{(M,f,Y)}(x) = (x, \cdot)$ для всех $x \in M$, делает ε естественным изоморфизмом.

Единица сопряжения $\eta : \mathcal{I}d_{\overrightarrow{\mathfrak{pSpace}^{\leq}}} \to \mathcal{GF}$ для произвольного объекта $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ категории $\overrightarrow{\mathfrak{pSpace}^{\leq}}$ определяется следующим образом: $\eta_{\mathrm{f}} = (\langle \eta_f, 1_L\rangle,$ $1_{\mathrm{Y}}) : (\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}) \to (\widehat{\mathcal{F}t(\mathrm{f})} : \mathcal{T}_{\mathcal{F}t(\mathrm{f}),\mathrm{Y}}(\mathcal{F}t(\mathrm{X})) \to \mathrm{Y})$, где $\eta_f(x(t)) = (x, t)$ для всех $x(t) \in X$. □

2.3. Полная подкатегория $\mathfrak{P}^{\leq}$ и ее соотношение с подкатегорией $\mathbb{P}$

Функтор $\mathcal{F}t$ позволяет забыть, что кубы из пространства X — непрерывные отображения, и тем самым дает возможность рассматривать такие кубы как элементы дискретного множества. Тогда определения кубического пути, его расширения/сужения, s-смежности, гомотопии и dl-связности для (дискретного) ПМ могут быть легко перенесены на (непрерывное) ПП, заменяя для куба p выражения вида $d^{\alpha}_{\lambda}(p)$ выражениями вида $p \circ \delta^{\alpha}_{\lambda}$. Если P — кубический путь в ПП X, будем использовать обозначение $P_{\mathcal{F}t}$ для соответствующего кубического пути в ПМ $\mathcal{F}t(\mathrm{X})$. Далее, $\mathcal{CP}(\mathrm{X})$ ($\mathcal{CP}_p(\mathrm{X})$) — множество всех кубических путей (заканчивающихся в кубе p) в ПП X. Точка u в ПП X называется *достижимой*, если найдется некоторый кубический путь $P \in \mathcal{CP}_p(\mathrm{X})$ и $u \in p(\mathring{\square}^n)$, где $p \in X_n$.

Замечание 12. В работе [16] было показано, что каждый di-путь γ в самонепересекающемся $\square$-топологическом пространстве порождает единственную последовательность кубов (носителей точек образа $\gamma([0, 1])$), где каждый предыдущий является нижней компонентой последующего или, наоборот, каждый последующий является верхней компонентой предыдущего, не являясь при этом равными кубами. Такую последовательность кубов будем называть *носителем* di-пути γ. Отметим, что класс кубических путей в ПП $\mathrm{X} = (X, i_0, l)_L$, где X — самонепересекающееся $\Box$-топологическое пространство, вкладывается в класс носителей di-путей γ в X таких, что $\gamma(0) = i_0$. Более того, если di-пути, чьими носителями являются кубические пути P и P', di-гомотопны в X, то P и P' гомотопны. И наоборот, если кубические пути P и P' гомотопны, то любые di-пути γ_1 и γ_2 такие, что их носителями являются P и P' и $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, di-гомотопны в X [16].

Предложение 3. Пусть $P = p_0p_1 \ldots p_{k-1}p_k$ — кубический путь в ПП $\mathrm{X} = (X, i_0, l)_L$. Тогда $\mathrm{X}' = (X', i_0, l|_{X'_1})_L$, где

$$X' = \bigsqcup_{x \in \bigcup\limits_{0 \le s \le k} ((p_s \circ \Delta) \cap X_n),\, n \ge 0} x(\mathring{\Box}^n) \subseteq X$$

имеет топологию и норму подмножества, является размеченным над L ПП и, более того, под-ПП ПП X. В этом случае говорим, что X' *имеет форму кубического пути* P в ПП X.

Для натурального числа N положим: если $N = 0$, то $\Box^{\mathrm{N}} = (\{0\}, (0), \emptyset)_L$, где полукубическое пространство, состоящее из одной точки, имеет норму $\|\cdot\| \equiv 0$; если $N > 0$, то $\Box^{\mathrm{N}} = (\Box^N, \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{N}, l)_L$, где топология

$$\Box^N = \bigsqcup_{\Delta^\Gamma_\Theta \in \Box^N_n,\ 0 \le n \le N} \Delta^\Gamma_\Theta(\mathring{\Box}^n) \quad \text{с} \quad \Box^N_n = \bigcup_{(\Gamma, \Theta) \in A(N-n, N)} \Delta^\Gamma_\Theta$$

индуцирована стандартной топологией $\mathbb{R}^N$, $\|\cdot\|$ — произвольная непрерывная норма на касательном расслоении $T\Box^N$ и l — произвольная размечающая функция, удовлетворяющая равенству $l(x \circ \delta^0_\lambda) = l(x \circ \delta^1_\lambda)$ для всех $1 \le \lambda \le 2$ и $x \in \Box^N_2$. Ясно, что $\Box^{\mathrm{N}}$ — ПП.

Путем-объектом называется ПП $\widetilde{\square}$, имеющее форму некоторого кубического пути $P \in \mathcal{CP}(\square^{\mathrm{N}})$ $(N \geq 0)$, согласованного[6] с $\square^N$. Будем использовать $\mathfrak{P}^{\leq}$ для обозначения полной подкатегории путей-объектов категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$. Если L — фиксированное множество, $\mathfrak{pSpace}^{\leq}_L$ — малая категория.

Рассмотрим следующие очевидные факты.

Лемма 6. Пусть $N \geq 0$. Тогда $\square^N$ — $\square$-топологическое пространство.

Лемма 7. Пусть $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ — морфизм категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$. Для любого кубического пути $P = p_0 \xrightarrow{\delta^{\alpha_1}_{\lambda_1}} \ldots \xrightarrow{\delta^{\alpha_k}_{\lambda_k}} p_k \in \mathcal{CP}(\mathrm{X})$ верно:

1. $f(P) = (f \circ p_0) \xrightarrow{\delta^{\alpha_1}_{\lambda_1}} \ldots \xrightarrow{\delta^{\alpha_k}_{\lambda_k}} (f \circ p_k) \in \mathcal{CP}(\mathrm{Y})$;
2. если $P \xrightarrow{\delta^{\alpha_{k+1}}_{\lambda_{k+1}}} P'$ в X, то $f(P) \xrightarrow{\delta^{\alpha_{k+1}}_{\lambda_{k+1}}} f(P')$ в Y;
3. если $P \overset{s}{---} P'$ в X, то $f(P) \overset{s}{---} f(P')$ в Y[7].

Установим некоторые взаимосвязи между объектами подкатегорий $\mathbb{P}$ и $\mathfrak{P}^{\leq}$.

Лемма 8. Пусть $\widetilde{\square}$ — объект категории $\mathfrak{P}^{\leq}$. Тогда существует объект $\bar{\widetilde{\square}}$ категории $\mathbb{P}$ такой, что отображение $\chi_{\widetilde{\square}} : \bar{\widetilde{\square}} \to \mathcal{F}t(\widetilde{\square})$ — изоморфизм категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\square}$ имеет форму кубического пути $\widetilde{P} = \tilde{p}_0 \xrightarrow{\delta^{\alpha_1}_{\lambda_1}} \tilde{p}_1 \ldots \tilde{p}_{k-1} \xrightarrow{\delta^{\alpha_k}_{\lambda_k}} \tilde{p}_k$ в размеченном над L ПП $\square^{\mathrm{N}}$. Любой куб в $\square^{\mathrm{N}}$ имеет вид Δ^{Γ}_{Θ} для некоторой пары $(\Gamma, \Theta) \in A(N)$. Считаем, что кубу $\tilde{p}_s$ соответствуют индексы (Γ_s, Θ_s) и $\dim \tilde{p}_s = n_s$ $(0 \leq s \leq k)$. Рассмотрим кубы $p_s = D^{\Gamma_s}_{\Theta_s}\underbrace{(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})}_{N}$ $(0 \leq s \leq k)$ в $\boxplus^N$. Определим $\bar{\widetilde{\square}}$ как ПМ, имеющее форму кубического пути

[6] Кубический путь $P \in \mathcal{CP}_p(\square^{\mathrm{N}})$ *согласован* с $\square^N$, если $N = 0$ или выполняется равенство $p \circ \Delta^{\Gamma}_{\Theta}(\mathring{\square}^0) = \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{N}$, где $\Gamma = \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{\dim p}$ и $\Theta = (1, \ldots, \dim p)$.

[7] Поскольку морфизм f сохраняет границы кубов (см. определение 14), то этот пункт выполняется для всех видов s-смежности.

$P = p_0 \xrightarrow{\mathsf{d}_{\lambda_1}^{\alpha_1}} p_1 \ldots p_{k-1} \xrightarrow{\mathsf{d}_{\lambda_k}^{\alpha_k}} p_k$ в размеченном над L ПМ $\boxplus^{\mathrm{N}}$ (поскольку согласованность $\widetilde{P}$ с $\square^N$ влечет согласованность P с $\boxplus^N$, размечающая функция $l^{\boxplus^{\mathrm{N}}}$ полностью определяется кубами p_s: $l^{\boxplus^{\mathrm{N}}}(p_s) = l^{\tilde{\square}}(\tilde{p}_s)$ для всех $1 \leq s \leq k$). Таким образом, $\bar{\tilde{\square}}$ — объект категории $\mathbb{P}$.

Построим отображение $\chi_{\tilde{\square}} = \langle \chi_{\tilde{\square}}, 1_L\rangle : \bar{\tilde{\square}} \to \mathcal{F}t(\tilde{\square})$ и обратное ему отображение $\chi_{\tilde{\square}}^{-1} = \langle \chi_{\tilde{\square}}^{-1}, 1_L\rangle$ с помощью формул $\chi_{\tilde{\square}}(D_\Theta^\Gamma(p_s)) = \tilde{p}_s \circ \Delta_\Theta^\Gamma$ и $\chi_{\tilde{\square}}^{-1}(\tilde{p}_s \circ \Delta_\Theta^\Gamma) = D_\Theta^\Gamma(p_s)$ для всех $(\Gamma, \Theta) \in A(n_s)$ и $0 \leq s \leq k$. Ясно, что эти отображения являются изоморфизмами категории p$\mathbb{S}$et. $\square$

Лемма 9. Пусть $\bar{\square}$ — объект категории $\mathbb{P}$ и $\pi = \langle \pi, \sigma\rangle : \bar{\square} \to \mathcal{F}t(\mathrm{X})$ — морфизм категории p$\mathbb{S}$et. Тогда существует объект $\bar{\tilde{\bar{\square}}}$ категории $\mathfrak{P}^{\leq}$ такой, что отображение $\zeta_{\bar{\square}} : \bar{\tilde{\bar{\square}}} \to \mathcal{T}_{\pi,\mathrm{X}}(\bar{\square})$ — изоморфизм категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$.

Доказательство. Пусть $\bar{\square}$ имеет форму кубического пути $P = p_0 \xrightarrow{\mathsf{d}_{\lambda_1}^{\alpha_1}} p_1 \ldots p_{k-1} \xrightarrow{\mathsf{d}_{\lambda_k}^{\alpha_k}} p_k$ в размеченном над L ПМ $\boxplus^{\mathrm{N}}$, $p_s = D_{\Theta_s}^{\Gamma_s}(\underbrace{\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}}_{N})$ для некоторых $(\Gamma_s, \Theta_s) \in A(N)$ и $\dim p_s = n_s$ $(0 \leq s \leq k)$. Рассмотрим кубы $\tilde{p}_s = \Delta_{\Theta_s}^{\Gamma_s}$ $(0 \leq s \leq k)$ в $\square^N$. Определим структуру $\bar{\tilde{\bar{\square}}} = (\tilde{\bar{\square}}, \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{N}, l^{\tilde{\bar{\square}}})_L$, где

- $\tilde{\bar{\square}} = \bigsqcup\limits_{x \in \tilde{\bar{\square}}_n, 0 \leq n \leq N} x(\mathring{\square}^n)$ $(\tilde{\bar{\square}}_n = (\bigcup\limits_{0 \leq s \leq k} \tilde{p}_s \circ \Delta) \cap \square_n^N)$ с $\|\cdot\|_u^{\tilde{\bar{\square}}} = \|d_u \zeta_{\bar{\square}}(\cdot)\|_{\zeta_{\bar{\square}}(u)}^{\mathcal{T}_{\pi,\mathrm{X}}(\bar{\square})}$, где $\zeta_{\bar{\square}}(u) = \zeta_{\bar{\square}}(\tilde{p}_s(\Delta_\Theta^\Gamma(t))) = (D_\Theta^\Gamma(p_s), t)$ для такого $t \in \mathring{\square}^n$, что $u = \tilde{p}_s(\Delta_\Theta^\Gamma(t))$ и всех $u \in \tilde{\bar{\square}}$;
- $l^{\tilde{\bar{\square}}}(\tilde{p}_s) = l^{\bar{\square}}(p_s)$ для всех $1 \leq s \leq k$.

Рассуждая так же, как в доказательстве пункта 1 утверждения 8, и учитывая лемму 6, получаем, что $\tilde{\bar{\square}}$ — полукубическое пространство. Более того, кубический путь $\widetilde{P} = \tilde{p}_0 \xrightarrow{\delta_{\lambda_1}^{\alpha_1}} \tilde{p}_1 \ldots \tilde{p}_{k-1} \xrightarrow{\delta_{\lambda_k}^{\alpha_k}} \tilde{p}_k$ согласован с $\square^N$ и $\bar{\tilde{\bar{\square}}}$ имеет форму $\widetilde{P}$ в размеченном над L ПП $\square^{\mathrm{N}}$ (норма $\|\cdot\|^{\square^{\mathrm{N}}}$ — произвольное непрерывное продолжение нормы $\|\cdot\|^{\tilde{\bar{\square}}}$ на касательное расслоение $T\square^N$, а размечающая функция

$l^{\square^{\mathrm{N}}}$ полностью определяется функцией $l^{\tilde{\bar{\square}}}$). Таким образом, $\tilde{\bar{\square}}$ — объект категории $\mathfrak{P}^{\leq}$.

Построим отображение, обратное отображению $\zeta_{\bar{\square}} = \langle \zeta_{\bar{\square}}, 1_L \rangle$, с помощью формулы $\zeta_{\bar{\square}}^{-1}(D_{\Theta}^{\Gamma}(p_s), t) = \tilde{p}_s(\Delta_{\Theta}^{\Gamma}(t))$ для всех $(D_{\Theta}^{\Gamma}(p_s), t)$ из $\mathcal{T}_{\pi,\mathrm{X}}(\bar{\square})$. Ясно, что оба отображения являются изоморфизмами категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}$. $\square$

Функторы вложения $\mathbb{I} : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и $\mathfrak{I} : \mathfrak{P}^{\leq} \hookrightarrow \mathfrak{pSpace}^{\leq}$ индуцируют фукторы вложения $\mathbb{I} \downarrow \mathcal{F}t \hookrightarrow \mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}} \downarrow \mathcal{F}t$ и $\mathfrak{I} \downarrow \mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}} \hookrightarrow \overrightarrow{\mathfrak{pSpace}}^{\leq}$.

Из лемм 8 и 9 следует

Утверждение 10. 1. Определим отображение $\widetilde{\mathcal{G}} : \mathbb{I} \downarrow \mathcal{F}t \to \mathfrak{I} \downarrow \mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}}$ на объектах как

$$\widetilde{\mathcal{G}}(\bar{\square}, \pi, \mathrm{X}) = (\tilde{\bar{\square}}, \hat{\pi} \circ \zeta_{\bar{\square}}, \mathrm{X})$$

и на морфизмах как

$$\widetilde{\mathcal{G}}((\mathrm{m}, \mathrm{f}) : (\bar{\square}, \pi, \mathrm{X}) \to (\bar{\square}', \pi', \mathrm{Y})) = (\zeta_{\bar{\square}'}, 1_{\mathrm{Y}})^{-1} \mathcal{G}(m, f)(\zeta_{\bar{\square}}, 1_{\mathrm{X}}).$$

Тогда $\widetilde{\mathcal{G}}$ — функтор.

2. Определим отображение $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathfrak{I} \downarrow \mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}} \to \mathbb{I} \downarrow \mathcal{F}t$ на объектах как

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{\square}, \pi, \mathrm{X}) = (\bar{\bar{\square}}, \mathcal{F}t(\pi) \circ \chi_{\tilde{\square}}, \mathrm{X})$$

и на морфизмах как

$$\widetilde{\mathcal{F}}((\mathrm{m}, \mathrm{f}) : (\tilde{\square}, \pi, \mathrm{X}) \to (\tilde{\square}', \pi', \mathrm{Y})) = (\chi_{\tilde{\square}'}, 1_{\mathrm{Y}})^{-1} \mathcal{F}(m, f)(\chi_{\tilde{\square}}, 1_{\mathrm{X}}).$$

Тогда $\widetilde{\mathcal{F}}$ — функтор.

Утверждение 11. Функторы $\widetilde{\mathcal{F}}$ и $\widetilde{\mathcal{G}}$ являются сопряженными, при этом коединица сопряжения $\tilde{\varepsilon} : \widetilde{\mathcal{F}}\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{I}d_{\mathbb{I}\downarrow\mathcal{F}t}$ — естественный изоморфизм.

Доказательство. Для произвольного объекта $(\bar{\square}, \pi, \mathrm{X})$ категории $\mathbb{I} \downarrow \mathcal{F}t$ определим коединицу сопряжения $\tilde{\varepsilon}$ равенством:

$$\tilde{\varepsilon}_{(\bar{\square},\pi,\mathrm{X})} = (\langle 1_{\bar{\square}}, 1_L \rangle, 1_{\mathrm{X}}) : (\bar{\tilde{\bar{\square}}}, \mathcal{F}t(\hat{\pi} \circ \zeta_{\bar{\square}}) \circ \chi_{\tilde{\bar{\square}}}, \mathrm{X}) \to (\bar{\square}, \pi, \mathrm{X}),$$

поскольку ПМ $\bar{\bar{\Box}}$ и $\bar{\Box}$ совпадают. Легко проверить, что $1_{\mathcal{F}t(\mathrm{X})} \circ \mathcal{F}t(\hat{\pi} \circ \zeta_{\bar{\Box}}) \circ \chi_{\tilde{\tilde{\Box}}} = \pi \circ \langle 1_{\bar{\Box}}, 1_L \rangle$. Тогда отображение $\tilde{\varepsilon}_{(\bar{\Box},\pi,\mathrm{X})}$ — морфизм категории $\mathbb{I} \downarrow \mathcal{F}t$. Ясно, что тождественное преобразование $\tilde{\varepsilon}$ является естественным изоморфизмом.

Единица сопряжения $\tilde{\eta} : \mathcal{I}d_{\mathfrak{I}\downarrow\mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}}} \to \widetilde{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{F}}$ для произвольного объекта $(\tilde{\Box}, \pi, \mathrm{X})$ категории $\mathfrak{I} \downarrow \mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}}$ определяется так:

$$\tilde{\eta}_{(\tilde{\Box},\pi,\mathrm{X})} = (\langle \eta_{(\tilde{\Box},\pi,X)}, 1_L \rangle,\ 1_{\mathrm{X}}) : (\tilde{\Box}, \pi, \mathrm{X}) \to (\tilde{\tilde{\tilde{\Box}}}, \mathcal{F}\mathrm{t}\widehat{(\pi) \circ} \chi_{\tilde{\tilde{\Box}}} \circ \zeta_{\tilde{\tilde{\Box}}}, \mathrm{X}),$$

где $\tilde{\eta}_{(\tilde{\Box},\pi,X)}(u) = u$ для всех $u \in \tilde{\Box}$, поскольку ПП $\tilde{\Box}$ и $\tilde{\tilde{\tilde{\Box}}}$ различаются только нормами. Равенство $\mathcal{F}t\widehat{(\pi) \circ} \chi_{\tilde{\tilde{\Box}}} \circ \zeta_{\tilde{\tilde{\Box}}} \circ \tilde{\eta}_{(\tilde{\Box},\pi,\mathrm{X})} = 1_{\mathrm{X}} \circ \pi$ не только делает отображение $\langle \tilde{\eta}_{(\tilde{\Box},\pi,X)}, 1_L \rangle$ морфизмом категории $\mathfrak{P}^{\leq}$, но и отображение $\tilde{\eta}_{(\tilde{\Box},\pi,\mathrm{X})}$ — морфизмом категории $\mathfrak{I} \downarrow \mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}}$. □

2.4. Сохранение открытых морфизмов и *di*-топологический критерий $\mathfrak{P}^{\leq}$-открытости

В этом разделе сначала показывается сохранение $\mathbb{P}_L$- и $\mathfrak{P}^{\leq}_L$-открытых морфизмов при действии функторов $\mathcal{F}t$ и $\mathcal{G}$, а затем дается критерий $\mathfrak{P}^{\leq}_L$-открытости морфизма категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}_L$, который для самонепересекающихся $\Box$-топологических пространств может быть переформулирован в терминах изометричного *di*-накрытия над кубическими путями.

Имея категорию $\mathfrak{pSpace}^{\leq}_L$ и сопутствующую подкатегорию $\mathfrak{P}^{\leq}_L$, можно говорить о $\mathfrak{P}^{\leq}_L$-открытых морфизмах и $\mathfrak{P}^{\leq}_L$-эквивалентности между объектами категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}_L$ (см. раздел 1.4).

Рассмотрим некоторые факты о сохранении открытых морфизмов.

Утверждение 12. 1. Морфизм $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}_L$ является $\mathfrak{P}^{\leq}_L$-открытым, если и только если $\mathcal{F}t(\mathrm{f})$ — $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ и $d_u f$ — изометрия для достижимых точек $u \in X$.

$$\begin{tikzcd} \bar{\Box} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{m}"'] & \mathcal{F}t(\mathrm{X}) \arrow[d, "\mathcal{F}t(\mathrm{f})"] \\ \bar{\Box}' \arrow[r, "\pi'"'] & \mathcal{F}t(\mathrm{Y}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{\bar{\Box}} \arrow[r, "\hat{\pi} \circ \zeta_{\bar{\Box}}"] \arrow[d, "\zeta^{-1}_{\bar{\Box}'} \bar{\mathrm{m}} \zeta_{\bar{\Box}}"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "1_{\mathrm{X}}"] \\ \tilde{\bar{\Box}}' \arrow[r, dashed, "\mathrm{r}"'] \arrow[d, "1_{\tilde{\bar{\Box}}'}"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "\mathrm{f}"] \\ \tilde{\bar{\Box}}' \arrow[r, "\hat{\pi}' \circ \zeta_{\bar{\Box}'}"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

Рис. 2.4. Диаграммы для морфизма $\mathcal{F}t(\mathrm{f})$ категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ и для морфизма f категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}_L$.

2. $\mathbb{P}_L$-открытость морфизма $\mathrm{f} : \mathrm{M} \to \mathcal{F}t(\mathrm{Y})$ категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ влечет $\mathfrak{P}^{\leq}_L$-открытость морфизма $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{f}, \mathrm{Y})$ категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}_L$.

Доказательство. Сначала докажем справедливость пункта 1.

($\Rightarrow$) Предположим, что диаграмма, показанная на рис. 2.4 слева, коммутирует, т.е. $(\mathrm{m}, \mathcal{F}t(\mathrm{f})) : (\bar{\Box}, \pi, \mathcal{F}t(\mathrm{X})) \to (\bar{\Box}', \pi', \mathcal{F}t(\mathrm{Y}))$ — морфизм категории $(\mathbb{I} \downarrow \mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}})_L$. В категории $(\mathbb{I} \downarrow \mathcal{F}t)_L$ этот морфизм примет вид $(\mathrm{m}, \mathrm{f}) : (\bar{\Box}, \pi, \mathrm{X}) \to (\bar{\Box}', \pi', \mathrm{Y})$. По утверждению 10, $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{m}, \mathrm{f}) = (\zeta^{-1}_{\bar{\Box}'} \bar{\mathrm{m}} \zeta_{\bar{\Box}}, \mathrm{f})$ — морфизм категории $(\mathfrak{I} \downarrow \mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}})_L$. Так как f — $\mathfrak{P}^{\leq}_L$-открытый морфизм категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}_L$, верно, что $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{m}, \mathrm{f}) = (1_{\tilde{\bar{\Box}}'}, \mathrm{f})(\zeta^{-1}_{\bar{\Box}'} \bar{\mathrm{m}} \zeta_{\bar{\Box}}, 1_{\mathrm{X}})$ (см. раздел 1.4). Поскольку, по утверждению 11, коединица сопряжения $\tilde{\varepsilon} : \widetilde{\mathcal{F}}\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{I}d_{\mathbb{I}\downarrow\mathcal{F}t}$ является естественным изоморфизмом, и более того, по построению, тождественным отображением, получаем, что $(\mathrm{m}, \mathrm{f}) = \widetilde{\mathcal{F}}\widetilde{\mathcal{G}}(\mathrm{m}, \mathrm{f}) = \widetilde{\mathcal{F}}(1_{\tilde{\bar{\Box}}'}, \mathrm{f})\widetilde{\mathcal{F}}(\zeta^{-1}_{\bar{\Box}'} \bar{\mathrm{m}} \zeta_{\bar{\Box}}, 1_{\mathrm{X}}) = (1_{\tilde{\bar{\Box}}'}, \mathrm{f})(\chi^{-1}_{\tilde{\bar{\Box}}'} \mathcal{F}(\zeta^{-1}_{\bar{\Box}'} \bar{\mathrm{m}} \zeta_{\bar{\Box}}) \chi_{\tilde{\bar{\Box}}}, 1_{\mathrm{X}}) = (1_{\bar{\Box}'}, \mathrm{f})(\mathrm{m}, 1_{\mathrm{X}})$ в категории $(\mathbb{I} \downarrow \mathcal{F}t)_L$. Таким образом, в категории $(\mathbb{I} \downarrow \mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}})_L$ имеет место равенство $(\mathrm{m}, \mathcal{F}\mathrm{t}(\mathrm{f})) = (1_{\bar{\Box}'}, \mathcal{F}t(f))(\mathrm{m}, 1_{\mathcal{F}t(\mathrm{X})})$, т.е. $\mathcal{F}t(\mathrm{f})$ — $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм.

Заметим, что для любой достижимой точки $u \in X$ верно, что $u = r(v)$ для некоторого морфизма $\mathrm{r} = \langle r, 1_L \rangle : \tilde{\bar{\Box}}' \to \mathrm{X}$ из диаграммы, показанной на рис. 2.4 справа, и некоторой точки $v \in \tilde{\bar{\Box}}'$. Тогда для любого вектора $\dot{u} \in T_u X$ найдется вектор $\dot{v} \in T_v \tilde{\bar{\Box}}'$ такой, что $\dot{u} = d_v r(\dot{v})$. Следовательно, имеет место соотношение $\|\dot{u}\|^{\mathrm{X}}_u = \|d_v r(\dot{v})\|^{\mathrm{X}}_{r(v)} \leq \|\dot{v}\|^{\tilde{\bar{\Box}}'}_v = \|d_v(\hat{\pi}' \circ \zeta_{\bar{\Box}'})(\dot{v})\|^{\mathrm{Y}}_{\hat{\pi}'(\zeta_{\bar{\Box}'}(v))} = \|d_v(f \circ r)(\dot{v}))\|^{\mathrm{Y}}_{f(r(v))} \leq \|d_v r(\dot{v})\|^{\mathrm{X}}_{r(v)} = \|\dot{u}\|^{\mathrm{X}}_u$. Таким образом, $d_u f$ — изометрия.

($\Leftarrow$) Схема доказательства аналогична выше приведенной и использует существование единицы сопряжения $\tilde{\eta} : \mathcal{I}d_{\mathfrak{I}\downarrow\mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}}} \to \widetilde{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{F}}$.

Пункт 2 легко доказывается, следуя рассуждениям выше приведенного доказатальства с применением того факта, что коединица сопряжения $\varepsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \to \mathcal{I}d_{\mathcal{I}d_{\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}}\downarrow\mathcal{F}t}$ является естественным изоморфизмом, по утверждению 9 и в силу существования единицы сопряжения $\tilde{\eta} : \mathcal{I}d_{\mathfrak{I}\downarrow\mathcal{I}d_{\mathfrak{pSpace}^{\leq}}} \to \widetilde{\mathcal{G}}\widetilde{\mathcal{F}}$. $\square$

Теорема 6. В категории $\mathfrak{pSpace}_L^{\leq}$ морфизм $\mathrm{f} = \langle f, 1_L \rangle : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ $\mathfrak{P}_L^{\leq}$-открыт тогда и только тогда, когда для любого кубического пути $P \in \mathcal{CP}(\mathrm{X})$ выполняются следующие условия:

1. если $f(P) \xrightarrow{\delta_\lambda^\alpha} Q'$ в Y, то $P \xrightarrow{\delta_\lambda^\alpha} P'$ в X и $f(P') = Q'$;

2. если $f(P) \overset{s}{\text{———}} Q'$ в Y, то $P \overset{s}{\text{———}} P'$ в X и $f(P') = Q'$[8];

3. $d_u f$ — изометрия для всех достижимых точек $u \in X$.

Доказательство. Следует из теоремы 1 и пункта 1 утверждения 12. $\square$

Пусть X и Y — ПП с самонепересекающимися $\square$-топологическими пространствами X и Y соответственно. Учитывая замечание 12, определим понятие *di*-накрытия *di*-топологического пространства Y *di*-топологическим пространством X над кубическими путями.

Определение 15. *Di*-отображение $f : X \to Y$ называется *di-накрытием* над кубическими путями, если верно:

а) для любых кубических путей $P \in \mathcal{CP}(\mathrm{X})$ и $Q' \in \mathcal{CP}(\mathrm{Y})$ таких, что $f(P) \to Q'$, существует кубический путь $P' \in \mathcal{CP}(\mathrm{X})$ такой, что $P \to P'$ и $f(P') = Q'$.

б) для любых кубического пути $P \in \mathcal{CP}(\mathrm{X})$ и гомотопии $(f(P) = Q_0) \overset{s_1}{\text{———}} \cdots \overset{s_m}{\text{———}} Q_m$ существует гомотопия $(P = P_0) \overset{s_1}{\text{———}} \cdots \overset{s_m}{\text{———}} P_m$ такая, что $f(P_i) = Q_i$ для всех $1 \leq i \leq m$.

[8] Аналогично сноске 7.

Тогда, используя утверждение 6, теорему 6 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 7. Пусть X и Y — ПП с самонепересекающимися $\square$-топологическими пространствами X и Y. Морфизм $\mathrm{f} = \langle f, 1_L \rangle : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ категории $\mathfrak{pSpace}_L^{\leq}$ $\mathfrak{P}_L^{\leq}$-открыт тогда и только тогда, когда отображение f является изометричным di-накрытием над кубическими путями.

2.5. $Path$-эквивалентность полукубических пространств и ее совпадение с $\mathfrak{P}^{\leq}$-эквивалентностью

Введем понятие сильной *path*-эквивалентности между полукубическими пространствами. Как будет показано ниже, эта эквивалентность на ПП совпадает с $\mathfrak{P}_L^{\leq}$-эквивалентностью, а также в случае самонепересекающихся $\square$-топологических пространств может быть охарактеризована с помощью наличия общего изометричного di-накрывающего пространства.

Определение 16. Пусть X и Y — размеченные над множеством L ПП.

Кубические пути $P = p_0 \dots p_k$ в X и $Q = q_0 \dots q_k$ в Y называются *изометричными* в том и только в том случае, когда для любого $1 \leq s \leq k$ справедливо: $\|d_t p_s(\dot{t})\|^{\mathrm{X}}_{p_s(t)} = \|d_t q_s(\dot{t})\|^{\mathrm{Y}}_{q_s(t)}$ для всех $\dot{t} \in T_t \mathring{\square}^{n_s}$ и $t \in \mathring{\square}^{n_s}$, где $n_s = \dim p_s$.

ПП X и Y называются *сильно path-эквивалентными* тогда и только тогда, когда существует бинарное отношение $\mathcal{R}$ на кубических путях в X и Y такое, что выполнены следующие условия:

(0) $(i_0^{\mathrm{X}}, i_0^{\mathrm{Y}}) \in \mathcal{R}$ и для любой пары $(P, Q) \in \mathcal{R}$ верно, что P и Q изометричны, dl-связны, а также справедливо:

(1) если $P \xrightarrow{\delta_\lambda^\alpha} P'$ в X, то $Q \xrightarrow{\delta_\lambda^\alpha} Q'$ в Y и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(2) если $Q \xrightarrow{\delta_\lambda^\alpha} Q'$ в Y, то $P \xrightarrow{\delta_\lambda^\alpha} P'$ в X и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(3) если $P' \xrightarrow{\delta_\lambda^\alpha} P$ в X, то $Q' \xrightarrow{\delta_\lambda^\alpha} Q$ в Y и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(4) если $Q' \xrightarrow{\delta_\lambda^\alpha} Q$ в Y, то $P' \xrightarrow{\delta_\lambda^\alpha} P$ в X и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(5) если $P \overset{s}{---} P'$ в X, то $Q \overset{s}{---} Q'$ в Y и $(P', Q') \in \mathcal{R}$;

(6) если $Q \overset{s}{---} Q'$ в Y, то $P \overset{s}{---} P'$ в X и $(P', Q') \in \mathcal{R}$.

Ясно, что сильная *path*-эквивалентность на ПП является отношением эквивалентности. Покажем, что эта эквивалентность может быть построена из сильной *path*-эквивалентности на ПМ.

Лемма 10. Отношение $\mathcal{R}$ является сильной *path*-эквивалентностью между ПП X и Y тогда и только тогда, когда отношение $\mathcal{R}_{\mathcal{F}t} = \{(P_{\mathcal{F}t}, Q_{\mathcal{F}t}) \mid (P, Q) \in \mathcal{R}\}$ есть сильная *path*-эквивалентность между ПМ $\mathcal{F}t(\mathrm{X})$ и $\mathcal{F}t(\mathrm{Y})$ и, кроме того, для любых пар $(P, Q) \in \mathcal{R}$ кубические пути P и Q изометричны.

Доказательство. Очевидно. $\square$

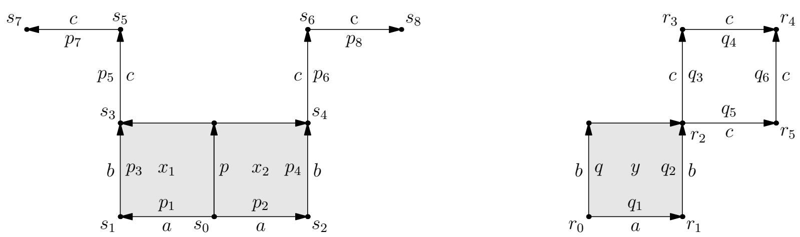


Рис. 2.5. Примеры ПП

Пример 8. Слева на рис. 2.5 показано графическое представление ПП $\mathrm{X} = (X = x_1(\square_2) \cup x_2(\square_2) \cup p_5(\square_1) \cup p_6(\square_1) \cup p_7(\square_1) \cup p_8(\square_1),\ i_0^{\mathrm{X}},\ l^{\mathrm{X}})_L$, размеченного над множеством $L = \{a, b, c\}$ действий. Пространство X порождено 2-кубами: $x_1(t_1, t_2) = (-t_1, t_2)$, $x_2(t_1, t_2) = (t_1, t_2)$ $((t_1, t_2) \in \square_2)$, и 1-кубами: $p_5(t) = (-1, 1+t)$, $p_7(t) = (-1-t, 2)$, $p_6(t) = (1, 1+t)$ и $p_8(t) = (1+t, 2)$ $(t \in \square_1)$, и имеет топологию подпространства $\mathbb{R}^2$. Норма $\|\cdot\|_u^{\mathrm{X}}$ $(u \in X)$ индуцируется Евклидовой нормой из $\mathbb{R}^2$. Отмеченной точкой является $i_0^{\mathrm{X}} = s_0 = (0, 0)$. Размечающая функция l^{X} задана следующими равенствами: $l_2^{\mathrm{X}}(x_1) = a$, $l_1^{\mathrm{X}}(x_1) = b$,

$l_2^{\mathrm{X}}(x_2) = a$, $l^{\mathrm{X}}(p_5) = l^{\mathrm{X}}(p_6) = l^{\mathrm{X}}(p_7) = l^{\mathrm{X}}(p_8) = c$. Для заданного $1 \leq \varepsilon \leq 2$ определим ПП $\mathrm{Y}_\varepsilon = (Y_\varepsilon = y(\Box_2) \cup q_3(\Box_1) \cup q_4(\Box_1) \cup q_5(\Box_1) \cup q_6(\Box_1)$, $i_0^{\mathrm{Y}_\varepsilon}$, $l^{\mathrm{Y}_\varepsilon})_L$, графическое представление которого изображено на рис. 2.5 справа. Пространство Y_ε порождено 2-кубом $y(t_1, t_2) = (t_1, \varepsilon t_2)$ $((t_1, t_2) \in \Box_2)$ и 1-кубами: $q_3(t) = (1, \varepsilon + t)$, $q_4(t) = (1 + t, 1 + \varepsilon)$, $q_5(t) = (1 + t, \varepsilon)$ и $q_6(t) = (2, \varepsilon + t)$ $(t \in \Box_1)$, и имеет топологию подпространства $\mathbb{R}^2$. Норма $\| \cdot \|_v^{\mathrm{Y}_\varepsilon}$ $(v \in Y_\varepsilon)$ индуцируется Евклидовой нормой пространства $\mathbb{R}^2$. Отмеченной точкой является $i_0^{\mathrm{Y}_\varepsilon} = r_0 = (0, 0)$. Размечающая функция $l^{\mathrm{Y}_\varepsilon}$ задается следующими равенствами: $l_2^{\mathrm{Y}_\varepsilon}(y) = a$, $l_1^{\mathrm{Y}_\varepsilon}(y) = b$, $l^{\mathrm{Y}_\varepsilon}(q_3) = l^{\mathrm{Y}_\varepsilon}(q_4) = l^{\mathrm{Y}_\varepsilon}(q_5) = l^{\mathrm{Y}_\varepsilon}(q_6) = c$. Легко видеть, что ПП X и Y_1 сильно *path*-эквивалентны. Действительно, отношение сильной *path*-эквивалентности $\widehat{\mathcal{R}}$ может быть построено из множества $\{(P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_1, Q_2), (P_2, Q_1)\}$, используя условия 1-6 определения 16. Здесь $P_1 = s_0 p_1 s_1 p_3 s_3 p_5 s_5 p_7 s_7$ и $P_2 = s_0 p_2 s_2 p_4 s_4 p_6 s_6\ p_8 s_8$ — кубические пути в левом ПП и $Q_1 = r_0 q_1 r_1 q_2 r_2 q_3 r_3 q_4 r_4$ и $Q_2 = r_0 q_1 r_1 q_2\ r_2 q_5 r_5 q_6 r_4$ — кубические пути в правом ПП. В силу определения нормы $\| \cdot \|^{\mathrm{Y}_1}$, кубические пути, лежащие в $\widehat{\mathcal{R}}$, изометричны. Таким образом, $\widehat{\mathcal{R}}$ — сильная *path*-эквивалентность. Покажем, что в остальных случаях, когда $1 < \varepsilon \leq 2$, ПП X и Y_ε не являются сильно *path*-эквивалентными. Допустим существует сильная *path*-эквивалентность $\widetilde{\mathcal{R}}$ между ПП X и Y_ε, связывающая их отмеченные точки. Тогда для кубического пути $P = s_0 p x_1$ в X должен найтись некоторый кубический путь Q в Y_ε такой, что $(P, Q) \in \widetilde{\mathcal{R}}$. В силу *dl*-связности P и Q, последний должен иметь вид $r_0 q y$. Однако P и Q не являются изометричными кубическими путями, поскольку $\|d_t p(\dot{t})\|_{p(t)} = \|\dot{t}\|_t \neq \varepsilon \|\dot{t}\|_t = \|d_t q(\dot{t})\|_{q(t)}$, если $1 < \varepsilon \leq 2$.

Сформулируем аналог теоремы 3 в контексте ПП.

Теорема 8. Для размеченных над одним и тем же множеством L действий ПП X и Y следующие условия эквивалентны:

1. X и Y сильно path-эквивалентны;

2. X и Y $\mathfrak{P}_L^{\leq}$-эквивалентны.

Доказательство. $(2 \Rightarrow 1)$ Допустим, что $\mathrm{X} \xleftarrow{\mathrm{f_X}} \mathrm{Z} \xrightarrow{\mathrm{f_Y}} \mathrm{Y}$, где $\mathrm{f_X} = \langle f_X, 1_L \rangle$ и $\mathrm{f_Y} = \langle f_Y, 1_L \rangle$ — $\mathfrak{P}_L^{\leq}$-открытые морфизмы категории $\mathfrak{pSpace}_L^{\leq}$. Тогда, в силу определения 14, теоремы 6 и леммы 7, легко видеть, что отношение $\mathcal{R} = \{(f_X(P), f_Y(P)) \mid P \in \mathcal{CP}(\mathrm{Z})\}$ является сильной *path*-эквивалентностью между X и Y.

$(1 \Rightarrow 2)$ Предположим, что $\mathcal{R}$ — сильная *path*-эквивалентность между размеченными над L ПП X и Y. Построим ПП Z, удовлетворяющее конструкции $\mathrm{X} \xleftarrow{\mathrm{f_X}} \mathrm{Z} \xrightarrow{\mathrm{f_Y}} \mathrm{Y}$, где $\mathrm{f_X} = \langle f_X, 1_L \rangle$ и $\mathrm{f_Y} = \langle f_Y, 1_L \rangle$ — $\mathfrak{P}_L^{\leq}$-открытые морфизмы категории $\mathfrak{pSpace}_L^{\leq}$. В силу леммы 10, $\mathcal{R}_{\mathcal{F}t}$ — сильная *path*-эквивалентность между ПМ $\mathcal{F}t(\mathrm{X})$ и $\mathcal{F}t(\mathrm{Y})$. Значит, можно построить ПМ $\mathrm{M} = \langle \mathcal{F}t(\mathrm{X}), \mathcal{F}t(\mathrm{Y}) \rangle$, рассуждая, как в доказательстве теоремы 3. Имеем $\mathcal{F}t(\mathrm{X}) \xleftarrow{\mathrm{pr_1}} \mathrm{M} \xrightarrow{\mathrm{pr_2}} \mathcal{F}t(\mathrm{Y})$, где $\mathrm{pr_1} = \langle pr_1, 1_L \rangle$ и $\mathrm{pr_2} = \langle pr_2, 1_L \rangle$ — $\mathbb{P}_L$-открытые морфизмы категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$. Следовательно, по пункту 2 утверждения 12, отображения $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{pr_1}, \mathrm{X}) : \mathcal{T}_{\mathrm{pr_1},\mathrm{X}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{X}$ и $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{pr_2}, \mathrm{Y}) : \mathcal{T}_{\mathrm{pr_2},\mathrm{Y}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{Y}$ являются $\mathfrak{P}_L^{\leq}$-открытыми морфизмами категории $\mathfrak{pSpace}_L^{\leq}$.

Чтобы показать, что $\mathcal{T}_{\mathrm{pr_1},\mathrm{X}}(\mathrm{M}) = \mathcal{T}_{\mathrm{pr_2},\mathrm{Y}}(\mathrm{M})$, достаточно убедиться в совпадении норм $\|\cdot\|^1$ и $\|\cdot\|^2$ этих ПП. Пусть Z — общее топологическое пространство ПП $\mathcal{T}_{\mathrm{pr_1},\mathrm{X}}(\mathrm{M})$ и $\mathcal{T}_{\mathrm{pr_2},\mathrm{Y}}(\mathrm{M})$. Тогда, учитывая конструкцию M, для всех точек $w = (\langle P_{\mathcal{F}t}, Q_{\mathcal{F}t} \rangle, t) \in Z$ $(P \in \mathcal{CP}_{p_k}(\mathrm{X}), Q \in \mathcal{CP}_{q_k}(\mathrm{Y}), \dim p_k = \dim q_k = n, (P, Q) \in \mathcal{R}$, $t \in \overset{\circ}{\square}{}^n)$ и всех векторов $\dot{t} \in T_w Z$ верно равенство $\|\dot{t}\|_w^1 = \|d_w \widehat{pr}_1(\dot{t})\|^{\mathrm{X}}_{\widehat{pr}_1(w)} = \|d_t p_k(\dot{t})\|^{\mathrm{X}}_{p_k(t)} = \|d_t q_k(\dot{t})\|^{\mathrm{Y}}_{q_k(t)} = \|d_w \widehat{pr}_2(\dot{t})\|^{\mathrm{Y}}_{\widehat{pr}_2(w)} = \|\dot{t}\|_w^2$, в силу изометричности $\mathfrak{P}_L^{\leq}$-открытых морфизмов $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{pr_1}, \mathrm{X})$ и $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{pr_2}, \mathrm{Y})$, по теореме 6, и в силу изометричности кубических путей P и Q. $\square$

Теорема 9. Если X и Y — объекты категории $\mathfrak{pSpace}_L^{\leq}$ с самонепересекающимися $\square$-топологическими пространствами X и Y, то следующие условия эквивалентны:

1. X и Y сильно path-эквивалентны;

2. X и Y $\mathfrak{P}_L^{\leq}$-эквивалентны;

3. для X и Y существуют ПП Z с самонепересекающимся $\square$-топологическим пространством Z и морфизмы $\mathrm{f_X} : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ и $\mathrm{f_Y} : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}_{L}$, первые компоненты которых являются изометричными *di*-накрытиями.

Доказательство. То, что пункты 1 и 2 равносильны и из пункта 3 следует пункт 2, является следствием теорем 8 и 7 соответственно. Докажем, что пункты 1 и 2 повлекут пункт 3. Пусть $\mathcal{R}$ — сильная *path*-эквивалентность между X и Y. Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 8, имеем конструкцию $\mathrm{X} \xleftarrow{\mathcal{G}(\mathrm{M},\mathrm{pr}_1,\mathrm{X})} \mathrm{Z} \xrightarrow{\mathcal{G}(\mathrm{M},\mathrm{pr}_2,\mathrm{Y})} \mathrm{Y}$, где $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{pr}_1, \mathrm{X})$, $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{pr}_2, \mathrm{Y})$ — $\mathfrak{P}^{\leq}_{L}$-открытые морфизмы категории $\mathfrak{pSpace}^{\leq}_{L}$ и $\mathrm{Z} = \mathcal{T}_{\mathrm{pr}_1,\mathrm{X}}(\mathrm{M})$. Покажем, что Z — самонепересекающееся $\square$-топологическое пространство. Это следует из леммы B утверждения 8, рассуждений доказательства теоремы 4 и очевидного факта, что если M — самонепересекающееся полукубическое множество, то Z — самонепересекающееся полукубическое пространство. Теперь воспользуемся теоремой 7, по которой первые компоненты морфизмов $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{pr}_1, \mathrm{X})$ и $\mathcal{G}(\mathrm{M}, \mathrm{pr}_2, \mathrm{Y})$ являются изометричными *di*-накрытиями. $\square$

Замечание 13. Отметим, что все результаты этой главы справедливы для категорий $\mathfrak{pSpace}^{\star}$, где $\star \in \{\ , \leq, =\}$[9].

[9] ПП и морфизмы из определения 14, чья первая компонента является изометрией, образуют категорию $\mathfrak{pSpace}^{=}$.

Глава 3

Полукубические множества и Чу-пространства

Чу-пространства [5, 26] — это разновидность топологических пространств с множеством точек, множеством открытых множеств и отношением принадлежности с явно заданным множеством степеней принадлежности точки открытому множеству. В теории параллелизма Чу-пространства формализуют с точностью до изоморфизма так называемые структуры конфигураций (СК) [45] — модель с семантикой "истинного параллелизма".

3.1. Категория sChu и ее подкатегория sP

В данном разделе определяется категория **sChu** поступательных Чу-пространств и выделяется ее подкатегория **sP** Чу-путей в Чу-пространствах.

Рассмотрим формальное определение поступательного Чу-пространства. Пусть E — множество. Тогда $\mathcal{L}(\mathcal{P}_{fin}(E))$ — множество всех линейных порядков на конечных подмножествах множества E.

Определение 17. *(Размеченное над множеством L действий) поступательное Чу-пространство* (ПЧ) — это тройка $\mathrm{E} = (E, \diamond, l)_L$, где

- E — множество *точек*;
- $\diamond = \bigcup\limits_{n\geq 0} \diamond^n = \bigcup\limits_{n\geq 0, <\in\mathcal{L}(\mathcal{P}_{fin}(E))} \diamond^n_< \subseteq \mathcal{P}_{fin}(E)\times\mathcal{P}_{fin}(E)$ — *отношение поступательности* такое, что если $F \diamond^n_< G$, то $F \subseteq G$, на n-элементном множестве $G \setminus F$ действует линейный порядок $<$ и, кроме того, $F \diamond^m_{<|_{H\setminus F}} H \diamond^{n-m}_{<|_{G\setminus H}} G$ для всех $F \subseteq H \subseteq G$.
- $l : E \to L$ — *размечающая функция* из множества точек в множество действий.

Такие пространства в теории параллелизма называются структурами событий высших размерностей [41], являющиеся некоторым подклассом структур конфигураций [45].

Наложим на поступательные Чу-пространства следующие аксиомы:

$$\text{B0 : если } F \diamond F \sqcup^{1} \{e\} \text{ и } G \diamond G \sqcup \{e\},$$
$$\text{то } F \cap G \diamond (F \cap G) \sqcup \{e\} \diamond \begin{cases} \cdots \diamond F \sqcup \{e\} \\ \cdots \diamond G \sqcup \{e\}, \end{cases}$$

$$\text{B1 : если } F \diamond F \sqcup \{e_1\} \diamond F \sqcup \{e_1, e_2\} \diamond \cdots \diamond F \sqcup \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ и}$$
$$G \diamond^n_< G \sqcup \{e_1, \ldots, e_n\}, \text{ то } F \diamond^n_< F \sqcup \{e_1, \ldots, e_n\}.$$

Далее будем рассматривать только поступательные Чу-пространства, удовлетворяющие этим аксиомам.

Поскольку поступательные Чу-пространства моделируют параллельные процессы, аксиомы имеют следующую интерпретацию: аксиома B0 выражает так называемое условие стабильности, запрещающее одному и тому же событию возникать в конфликтующих процессах, в то время как аксиома B1 утверждает, что если события параллельны в некотором процессе, то они будут параллельны в любом процессе.

Чу-путь в ПЧ E — это последовательность $F = \emptyset \diamond^{k_1}_{<_1} F_1 \diamond^{k_2}_{<_2} \cdots \diamond^{k_n}_{<_n} F_n$ в E. Пусть Π(E) (Π_{F_n}(E)) обозначает множество Чу-путей (заканчивающихся подмножеством F_n) в ПЧ E, а Π_1(E) — множество одноэлементных Чу-путей в ПЧ E, т.е. Чу-путей с $k_1 = \cdots = k_n = 1$. $\diamond$-*гомотопия* на Чу-путях в ПЧ E — это минимальная эквивалентность такая, что если Чу-путь F получен из Чу-пути G посредством удаления одного подмножества, не являющегося ни началом и ни концом Чу-пути, то F эквивалентно G. Для каждого Чу-пути F обозначим через $[F]$ его $\diamond$-гомотопический класс.

Отметим, что в общем случае не все точки и не каждые два множества, связанные отношением поступательности, могут быть достигнуты из множества $\emptyset$

[1] Здесь и далее символ $\sqcup$ обозначает объединение непересекающихся множеств.

с помощью отношения $\diamond$. Для того чтобы исключить такие ситуации, определим специальный подкласс ПЧ. Поступательное Чу-пространство $\mathrm{E} = (E, \diamond, l)_L$ называется *согласованным*, если для каждой точки $e \in E$ найдется пара $(F, F) \in \diamond$ такая, что $e \in F$. ПЧ Е называется $\diamond$*-односвязным*, если для каждой пары $(F, F) \in \diamond$ найдется Чу-путь, заканчивающийся подмножеством F, и все Чу-пути, заканчивающиеся одним и тем же подмножеством, $\diamond$-гомотопны. В дальнейшем будем рассматривать только согласованные и $\diamond$-односвязные ПЧ и называть их просто поступательными Чу-пространствами.

Пример 9. В качестве примера поступательного Чу-пространства рассмотрим изображенное на рис. 3.1 ПЧ Е, размеченное над множеством $L = \{a_1, \ldots, a_6\}$. Е состоит из множества $E = \{e_1, \ldots, e_6\}$, отношения поступательности

$$\diamond = (\diamond^3 = \{(\emptyset, \{e_1, e_2, e_3\})\}$$
$$\bigcup(\diamond^2 = \{(\{e_2, e_3\}, \{e_i | i = 1, \ldots, 4\}), (\{e_1\}, \{e_1, e_2, e_6\}), (\{e_1\}, \{e_1, e_3, e_6\}),$$
$$(\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_2, e_3, e_6\}), (\{e_1, e_3\}, \{e_1, e_2, e_3, e_6\}), (\{e_1, e_6\}, \{e_1, e_2, e_3, e_6\})\} \cup A)$$
$$\bigcup(\diamond^1 = \{(\{e_i | i = 1, \ldots, 4\}, \{e_i | i = 1, \ldots, 5\})\} \cup B),$$

где множества A и B состоят из подотношений отношений $\diamond^3$ и $\diamond^2 \cup \diamond^3$ соответственно, и функции разметки l, действующей по правилу $l(e_i) = a_i$ для всех $1 \leq i \leq 6$. Примером Чу-пути может служить последовательность $F = \emptyset \diamond^2 \{e_2, e_3\} \diamond^2 \{e_i \mid i = 1, \ldots, 4\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1, \ldots, 5\}$, выделенная на рис. 3.1 серым цветом. Чу-путь F $\diamond$-гомотопен Чу-пути $G = \emptyset \diamond^3 \{e_1, e_2, e_3\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1, \ldots, 4\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1, \ldots, 5\}$ через Чу-путь $\emptyset \diamond^2 \{e_2, e_3\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1, \ldots, 3\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1, \ldots, 4\} \diamond^1 \{e_i \mid i = 1, \ldots, 5\}$.

Определим понятие морфизма на поступательных Чу-пространствах.

Определение 18. Пусть $\mathrm{E}^1 = (E^1, \diamond^1, l^1)_{L^1}$ и $\mathrm{E}^2 = (E^2, \diamond^2, l^2)_{L^2}$ — ПЧ. *Морфизм* $\langle f, \sigma \rangle : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ состоит из пары функций $f : E^1 \to E^2$ и $\sigma : L^1 \to L^2$ таких, что верно:

1. $\sigma \circ l^1 = l^2 \circ f$,

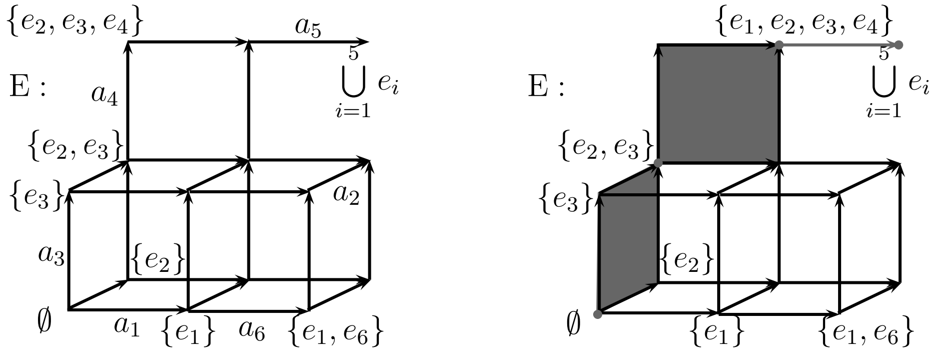


Рис. 3.1. Пример Чу-пути в поступательном Чу-пространстве E.

2. $F\ (\diamond^1)^n_< \ G \Rightarrow f(F)\ (\diamond^2)^n_\prec \ f(G)$, при этом $e < \epsilon \Rightarrow f(e) \prec f(\epsilon)$ для всех $e, \epsilon \in G \setminus F$.

Пусть **sChu** обозначает категорию ПЧ с только что определенными морфизмами.

Поскольку все ПЧ таковы, что не имеет значения какой Чу-путь приведет нас в заранее выбранное подмножество точек, то удобно записывать класс эквивалентности $[F = (\emptyset \diamond F_1 \diamond \cdots \diamond F_n)]$ как $[F_n]$. Кроме того, по $[F_n]$ в ПЧ E можно определить *Чу-путь-объект* $\mathrm{F_n}$, являющийся под-ПЧ, лежащим в E, с множеством точек $F_n \subseteq E$, отношением поступательности и размечающей функцией ПЧ E, ограниченными на множество F_n точек.

Определим **sP** как полную подкатегорию категории **sChu** с Чу-путь-объектами в качестве объектов. Таким образом, можно говорить о $\mathbf{sP}_L$-открытых морфизмах категории $\mathbf{sChu}_L$ и $\mathbf{sP}_L$-эквивалентности на объектах категории $\mathbf{sChu}_L$ (см. раздел 1.4).

3.2. Корефлексивная подкатегория op$\mathbb{S}$et di-односвязных ПМ

В данном разделе вводится полная подкатегория op$\mathbb{S}$et ПМ с di-односвязными полукубическими множествами категории p$\mathbb{S}$et, строится функтор $\mathcal{U}$:

$\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et} \to \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ универсальной di-накрывающей и доказывается, что $\mathcal{U}$ сопряжен справа к функтору включения $\iota : \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et} \hookrightarrow \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$.

Предварительно для ПМ M определим необходимые понятия и обозначения. Будем рассматривать отношение $\sim_\Box \in (M_1)^2$ как минимальную эквивалентность такую, что если найдется $y \in M_2$ такой, что $x_1 = d_\lambda^\alpha(y)$ и $x_2 = d_\lambda^{1-\alpha}(y)$ для некоторых $\lambda = 1, 2$ и $\alpha = 0, 1$, то x_1 эквивалентно x_2. Пусть $\ll x \gg$ — класс эквивалентности $\sim_\Box$. Неформально говоря, все $x_1 \in \ll x \gg$ моделируют одно и то же событие параллельного процесса. Далее, определим отображения $D^0, D^1 : M_n \to M_0$ для любого $n \geq 0$ формулами $D^0(x) = D_\Theta^{\Gamma_0}(x)$ и $D^1(x) = D_\Theta^{\Gamma_1}(x)$ соответственно для всех $x \in M_n$, где $\Gamma_0 = (0, \ldots, 0)$, $\Gamma_1 = (1, \ldots, 1)$ и $\Theta = (1, \ldots, n)$.

В дальнейшем будем рассматривать только невырожденные полукубические множества, в которых любые $x_1, \ldots x_n \in M_1$ и $y \in M_n$ удовлетворяют следующим аксиомам:

A0 : если $d_1^0(x_1) = d_1^0(x_2)$ и $x_1 \sim_\Box x_2$, то $x_1 = x_2$;

A1 : если $d_1^1(x_1) = d_1^0(x_2)$, $d_1^1(x_2) = d_1^0(x_3)$, $\ldots$, $d_1^1(x_{n-1}) = d_1^0(x_n)$ и $x_{\sigma(i)} \sim_\Box D_{\Theta_i}^{\Gamma_i}(y)$ для всех $1 \leq i \leq n$, то найдется единственный куб $x \in M_n$ такой, что $x_{\sigma(i)} = D_{\Theta_i}^{\Gamma_i}(x)$ для всех $1 \leq i \leq n$, где $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ — перестановка порядка n. Здесь $\Gamma_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_j = \begin{cases} 0, \text{ если } \sigma(j) > \sigma(i), \\ 1, \text{ если } \sigma(j) < \sigma(i), \end{cases}$ и $\Theta_i = (1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$.

С точки зрения теории параллелизма аксиома A0 говорит о том, что из одной точки не могут выходить два 1-куба, моделирующих одно и то же событие параллельного процесса, аксиома A1 утверждает, что если события параллельны в некотором процессе, то они будут параллельны в любом процессе.

Замечание 14. Поскольку все далее рассматриваемые полукубические множества невырождены, то, по замечанию 1, без ограничения общности можем считать их самонепересекающимися, т.е. di-топологическими пространствами, по утверждению 1.

Определим понятие di-односвязности.

Определение 19. Полукубическое множество M ПМ M называется *di-односвязным*, если для любого $u \in M$ верно:

- найдется кубический путь $P \in \mathcal{CR}_u(\mathrm{M})$;
- для любых кубических путей $P, Q \in \mathcal{CR}_u(\mathrm{M})$ имеем $P \sim Q$.

Пусть $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ обозначает полную подкатегорию категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$, объектами которой являются ПМ с di-односвязными полукубическими множествами. Ясно, что категория $\mathbb{P}$ является подкатегорией категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$.

Утверждение 13. Пусть $\mathrm{M} = (M, i_0^{\mathrm{M}}, l^{\mathrm{M}})_L$ — объект категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$. Определим структуру $\mathcal{U}(\mathrm{M}) = (A, i_0, l)_L$, где

- $A_n = \{[P = p_0 \dots p_k] \mid P \in \mathcal{CR}(\mathrm{M}) \text{ и } p_k \in M_n\}$ $(n \geq 0)$, при этом $\widetilde{d}_\lambda^\alpha([P]) = [d_\lambda^\alpha(P)]$;
- $i_0 = [i_0^{\mathrm{M}}]$;
- $l([p_0 \dots p_k]) = l^{\mathrm{M}}(p_k)$ для всех $[p_0 \dots p_k] \in A_1$.

Тогда $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ — объект категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$.
Отображение $\rho_{\mathrm{M}} = \langle \rho_M, 1_L \rangle : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$, определенное формулой

$$\rho_M([p_0 \dots p_k]) = p_k \text{ для всех } [p_0 \dots p_k] \in A,$$

— морфизм категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$.

Доказательство. Покажем, что $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ — ПМ. Начнем с доказательства коммутативности диаграмм из определения полукубического множества. Имеем

$\widetilde{d}^{\alpha}_{\lambda}(\widetilde{d}^{\beta}_{\mu}([P])) = [d^{\alpha}_{\lambda}(d^{\beta}_{\mu}(P))] = [d^{\beta}_{\mu-1}(d^{\alpha}_{\lambda}(P))] = \widetilde{d}^{\beta}_{\mu-1}(\widetilde{d}^{\alpha}_{\lambda}([P]))$ для $\lambda < \mu$. Выполнение условия невырожденности для $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ очевидно. Покажем справедливость аксиомы A0 (справедливость аксиомы A1 доказывается аналогично). Пусть $[p_0 \dots p_k], [q_0 \dots q_m] \in A_1$, $\widetilde{d}^0_1([p_0 \dots p_k]) = \widetilde{d}^0_1([q_0 \dots q_m])$ и $[p_0 \dots p_k] \sim_{\square} [q_0 \dots q_m]$. Тогда из равенства функций границ следует, что $d^0_1(p_k) = d^0_1(q_m)$, а из определения отношения $\sim_{\square}$ вытекает, что $p_k \sim_{\square} q_m$. Так как для M справедлива аксиома A0, верно, что $p_k = q_m$. Таким образом, $[p_0 \dots p_k] = [d^0_1(p_0 \dots p_k)p_k] = [d^0_1(q_0 \dots q_m)p_k] = [d^0_1(q_0 \dots q_m)q_m] = [q_0 \dots q_m]$.

Ясно, что $\rho_{\mathrm{M}} : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ удовлетворяет всем условиям определения 7. $\square$

Пусть $\rho_{\mathrm{M}} = \langle \rho_M, 1_L \rangle : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ — морфизм категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$, заданный в утверждении 13. Тогда *универсальным di-накрытием* называется di-отображение $\rho_M : A \to M$. При этом, полукубическое множество A называется *универсальной di-накрывающей* полукубического множества M.

Замечание 15. Определение универсального di-накрытия является корректным в силу утверждения 3.

Утверждение 14. Пусть $\rho_{\mathrm{M}} = \langle \rho_M, 1_L \rangle : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ — морфизм категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$, заданный в утверждении 13. Тогда универсальное di-накрытие $\rho_M : A \to M$ является di-накрытием di-топологического пространства M di-топологическим пространством A над кубическими путями.

Доказательство. Докажем, что $\rho_M : A \to M$ — di-накрытие di-топологического пространства M di-топологическим пространством A над кубическими путями. Покажем справедливость, скажем, пункта б) определения 9 (доказательство справедливости пункта а) аналогично). Рассмотрим произвольный кубический путь $O = o_0 \dots o_k$ в $\mathcal{U}(\mathrm{M})$. Пусть $\rho_M(O) = p_0 \dots p_k$. Тогда индукцией по k легко доказывается

Лемма A. Пусть $O = o_0 \dots o_k \in \mathcal{CR}(\mathcal{U}(\mathrm{M}))$ и $\rho_M(O) = p_0 \dots p_k$. Тогда O состоит из кубов $o_i = [p_0 \dots p_i]$ для всех $0 \leq i \leq k$.

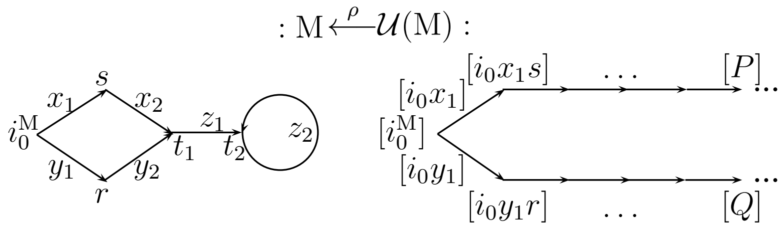


Рис. 3.2. Пример универсального di-накрытия.

Пусть существует гомотопия $\rho_M(O) \overset{s_1}{-\!\!-\!\!-} P_1 \overset{s_2}{-\!\!-\!\!-} \cdots \overset{s_m}{-\!\!-\!\!-} P_m$. Продемонстрируем, что существует $O_1 \in \mathcal{CR}(\mathcal{U}(\mathrm{M}))$ такой, что $O \overset{s_1}{-\!\!-\!\!-} O_1$ и $\rho_M(O_1) = P_1$. Тогда, повторяя эти рассуждения для $2 \le i \le m$, найдем гомотопию $O \overset{s_1}{-\!\!-\!\!-} O_1 \overset{s_2}{-\!\!-\!\!-} \cdots \overset{s_m}{-\!\!-\!\!-} O_m$ такую, что $\rho_M(O_i) = P_i$ для всех $1 \le i \le m$.

Пусть $P_1 = p_0 \dots p'_{s_1} \dots p_k$ в M. Тогда положим $o'_{s_1} = [p_0 \dots p_{s_1-1} p'_{s_1}]$. В соответствии с построением $\mathcal{U}(\mathrm{M})$, $O_1 = o_0 \dots o'_{s_1} \dots o_k$ — кубический путь в $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ и $O \overset{s_1}{-\!\!-\!\!-} O_1$. Ясно, что $\rho_M(O_1) = P_1$. □

Следствие 3. Пусть $\rho_{\mathrm{M}} : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ — морфизм категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$, заданный в утверждении 13. Тогда ρ_{M} $\mathbb{P}_L$-открыт, т.е. M и $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ $\mathbb{P}_L$-эквивалентны.

Доказательство. Следует из утверждения 14 и теоремы 2. □

Пример 10. На рис. 3.2 показан пример морфизма $\rho_{\mathrm{M}} : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ такой, что его первая компонента является универсальным di-накрытием. Здесь слева изображено ПМ M, а справа — ПМ $\mathcal{U}(\mathrm{M})$. Кубические пути $P = i_0x_1sx_2t_1z_1t_2z_2t_2z_2t_2$ и $Q = i_0y_1ry_2t_1z_1t_2z_2t_2z_2t_2$ не являются гомотопными в M. Следовательно, два 0-куба $[P]$ и $[Q]$ не совпадают в $\mathcal{U}(\mathrm{M})$, хотя $\rho_M([P]) = t_2 = \rho_M([Q])$.

Теорема 10. Пусть $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ и $\rho_{\mathrm{M}} : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ — объект и морфизм категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ соответственно, заданные в утверждении 13. Тогда верно:

1. $\mathcal{U}(\mathrm{M})$ — объект категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$;

2. Отображение $\mathcal{U} : \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et} \to \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$, действующее на объектах M как $\mathcal{U}(\mathrm{M})$, а на морфизмах $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ как $\mathcal{U}(\mathrm{f}) = \langle \mathcal{U}(f), \sigma \rangle : \mathcal{U}(\mathrm{M}) \to \mathcal{U}(\mathrm{M}')$, где $\mathcal{U}(f)([P]) = [f(P)]$ для всех $P \in \mathcal{CR}(\mathrm{M})$, является функтором, называемым *функтором универсальной накрывающей.*

3. Функтор $\mathcal{U}$ является сопряженным справа к функтору включения $\iota : \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et} \hookrightarrow \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$. Таким образом, $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ — корефлексивная подкатегория категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$.

Доказательство. Покажем, что выполнен первый пункт этой теоремы. Справедливость первого пункта определения di-односвязности полукубического множества очевидна. Проверим справедливость второго пункта этого определения. Рассмотрим произвольные кубические пути $O_1, O_2 \in \mathcal{CR}_u(\mathcal{U}(\mathrm{M}))$. Пусть $\rho_M(O_1) = P$ и $\rho_M(O_2) = Q$. В силу леммы A утверждения 14, $u = [P] = [Q]$. Таким образом, существует гомотопия $P \overset{s_1}{---} \cdots \overset{s_m}{---} Q$. По утверждению 14 и определению 9, найдется гомотопия $O_1 \overset{s_1}{---} \cdots \overset{s_m}{---} O$ такая, что $\rho_M(O) = Q$. Так как $\rho_M(O) = \rho_M(O_2) = Q$, по лемме A утверждения 14, имеем $O = O_2$.

Справедливость второго пункта теоремы очевидна, в силу утверждения 13 и построения $\mathcal{U}(\mathrm{f})$.

Докажем справедливость третьего пункта теоремы. Предположим, что M — объект категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и O — объект категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$. Необходимо найти биекцию между морфизмами $\mathrm{f} : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$ категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и морфизмами $\mathrm{g} : \mathrm{O} \to \mathcal{U}(\mathrm{M})$ категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$, а также показать, что эта биекция естественная как по O, так и по M. Для морфизма $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$ определим морфизм $\varphi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{f}) = \langle \varphi_{\mathrm{O,M}}(f), \sigma \rangle \ : \mathrm{O} \to \mathcal{U}(\mathrm{M})$, заданный как $\varphi_{\mathrm{O,M}}(f)(v) = [f(P_v)]$ для всех $v \in O$, где $P_v \in \mathcal{CR}_v(\mathrm{O})$. Также, для морфизма $\mathrm{g} = \langle g, \sigma \rangle : \mathrm{O} \to \mathcal{U}(\mathrm{M})$ определим морфизм $\psi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{g}) = \langle \psi_{\mathrm{O,M}}(g), \sigma \rangle \ : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$, заданный как $\psi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{g}) = \rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{g}$. Легко показать, что $\varphi_{\mathrm{O,M}}$ и $\psi_{\mathrm{O,M}}$ определены корректно.

Теперь докажем, что $\varphi_{\mathrm{O,M}}$ — биекция. Предположим, что $\mathrm{f}, \mathrm{f}' : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$ — морфизмы такие, что $\varphi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{f}) = \varphi_{\mathrm{O,M}}(\mathrm{f}')$. Тогда имеем, что $[f(P_v)] =$

$\varphi_{\mathrm{O},\mathrm{M}}(f)(v) = \varphi_{\mathrm{O},\mathrm{M}}(f')(v) = [f'(P_v)]$ для любых $v \in O$ и $P_v \in \mathcal{CR}_v(\mathrm{O})$. Это означает, что $f(v) = f'(v)$ для любого v. Далее, рассмотрим морфизм $\mathrm{g} = \langle g, \sigma \rangle : \mathrm{O} \to \mathcal{U}(\mathrm{M})$ категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$. Нужно доказать, что существует морфизм $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$ категории $\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ такой, что $\varphi_{\mathrm{O},\mathrm{M}}(\mathrm{f}) = \mathrm{g}$. Положим $\mathrm{f} = \psi_{\mathrm{O},\mathrm{M}}(\mathrm{g})$. Действительно, если $P_v = p_0 \ldots (p_k = v)$, то имеем, что $\varphi_{\mathrm{O},\mathrm{M}}(f)(v) = [f(P_v)] = [\rho_M(g(P_v))] = [\rho_M(g(p_0)) \ldots \rho_M(g(p_k))] = g(\rho_O([P_v])) = g(v)$. Следовательно, $\varphi_{\mathrm{O},\mathrm{M}}$ — биекция такая, что $\varphi^{-1}_{\mathrm{O},\mathrm{M}} = \psi_{\mathrm{O},\mathrm{M}}$.

Покажем, что $\varphi_{\mathrm{O},\mathrm{M}}$ — естественная биекция по O (доказательство естественности $\varphi_{\mathrm{O},\mathrm{M}}$ по M аналогично). Для этой цели нам нужно рассмотреть следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}(\mathrm{O}, \mathrm{M}) \arrow[d, "(r)^*"'] & \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}(\mathrm{O}, \mathcal{U}(\mathrm{M})) \arrow[l, "\varphi^{-1}_{\mathrm{O},\mathrm{M}}"'] \arrow[d, "r^*"] \\
\mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}(\mathrm{O}', \mathrm{M}) & \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}(\mathrm{O}', \mathcal{U}(\mathrm{M})) \arrow[l, "\varphi^{-1}_{\mathrm{O}',\mathrm{M}}"]
\end{tikzcd}$$

для произвольных объектов O, O' и произвольного морфизма $\mathrm{r} : \mathrm{O}' \to \mathrm{O}$ категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$. Отображения r^* и $(r)^*$ определены следующим образом: $r^*(\mathrm{g}) = \mathrm{g} \circ \mathrm{r}$ для любого морфизма $\mathrm{g} : \mathrm{O} \to \mathcal{U}(\mathrm{M})$ и $(r)^*(\mathrm{f}) = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$ для любого морфизма $\mathrm{f} : \mathrm{O} \to \mathrm{M}$. Докажем, что рассматриваемая диаграмма коммутирует. Действительно, с одной стороны, имеем, что $(r)^*(\varphi^{-1}_{\mathrm{O},\mathrm{M}}(\mathrm{g})) = (r)^*(\rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{g}) = \rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{g} \circ \mathrm{r}$, а с другой стороны, верно, что $\varphi^{-1}_{\mathrm{O}',\mathrm{M}}(r^*(\mathrm{g})) = \varphi^{-1}_{\mathrm{O}',\mathrm{M}}(\mathrm{g} \circ \mathrm{r}) = \rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{g} \circ \mathrm{r}$.

Таким образом, $\mathcal{U} : \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et} \to \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ — функтор, сопряженный справа к функтору включения $\iota : \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et} \hookrightarrow \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}$ ([33]). □

Замечание 16. В силу построения функтора $\mathcal{U}$, он расслаивается над множествами L действий, т.е. состоит из функторов $\mathcal{U}_L : \mathrm{p}\mathbb{S}\mathrm{et}_L \to \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$.

3.3. Эквивалентность категорий $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и sChu

В этом разделе сначала строятся отображения $\mathcal{F}$: **sChu** $\to$ $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ и $\mathcal{G}$: $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ $\to$ **sChu** и доказывается, что они являются функторами. Затем с помощью функтора $\mathcal{G}$ показывается, что $\mathcal{F}$ — строгий, полный и плотный функтор, т.е. категории op$\mathbb{S}$et и **sChu** эквивалентны [33].

Утверждение 15. Отображение $\mathcal{F}$: **sChu** $\to$ op$\mathbb{S}$et, действующее на объектах $\mathrm{E} = (E, \diamond, l)_L$ категории **sChu** как $\mathcal{F}(\mathrm{E}) = (M, i_0, l^{\mathrm{M}})_L$, где

- $M_n = \{(F,G)_< \mid \ F \diamond^n_< G\}$, при этом $\widehat{d}^0_i(F,G)_< = (F, G \setminus pr_i(G \setminus F))_{<|_H}$ и $\widehat{d}^1_i(F,G)_< = (F \sqcup pr_i(G \setminus F), G)_{<|_H}$, где $pr_i(e_1 < \cdots < e_n) = e_i$ (проекция на i-ый элемент) и $H = G \setminus (F \sqcup pr_i(G \setminus F))$;

- $i_0 = (\emptyset, \emptyset)$[2];

- $l^{\mathrm{M}}(F, F \sqcup e) = l(e)$ для всех $(F, F \sqcup e) \in \diamond^1$,

и на морфизмах $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ категории **sChu** как $\mathcal{F}(\mathrm{f}) = \langle \bar{f}, \sigma \rangle : \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$, где $\bar{f}(F,G)_< = (f(F), f(G))_\prec$ для всех кубов $(F,G)_<$ из $\mathcal{F}(\mathrm{E})$, является функтором.

Доказательство. Сначала покажем, что $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ — ПМ. Докажем коммутативность диаграмм из определения полукубического множества, например, для $\alpha = \beta = 0$ (остальные случаи доказываются аналогично). Пусть $(F,G) \in M_n$ и $G \setminus F = e_1 < \cdots < e_n$. При $\lambda < \mu$ имеем, что $\widehat{d}^0_\lambda(\widehat{d}^0_\mu(F,G)) = (F, (G \setminus pr_\mu(G \setminus F)) \setminus pr_\lambda((G \setminus pr_\mu(G \setminus F)) \setminus F)) = (F, G \setminus (pr_\mu(e_1 < \cdots < e_n) \cup pr_\lambda(e_1 < \cdots < e_{\mu-1} < e_{\mu+1} < \cdots < e_n))) = (F, G \setminus (e_\mu \cup e_\lambda)) = (F, G \setminus (pr_\lambda(e_1 < \cdots < e_n) \cup pr_{\mu-1}(e_1 < \cdots < e_{\lambda-1} < e_{\lambda+1} < \cdots < e_n))) = (F, (G \setminus pr_\lambda(G \setminus F)) \setminus pr_{\mu-1}((G \setminus pr_\lambda(G \setminus F)) \setminus F)) = \widehat{d}^0_{\mu-1}(\widehat{d}^0_\lambda(F,G))$.

Ясно, что $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ невырождено. Проверим справедливость аксиомы A0 для $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ (справедливость аксиомы A1 доказывается аналогично). Пусть $(F, F \sqcup e_1), (G, G \sqcup e_2) \in M_1$, $\widehat{d}^0_1(F, F \sqcup e_1) = \widehat{d}^0_1(G, G \sqcup e_2)$ и $(F, F \sqcup e_1) \sim_\square (G, G \sqcup e_2)$. Равенство граничных функций означает, что $F = G$, а отношение $\sim_\square$ между 1-кубами влечет $e_1 = e_2$. Таким образом, $(F, F \sqcup e_1) = (G, G \sqcup e_2)$.

[2] Здесь и далее будем опускать значок линейного порядка в тех случаях, когда это не приводит к разночтению.

Теперь докажем справедливость второго пункта определения di-односвязности полукубического множества для $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ (справедливость первого пункта доказывается аналогично). Пусть $\widehat{P}, \widehat{Q} \in \mathcal{CR}_{(F,G)_<}(\mathcal{F}(\mathrm{E}))$, где $(F,G)_< \in M_n$ ($n \geq 0$). Без ограничения общности, можем считать, что $\widehat{P} = P\widehat{d}_2^0 \circ \cdots \circ \widehat{d}_n^0(F,G)_< \ldots \widehat{d}_n^0(F,G)_<(F,G)_<$ и $\widehat{Q} = Q\widehat{d}_2^0 \circ \cdots \circ \widehat{d}_n^0(F,G)_< \ldots \widehat{d}_n^0(F,G)_<(F,G)_<$, где $P, Q \in \mathcal{CR}_{1,(F,F)}(\mathcal{F}(\mathrm{E}))$. Пусть $P = (\emptyset, \emptyset) \ldots (F_i, F_i)\ (F_i, F_{i+1})\ (F_{i+1}, F_{i+1}) \ldots (F, F)$ и $Q = (\emptyset, \emptyset) \ldots (G_j, G_j)\ (G_j, G_{j+1})\ (G_{j+1}, G_{j+1}) \ldots (F, F)$. Из определения отображения $\mathcal{F}$ следует, что для P и Q найдутся их прообразы $P_1 = (\emptyset \diamond \cdots \diamond F_i \diamond \cdots \diamond F)$ и $Q_1 = (\emptyset \diamond \cdots \diamond G_j \diamond \cdots \diamond F)$ соответственно из $\Pi_{1,F}(\mathrm{E})$. Благодаря свойству $\diamond$-односвязности ПЧ E, P_1 и Q_1 $\diamond$-гомотопны. Нетрудно проверить, что под действием $\mathcal{F}$ $\diamond$-гомотопные Чу-пути из $\Pi_1(\mathrm{E})$ переходят в гомотопные кубические пути из $\mathcal{CR}_1(\mathcal{F}(\mathrm{E}))$. Следовательно, P и Q также гомотопны, а значит, гомотопны $\widehat{P}$ и $\widehat{Q}$.

То, что отображение $\mathcal{F}(\mathrm{f}) = \langle \bar{f}, \sigma \rangle$, определенное ранее, является морфизмом категории op$\mathbb{S}$et, незамедлительно вытекает из того факта, что f — морфизм категории **sChu**. Таким образом, легко видеть, что $\mathcal{F}$ — функтор. $\square$

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 11. Пусть M — ПМ с di-односвязным полукубическим множеством. Определим множество $E = \{\ll x \gg \ \mid\ x \in M_1\}$ и отображение $\pi : M_0 \to \mathcal{P}_{fin}(E)$, заданное следующим образом: для любой точки $u \in M_0$ положим $\pi(u) = \{\ll x_0 \gg, \ldots, \ll x_k \gg\} \subseteq E$ для некоторого кубического пути $P = (p_0 x_0 p_1 \ldots p_k x_k u) \in \mathcal{CR}_1(\mathrm{M})$. Тогда π является инъекцией.

Доказательство. Ясно, что, в силу di-односвязности полукубического множества M, π определено корректно, т.е. является отображением.

Далее, пусть $\pi(u) = \pi(v) = \{\ll x_0 \gg, \ldots, \ll x_k \gg\}$. Покажем индукцией по k, что $u = v$. Случай $k = -1$, а именно, $\pi(u) = \pi(v) = \emptyset$, очевиден. Случай $\pi(u) = \pi(v) = \ll x \gg$ вытекает из выполнения аксиомы A0 для M. Пусть для k доказано, что π — инъекция. Продемонстрируем справедливость этого факта для $k+1$. Рассмотрим кубические пути $P = (p_0x_0p_1 \dots p_kx_ku)$, $Q = (q_0y_0q_1 \dots q_ky_kv) \in \mathcal{CR}_1(\mathrm{M})$ и предположим, что $\pi(u) = \pi(v)$. Ясно, что $\ll x_k \gg = \ll y_{\sigma(k)} \gg$, где $\sigma : \{0, \dots, k\} \to \{0, \dots, k\}$ — перестановка порядка $k+1$. Тогда без ограничения общности можем предположить, что существует цепочка 2-кубов $w_1, \dots, w_l$ такая, что $x_k = d^{1-\varepsilon}_{i_1}(w_1)$, $d^{\varepsilon}_{i_1}(w_1) = d^{1-\varepsilon}_{i_2}(w_2)$, ..., $d^{\varepsilon}_{i_{s_1-1}}(w_{s_1-1}) = d^{\varepsilon}_{i_{s_1}}(w_{s_1}), \dots, d^{1-\varepsilon}_{i_{l-1}}(w_{l-1}) = d^{\varepsilon}_{i_l}(w_l), d^{1-\varepsilon}_{i_l}(w_l) = y_{\sigma(k)}$ при $\varepsilon = 0, 1$. Будем считать, например, что $\varepsilon = 0$, т.е. существует единственное $s_1 \in \{1, \dots, l\}$ такое, что $d^0_1(w_{s_1-1}) = d^0_1(w_{s_1})$. Так как M — ПМ с di-односвязным полукубическим множеством, найдется кубический путь $T = (t_0z_0t_1 \dots t_mz_mt_{m+1}) \in \mathcal{CR}_1(\mathrm{M})$ и верно, что $t_{m+1} = d^0_1(d^0_2(w_{s_1}))$. Поскольку $[Td^0_{3-i_{s_1-1}}(w_{s_1-1}) \dots d^0_{3-i_1}(w_1)\ p_k] = [p_0x_0p_1 \dots p_k]$, $[Td^0_{3-i_{s_1}}(w_{s_1}) \dots d^0_{3-i_l}(w_l)q_{\sigma(k)}] = [q_0y_0q_1 \dots q_{\sigma(k)}]$ и $\pi(u) = \pi(v)$, то для любого j ($\sigma(k)+1 \le j \le k$) найдется число r_j ($1 \le r_j \le (s_1 - 1)$) такое, что $\ll y_j \gg = \ll d^0_{3-i_{r_j}}(w_{r_j}) \gg$. Учитывая это обстоятельство и справедливость аксиомы A1 для M, легко доказать индукцией по $n = k - \sigma(k)$, что найдется кубический путь $Q' = (q_0y_0q_1 \dots q_{\sigma(k)}y'_{\sigma(k)}q'_{\sigma(k)+1} \dots q'_ky'_kv)$ такой, что $Q \sim Q'$ и $y_{\sigma(k)} \sim_{\Box} y'_k$. Кубические пути $\bar{P} = (p_0x_0p_1 \dots p_k)$ и $\bar{Q} = (q_0y_0q_1 \dots q_{\sigma(k)}y'_{\sigma(k)}q'_{\sigma(k)+1} \dots q'_k)$ удовлетворяют индукционной гипотезе. Таким образом, получаем, что $p_k = q'_k$. Кроме того, имеем, что $x_k \sim_{\Box} y_{\sigma(k)} \sim_{\Box} y'_k$, а значит, в силу справедливости аксиомы A0 для M, получаем, что $x_k = y'_k$, т.е. $u = v$. Таким образом, π — инъекция. $\Box$

Утверждение 16. Отображение $\mathcal{G} : \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et} \to \mathbf{sChu}$, действующее на объектах $\mathrm{M} = (M, i_0, l^{\mathrm{M}})_L$ категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ как $\mathcal{G}(\mathrm{M}) = (E, \diamond, l)_L$, где

- $E = \{\ll x \gg \mid\ x \in M_1\}$ — множество точек;
- $\diamond \subseteq \mathcal{P}_{fin}(E) \times \mathcal{P}_{fin}(E)$ определяется следующим образом:

$$F \diamond^n_{\prec} G \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, x_{(F,G,\prec)} \in M_n \text{ т.ч.}$$
$$F = \pi(D^0(x_{(F,G,\prec)})),\ G = \pi(D^1(x_{(F,G,\prec)})) \text{ и } \prec = <_{x_{(F,G,<)}},$$

где

$$\ll D^{\Gamma}_{\Theta_i}(x_{(F,G,<)}) \gg <_{x_{(F,G,<)}} \ll D^{\Gamma}_{\Theta_j}(x_{(F,G,<)}) \gg \overset{def}{\Leftrightarrow} i < j.$$

Здесь $\Theta_i = (1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ для всех $1 \le i \le n$.

- $l(\ll x \gg) = l^{\mathrm{M}}(x)$ для всех $\ll x \gg \in E$,

и на морфизмах $\mathrm{g} = \langle g, \sigma \rangle : \mathrm{M}^1 \to \mathrm{M}^2$ категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ как $\mathcal{G}(\mathrm{g}) = \langle \widetilde{g}, \sigma \rangle : \mathcal{G}(\mathrm{M}^1) \to \mathcal{G}(\mathrm{M}^2)$, где $\widetilde{g}(\ll x \gg) = \ll g(x) \gg$ для всех $\ll x \gg \in E^1$, является функтором.

Доказательство. Пусть M — объект категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$. Покажем, что $\mathcal{G}(\mathrm{M})$ — ПЧ. Проверим выполнение условий, налагаемых на произвольное отношение поступательности $F \diamond^n_< G$ в ПЧ. Тогда, по определению, существует $x_{(F,G,<)} \in M_n$ такой, что $F = \pi(D^0(x_{(F,G,<)}))$ и $G = \pi(D^1(x_{(F,G,<)}))$, т.е. $F \subseteq G$. Пусть $F \subseteq H \subseteq G$, причем $G \setminus F = (e_1 < \ldots < e_n)$, где $e_i = \ll D^{\Gamma}_{\Theta_i}(x_{(F,G,<)}) \gg$, $\Theta_i = (1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ для всех $1 \le i \le n$, и $H \setminus F = (e_{i_1} < \ldots < e_{i_m})$. Тогда m-куб $d^0_{j_1} \circ \ldots \circ d^0_{j_{n-m}}(x_{(F,G,<)})$ соответствует $F \diamond^m_{<|_{H \setminus F}} H$ и $(n-m)$-куб $d^1_{i_1} \circ \ldots \circ d^1_{i_m}(x_{(F,G,<)})$ — $H \diamond^{(n-m)}_{<|_{G \setminus H}} G$, где упорядоченные последовательности $(i_1, \ldots, i_m)$ и $(j_1, \ldots, j_{n-m})$ дополняют друг друга до упорядоченной последовательности $(1, \ldots, n)$. Заметим, что $x_{(F,G,<)}$ — единственный куб, соответствующий отношению поступательности $F \diamond^n_< G$, в силу справедливости аксиом A0 и A1 для ПМ M.

Теперь необходимо доказать справедливость аксиомы B0 для $\mathcal{G}(\mathrm{M})$. Пусть $F \diamond F \sqcup \{e\}$ и $G \diamond G \sqcup \{e\}$. Без потери общности предположим, что существуют различные $z^1_1, \ldots z^1_{k^1}, z^2_1, \ldots z^2_{k^2} \in M_2$ такие, что $x_{(F,F \sqcup e)} = d^{1-\alpha}_{i_{k^1}}(z^1_{k^1})$, $d^{\alpha}_{i_{k^1}}(z^1_{k^1}) = d^{1-\alpha}_{i_{k^1-1}}(z^1_{k^1-1}), \ldots, d^{\alpha}_{i_1}(z^1_1) = d^{\alpha}_{j_1}(z^2_1), \ldots, d^{1-\alpha}_{j_{k^2-1}}(z^2_{k^2-1}) = d^{\alpha}_{j_{k^2}}(z^2_{k^2})$, $d^{1-\alpha}_{j_{k^2}}(z^2_{k^2}) = x_{(G,G \sqcup e)}$ для некоторого $\alpha = 0, 1$. Рассуждая аналогичным образом, как в доказательстве леммы 11, выполнение B0 проверяется индукцией по количеству элементов в множестве $(F \cap G) \setminus S$, если $\alpha = 0$, или в множестве $S \setminus (F \cap G)$, если $\alpha = 1$, где $S = \pi(d^0_1(d^{\alpha}_{i_1}(z^1_1)))$.

Справедливость аксиомы B1 для $\mathcal{G}(\mathrm{M})$ незамедлительно следует из леммы 11 и справедливости аксиомы A1 для M.

Доказательство выполнения условий согласованности и $\diamond$-односвязности ПЧ $\mathcal{G}(\mathrm{M})$ сводится к проверке $\diamond$-гомотопности двух Чу-путей, заканчивающихся в одном и том же подмножестве точек. Рассмотрим произвольные Чу-пути $P_1 = (\emptyset \diamond F_1 \diamond \cdots \diamond (F_n = F))$ и $Q_1 = (\emptyset \diamond G_1 \diamond \cdots \diamond (G_m = F))$ из $\Pi_F(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$, где $F \in \mathcal{P}_{fin}(E)$. Без ограничения общности можем считать, что эти Чу-пути одноэлементные. По определению $\mathcal{G}$, для P_1 и Q_1 найдутся соответственно их прообразы $P = x_{(\emptyset,\emptyset)}\ x_{(\emptyset,F_1)}x_{(F_1,F_1)}\ \ldots\ x_{(F,F)}$ и $Q = x_{(\emptyset,\emptyset)}\ x_{(\emptyset,G_1)}x_{(G_1,G_1)}\ \ldots x_{(F,F)}$ из $\mathcal{CR}_{1,x_{(F,F)}}(\mathrm{M})$. Поскольку M — ПМ с di-односвязным полукубическим множеством, P и Q гомотопны. Нетрудно проверить, что под действием функтора $\mathcal{G}$ гомотопные кубические пути из $\mathcal{CR}_1(\mathrm{M})$ переходят в $\diamond$-гомотопные Чу-пути из $\Pi_1(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$. Отсюда следует, что Чу-пути P_1 и Q_1 в $\mathcal{G}(\mathrm{M})$ также будут $\diamond$-гомотопны.

Пусть $\mathrm{g} = \langle g, \sigma\rangle : \mathrm{M}^1 \to \mathrm{M}^2$ — морфизм $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$. Покажем, что отображение $\mathcal{G}(\mathrm{g}) = \langle \widetilde{g}, \sigma\rangle$, определенное в утверждении, — морфизм категории **sChu**. Поскольку g — морфизм категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$, легко убедиться в том, что если n-куб $x_{(F,G,<)}$ соответствует отношению поступательности $F \diamond^n_< G$ в $\mathcal{G}(\mathrm{M}^1)$, то n-куб $g(x_{(F,G,<)})$ соответствует отношению поступательности $\widetilde{g}(F) \diamond^n_\prec \widetilde{g}(G)$ в $\mathcal{G}(\mathrm{M}^2)$. Теперь проверка факта, что $\mathcal{G}(\mathrm{g})$ — морфизм категории **sChu**, становится очевидной. Таким образом, легко видеть, что $\mathcal{G}$ — функтор. □

Основываясь на выше приведенных определениях и утверждениях, установим следующий факт.

Теорема 11. Категории **sChu** и $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ эквивалентны.

Доказательство. Продемонстрируем эквивалентность категорий **sChu** и $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$, установив, что $\mathcal{F}$ — строгий, полный и плотный функтор.

Лемма A. $\mathcal{F}$ — строгий функтор.

Доказательство. Пусть E^1, E^2 — объекты категории **sChu** и $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ — морфизмы категории **sChu**. Нужно показать, что из $\mathcal{F}(\mathrm{f}_1) = \mathcal{F}(\mathrm{f}_2)$ следует, что $\mathrm{f}_1 = \mathrm{f}_2$. По определению функтора $\mathcal{F}$, условие $\mathcal{F}(\mathrm{f}_1) = \mathcal{F}(\mathrm{f}_2)$ влечет равенство вторых компонент морфизмов f_1 и f_2. Пусть f_i и $\bar{f}_i$ — первые компоненты $\mathrm{f_i}$ и $\mathcal{F}(\mathrm{f_i})$ соответственно ($i = 1, 2$). Тогда $(f_1(F), f_1(G))_{\prec_1} = \bar{f}_1(F, G)_< = \bar{f}_2(F, G)_< = (f_2(F), f_2(G))_{\prec_2}$ для всех кубов $(F, G)_<$ из $\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$. Это означает, что $f_1(e) = f_2(e)$ для всех $e \in E$ таких, что найдется множество F такое, что $F \diamond (F \sqcup e)$. Благодаря свойствам согласованности и $\diamond$-односвязности ПЧ E^1, имеем $f_1 = f_2$. $\square$

Лемма B. $\mathcal{F}$ — полный функтор.

Доказательство. Пусть $\mathrm{g} = \langle g, \sigma \rangle : \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ — морфизм категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$. Нужно показать, что существует морфизм $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ категории **sChu** такой, что $\mathcal{F}(\mathrm{f}) = \mathrm{g}$.

Для всех $e \in E^1$ положим $f(e) = p_2(g(F, F \sqcup e)) \setminus p_1(g(F, F \sqcup e))$, где p_i — проекция на i-ый элемент пары $g(F, F \sqcup e)$ ($i = 1, 2$). Для начала покажем, что f — отображение. Пусть $f(e) = p_2(g(F, F \sqcup e)) \setminus p_1(g(F, F \sqcup e)) = \epsilon$ и $f(e) = p_2(g(G, G \sqcup e)) \setminus p_1(g(G, G \sqcup e)) = \varepsilon$. Необходимо показать, что $\epsilon = \varepsilon$. Поскольку E^1 — ПЧ, найдутся Чу-пути $P = (\emptyset \diamond F_1 \diamond \cdots \diamond (F_n = F) \diamond F \sqcup \{e\})$ и $Q = (\emptyset \diamond \cdots \diamond (F \cap G) \diamond ((F \cap G) \sqcup \{e\}) \diamond \cdots \diamond (F \sqcup \{e\}))$. Без ограничения общности можем считать, что $G \subseteq F$. Тогда имеем, что $Q = (\emptyset \diamond \cdots \diamond G \diamond (G \sqcup \{e\}) \diamond \cdots \diamond (F \sqcup \{e\}))$. Поскольку Чу-пути P и Q содержат $\{e\}$ и эти Чу-пути $\diamond$-гомотопны, т.к. E^1 — ПЧ, то найдутся 2-кубы $z_1, \ldots, z_n$ в $\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$ такие, что $(F, F \sqcup e) = d^{\alpha_1}_{\lambda_1}(z_1), d^{1-\alpha_1}_{\lambda_1}(z_1) = d^{\alpha_2}_{\lambda_2}(z_2), \ldots, d^{1-\alpha_n}_{\lambda_n}(z_n) = (G, G \sqcup e)$. Индукцией по n с помощью очевидных равенств $p_2(g(d^0_s(z_i))) \setminus p_1(g(d^0_s(z_i))) = p_2(g(d^1_s(z_i))) \setminus p_1(g(d^1_s(z_i)))$ ($1 \le i \le n$), получаем, что $\epsilon = p_2(g(F, F \sqcup e)) \setminus p_1(g(F, F \sqcup e)) = \cdots = p_2(g(G, G \sqcup e)) \setminus p_1(g(G, G \sqcup e)) = \varepsilon$.

Докажем, что $\mathrm{f} = \langle f, \sigma \rangle$ — действительно морфизм категории **sChu**. Покажем справедливость условия 2 определения 18. Пусть $F (\diamond^1)^n_< G$ в E^1. Тогда, поскольку E^1 — ПЧ, существует Чу-путь $\emptyset \diamond^1 \{\epsilon_1\} \diamond^1 \cdots \diamond^1 (\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\} = F)(\diamond^1)^n_< G$. Имеем $f(F) = \bigcup\limits_{e \in F} f(e) = \bigcup\limits_{j=1}^{k} p_2(g(\epsilon_1 \sqcup \ldots \sqcup \epsilon_{j-1}, \epsilon_1 \sqcup \ldots \sqcup \epsilon_j)) \setminus p_1(g(\epsilon_1 \sqcup \ldots \sqcup \epsilon_{j-1}, \epsilon_1 \sqcup$

$\ldots \sqcup \epsilon_j)) = p_2(g(\epsilon_1 \sqcup \ldots \sqcup \epsilon_{k-1}, F)) = p_1(g(F,G)_<)$. Аналогично получаем, что $f(G) = p_2(g(F,G)_<)$. Так как g — морфизм категории p$\mathbb{S}$et, то размерность куба $g(F,G)_<$ в $\mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ равна n. Таким образом, $g(F,G)_< \in (\diamond^2)^n_\prec$. Следовательно, верно, что $f(F)(\diamond^2)^n_\prec f(G)$ в E^2. Теперь доказательство справедливости второй части условия 2, а также условия 1 определения 18 очевидно.

И наконец, продемонстрируем, что $\mathcal{F}(\mathrm{f}) = \mathrm{g}$. По определению $\mathcal{F}$ и f, вторые компоненты морфизмов $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ и g совпадают. Докажем равенство их первых компонент $\bar{f}$ и g. Возьмем произвольный куб $(F,G)_<$ в $\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$. Тогда $\bar{f}(F,G)_< = (f(F), f(G))_\prec = (p_1(g(F,G)), p_2(g(F,G)))_\prec = g(F,G)_<$. □

Лемма C. $\mathcal{F}$ — плотный функтор.

Доказательство. Пусть M — объект категории op$\mathbb{S}$et. Построим объект E категории **sChu** такой, что M изоморфно $\mathcal{F}(\mathrm{E})$.

Положим $\mathrm{E} = \mathcal{G}(\mathrm{M})$ и рассмотрим объект $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$ категории op$\mathbb{S}$et. В силу конструирования $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, верно, что куб $(F,G)_<$ из $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$, если и только если существует единственный куб $x_{(F,G,<)}$ из M такой, что $F = \pi(D^0(x_{(F,G,<)}))$, $G = \pi(D^1(x_{(F,G,<)}))$ и $<=<_{x_{(F,G,<)}}$. Положим $\xi_M(x) = (\pi(D^0(x)), \pi(D^1(x)))_{<_x}$ для всех кубов x в M и $\eta_M((F,G)_<) = x_{(F,G,<)}$ для всех кубов $(F,G)_<$ в $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$. Ясно, что $\xi_\mathrm{M} = \langle \xi_M, id\rangle : \mathrm{M} \to \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$ и $\eta_\mathrm{M} = \langle \eta_M, id\rangle : \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M})) \to \mathrm{M}$ являются морфизмами категории p$\mathbb{S}$et. Докажем, что эти морфизмы взаимно обратны друг другу. Имеем, что

$$\xi_M(\eta_M((F,G)_<)) = \xi_M(x_{(F,G,<)}) =$$
$$= (\pi(D^0(x_{(F,G,<)})), \pi(D^1(x_{(F,G,<)})))_{<_{x_{(F,G,<)}}} = (F,G)_<$$

и

$$\eta_M(\xi_M(x)) = \eta_M((\pi(D^0(x)), \pi(D^1(x)))_{<_x}) = x_{(\pi(D^0(x)), \pi(D^1(x)), <_x)} = x.$$

□

Таким образом, эквивалентность категорий **sChu** и op$\mathbb{S}$et доказана. □

Замечание 17. В силу построения функтора $\mathcal{F}$, он расслаивается над множествами L действий, т.е. состоит из функторов $\mathcal{F}_L : \mathbf{sChu}_L \to \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$. Аналогично, функтор $\mathcal{G}$ расслаивается на функторы $\mathcal{G}_L : \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L \to \mathbf{sChu}_L$. Кроме того, учитывая рассуждения доказательства теоремы 11, категории $\mathbf{sChu}_L$ и $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ эквивалентны.

3.4. Сохранение открытых морфизмов и совпадение $\mathbb{P}$- и sP-эквивалентностей

В этом разделе показывается, что $\mathbf{sP}_L$-открытые морфизмы отображаются функтором $\mathcal{F}_L : \mathbf{sChu}_L \to \mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ в $\mathbb{P}_L$-открытые морфизмы, и наоборот, что позволяет установить совпадение $\mathbb{P}_L$-эквивалентности ПМ с $\mathbf{sP}_L$-эквивалентностью поступательных Чу-пространств, полученных из образов функтора универсальной di-накрывающей данных ПМ.

В дальнейшем нам понадобятся следующие факты. Изоморфизмы $\xi_{\mathrm{M}} = \langle \xi_M, id\rangle : \mathrm{M} \to \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{M}))$, где M — объект категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$, заданные в доказательстве леммы C теоремы 11, и изоморфизмы $\varsigma_{\mathrm{E}} = \langle \varsigma_E, id\rangle : \mathrm{E} \to \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{E}))$, заданные следующим образом: $\varsigma_E(e) = \ll (F, F \sqcup e) \gg$ для всех $e \in E$, могут быть с легкостью расширены до естественных изоморфизмов $\xi : \mathbf{1}_{\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}} \to \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ и $\varsigma : \mathbf{1}_{\mathbf{sChu}} \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$. Действительно, для произвольного морфизма $\mathrm{f} : \mathrm{M}^1 \to \mathrm{M}^2$ категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ имеем, что

$$\xi_{\mathrm{M}^2} \circ f = \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{f})) \circ \xi_{\mathrm{M}^1}, \tag{3.1}$$

и для произвольного морфизма $\mathrm{g} : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ категории $\mathbf{sChu}$ имеем, что

$$\varsigma_{\mathrm{E}^2} \circ g = \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{g})) \circ \varsigma_{\mathrm{E}^1}. \tag{3.2}$$

В силу построения естественных изоморфизмов ξ и ς, они расслаиваются на естественные изоморфизмы $\xi_L : \mathbf{1}_{\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L} \to \mathcal{F}_L \circ \mathcal{G}_L$ и $\varsigma_L : \mathbf{1}_{\mathbf{sChu}_L} \to \mathcal{G}_L \circ \mathcal{F}_L$.

В дальнейшем будут использоваться лишь функторы $\mathcal{F}_L$, $\mathcal{G}_L$ и $\mathcal{U}_L$. Однако чтобы не загромождать формулы и диаграммы будем опускать нижний индекс и писать $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{U}$. То же касается и естественных изоморфизмов ξ и ς.

Рассмотрим вспомогательное утверждение и следствие из него.

Утверждение 17. Пусть $\widehat{\mathrm{P}}$ — объект категории $\mathbf{sP}_L$, E — объект категории $\mathbf{sChu}_L$, $\mathrm{f} = \langle f, id\rangle : \widehat{\mathrm{P}} \to \mathrm{E}$ — морфизм категории $\mathbf{sChu}_L$ и $\mathrm{g} = \langle g, id\rangle : \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{P}}) \to \mathcal{F}(\mathrm{E})$ — морфизм категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$. Тогда f и g — инъективные отображения.

Доказательство. Тот факт, что f — инъективное отображение, легко доказывается от противного с помощью противопоставления любого Чу-пути, заканчивающегося в множестве точек $\widehat{P}$, его образу при действии f. Следовательно, g — инъективное отображение, учитывая полноту функтора $\mathcal{F}$, по лемме В теоремы 11 и замечанию 17. $\square$

Объект V категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$ называется *блоком* в объекте M категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}$, если V — подПМ ПМ M и $\mathcal{G}(\mathrm{V})$ — Чу-путь-объект.

Следствие 4. Пусть E^1, E^2 — объекты категории $\mathbf{sChu}_L$, $\mathcal{F}(\mathrm{f}) = \langle \bar{f}, id\rangle : \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ — морфизм категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ и V — блок в $\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$. Тогда ограничение морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{f})\mid_{\mathrm{V}}: \mathrm{V} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ имеет инъективную первую компоненту.

Доказательство. Так как $\mathcal{G}(\mathrm{V})$ — объект категории $\mathbf{sP}_L$ и $\mathcal{F}$ — полный функтор, в силу леммы В теоремы 11 и замечания 17, то, по утверждению 17, морфизм $\mathcal{F}(\mathrm{f})|_{\mathrm{V}} \circ \eta_{\mathrm{V}} : \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{V})) \to \mathrm{V} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ имеет инъективную первую компоненту. Поскольку η_{V} — изоморфизм, обратный ξ_{V}, то первая компонента $\mathcal{F}(\mathrm{f})_{\mathrm{V}}$ также инъективна. $\square$

Сформулируем результат о сохранении и отражении свойства морфизмов быть открытыми при действии функтора $\mathcal{F}$.

Теорема 12. Пусть $\mathrm{f} = \langle f, id\rangle : \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2$ — морфизм категории $\mathbf{sChu}_L$. Тогда f $\mathbf{sP}_L$-открыт тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ $\mathbb{P}_L$-открыт.

$$
\begin{tikzcd}
\bar{\Box} \arrow[r, "\mathrm{p}"] \arrow[d, "\mathrm{m}"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{f})"] \\
\bar{\Box}' \arrow[r, "\mathrm{q}"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(\bar{\Box}) \arrow[r, "\mathcal{G}(\mathrm{p})"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\mathrm{m})"'] & \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)) \arrow[r, "\upsilon_{\mathrm{E}^1}"] \arrow[d, "\mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{f}))"'] & \mathrm{E}^1 \arrow[d, "\mathrm{f}"] \\
\mathcal{G}(\bar{\Box}') \arrow[r, "\mathcal{G}(\mathrm{q})"'] & \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{E}^2)) \arrow[r, "\upsilon_{\mathrm{E}^2}"'] & \mathrm{E}^2
\end{tikzcd}
$$

Рис. 3.3. Диаграммы для морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ и для морфизма f категории $\mathbf{sChu}_L$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathrm{m} : \bar{\Box} \to \bar{\Box}'$ — морфизм категории $\mathbb{P}_L$, $\mathrm{p} : \bar{\Box} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$ и $\mathrm{q} : \bar{\Box}\,' \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ — морфизмы категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$ такие, что диаграмма, показанная слева на рис. 3.3, коммутативна. Значит, применяя функтор $\mathcal{G}$ и используя формулу (3.2), получаем, что коммутативна и диаграмма, изображенная справа на рис. 3.3, где $\upsilon_{\mathrm{E}^i} : \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{E}^i)) \to \mathrm{E}^i$ — изоморфизм, обратный ς_{E^i} и заданный следующим образом:

$$\upsilon_{\mathrm{E}^i}(\ll (F, F \sqcup e) \gg) = e \text{ для всех } \ll (F, F \sqcup e) \gg \text{ из } \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{E}^i)),$$

для всех $i = 1, 2$.

Поскольку $\mathcal{G}(\bar{\Box})$ и $\mathcal{G}(\bar{\Box}')$ — объекты категории $\mathbf{sP}_L$ и f — $\mathbf{sP}_L$-открытый морфизм, найдется морфизм $\mathrm{r} : \mathcal{G}(\bar{\Box}\,') \to \mathrm{E}^1$ категории $\mathbf{sChu}_L$ такой, что $\upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{p}) = \mathrm{r} \circ \mathcal{G}(\mathrm{m})$ и $\upsilon_{\mathrm{E}^2} \circ \mathcal{G}(\mathrm{q}) = \mathrm{f} \circ \mathrm{r}$. Тогда, применяя функтор $\mathcal{F}$ к диаграмме справа на рис. 3.3 и достраивая ее с помощью формулы (3.1), получаем следующую коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
\bar{\Box} \arrow[r, "\xi_{\mathrm{P}}"] \arrow[d, "\mathrm{m}"'] & \mathcal{F}(\mathcal{G}(\bar{\Box})) \arrow[r, "\mathcal{F}(\upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{p}))"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{m}))"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{f})"] \\
\bar{\Box}' \arrow[r, "\xi_{\mathrm{Q}}"'] & \mathcal{F}(\mathcal{G}(\bar{\Box}')) \arrow[r, "\mathcal{F}(\upsilon_{\mathrm{E}^2} \circ \mathcal{G}(\mathrm{q}))"'] \arrow[ur, "\mathcal{F}(\mathrm{r})"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^2)
\end{tikzcd}
$$

Рассмотрим равенство $\mathcal{F}(\upsilon_{\mathrm{E}^1}) \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{p})) = \mathcal{F}(\mathrm{r}) \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{m}))$. Используя формулу (3.1), имеем, что

$$\mathcal{F}(\upsilon_{\mathrm{E}^1}) \circ \xi_{\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)} \circ \mathrm{p} \circ \eta_{\bar{\Box}} = \mathcal{F}(\mathrm{r}) \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathrm{m})), \tag{3.3}$$

где $\eta_{\bar{\Box}} : \mathcal{F}(\mathcal{G}(\bar{\Box})) \to \bar{\Box}$ — изоморфизм, обратный к $\xi_{\bar{\Box}}$. Так как, в силу лемм B и A теоремы 11 и замечания 17, $\mathcal{F}$ — полный и строгий функтор, верно, что

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{P}} \arrow[r, "\mathrm{p}"] \arrow[d, "\mathrm{m}"'] & \mathrm{E}^1 \arrow[d, "\mathrm{f}"] \\ \widehat{\mathrm{Q}} \arrow[r, "\mathrm{q}"'] & \mathrm{E}^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{P}}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{p})"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{m})"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{f})"] \\ \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}}) \arrow[r, "\mathcal{F}(\mathrm{q})"'] & \mathcal{F}(\mathrm{E}^2) \end{tikzcd}$$

Рис. 3.4. Диаграммы для морфизма f категории $\mathbf{sChu}_L$ и для морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{P}}) \arrow[rr, "\mathcal{F}(\mathrm{p})"] \arrow[ddd, "\mathcal{F}(\mathrm{m})"'] & & \mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \arrow[ddd, "\mathcal{F}(\mathrm{f})"] \\ & \bar{\Box}_{\mathrm{k}} \arrow[ul, "\iota_{\mathrm{k}}"'] \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}"'] & \\ & \bar{\Box}'_{\mathrm{l}} \arrow[dl, "\iota'_{\mathrm{l}}"'] \arrow[uur, dashed, "\mathrm{r}_{\mathrm{k,l}}"] & \\ \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}}) \arrow[rr, "\mathcal{F}(\mathrm{q})"'] & & \mathcal{F}(\mathrm{E}^2) \end{tikzcd}$$

Рис. 3.5. Расширенная диаграмма для морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$.

$\xi_{\mathcal{F}(\mathrm{E}^1)} = \mathcal{F}(\varsigma_{\mathrm{E}^1})$. Таким образом, умножая равенство (3.3) на изоморфизм $\xi_{\bar{\Box}}$ слева и используя коммутативность левого квадрата предыдущей диаграммы, имеем, что $\mathrm{p} = \mathcal{F}(\mathrm{r}) \circ \xi_{\bar{\Box}'} \circ \mathrm{m}$. Аналогично получаем, что $\mathrm{q} = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathcal{F}(\mathrm{r}) \circ \xi_{\bar{\Box}'}$. Следовательно, искомый морфизм $\mathcal{F}(\mathrm{r}) \circ \xi_{\bar{\Box}'} : \bar{\Box}' \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$ удовлетворяет требуемым равенствам, т.е. $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ — $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathrm{m} = \langle m, id \rangle : \widehat{\mathrm{P}} \to \widehat{\mathrm{Q}}$ — морфизм категории $\mathbf{sP}_L$, $\mathrm{p} = \langle p, id \rangle : \widehat{\mathrm{P}} \to \mathrm{E}^1$ и $\mathrm{q} = \langle q, id \rangle : \widehat{\mathrm{Q}} \to \mathrm{E}^2$ — морфизмы категории $\mathbf{sChu}_L$ такие, что диаграмма слева на рис. 3.4 коммутативна, а значит, коммутативна и диаграмма справа на рис. 3.4.

Пусть $\{\bar{\Box}_{\mathrm{k}}\}_{k \le n^P}$, $\{\bar{\Box}'_{\mathrm{l}}\}_{l \le n^Q}$ — совокупности всех объектов категории $\mathbb{P}_L$ таких, что $\iota_{\mathrm{k}} : \bar{\Box}_{\mathrm{k}} \to \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{P}})$ и $\iota'_{\mathrm{l}} : \bar{\Box}'_{\mathrm{l}} \to \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}})$ — естественные морфизмы-вложения и $(\widehat{Q}, \widehat{Q}) = \iota'_l(t_l)$, где t_l — конечная точка[3] в Q_{l}. Для всех $k \le n^P$ и $l \le n^Q$ выберем некоторые максимальные кубические пути P_k и Q_l для $\bar{\Box}_{\mathrm{k}}$ и $\bar{\Box}'_{\mathrm{l}}$ соответственно. Пусть $S = \{(k, l) \mid \exists \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l} : \bar{\Box}_{\mathrm{k}} \to \bar{\Box}'_{\mathrm{l}},\ k \le n^P,$

[3] Точка u в ПМ M называется *конечной*, если не существует $v \in M_1$ такого, что $u = d_1^0(v)$.

$l \leq n^Q\}$, где $\mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l} : \bar{\square}_\mathrm{k} \to \bar{\square}'_\mathrm{l}$ — сужение морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{m})$ на $\bar{\square}_\mathrm{k}$ с областью значений $\bar{\square}'_\mathrm{l}$. Рассмотрим произвольные $(k,l) \in S$. Ясно, что в этом случае левый внутренний квадрат диаграммы на рис. 3.5 коммутативен. Следовательно, из коммутативности внешнего квадрата той же диаграммы получаем, что $\mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ (\mathcal{F}(\mathrm{p}) \circ \iota_\mathrm{k}) = (\mathcal{F}(\mathrm{q}) \circ \iota'_\mathrm{l}) \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}$. Тогда, поскольку $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ — $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм, найдется морфизм $\mathrm{r_{k,l}} : \bar{\square}'_\mathrm{l} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$ такой, что $\mathcal{F}(\mathrm{p}) \circ \iota_\mathrm{k} = \mathrm{r_{k,l}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}$ и $\mathcal{F}(\mathrm{q}) \circ \iota'_\mathrm{l} = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r_{k,l}}$. Более того, как правило, такой морфизм не единственен, о чем говорит следующая

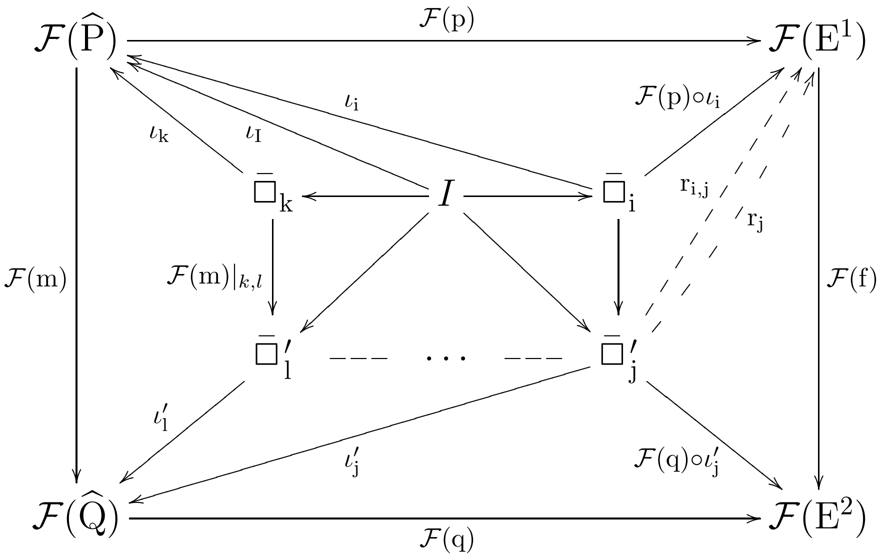
Лемма A. При фиксированных $(k,l) \in S$ существует совокупность морфизмов $\{\mathrm{r^V_{k,l}} : \bar{\square}'_\mathrm{l} \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^1)\}_{\mathrm{V} \in C_k}$ таких, что $\mathrm{r^V_{k,l}}(\bar{\square}'_\mathrm{l}) \subseteq \mathrm{V}$, где $C_k = \{\mathrm{V} \in C \mid \mathcal{F}(\mathrm{p})(\iota_\mathrm{k}(\bar{\square}_\mathrm{k})) \subseteq \mathrm{V}\}$, $C = \{\mathrm{V}$ — блок в $\mathcal{F}(\mathrm{E}^1) \mid \bar{f}(t_V) = \bar{q}(\widehat{Q}, \widehat{Q})$, t_V — конечная точка в $\mathrm{V}\}$. Кроме того, выполнены равенства: $\mathcal{F}(\mathrm{p}) \circ \iota_\mathrm{k} = \mathrm{r^V_{k,l}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}$ и $\mathcal{F}(\mathrm{q}) \circ \iota'_\mathrm{l} = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r^V_{k,l}}$.

Доказательство. Действительно, при фиксированных $(k,l) \in S$ существование по крайней мере одного $\mathrm{r^W_{k,l}} \in \{\mathrm{r^V_{k,l}}\}_{\mathrm{V} \in C_k}$ следует из $\mathbb{P}_L$-открытости морфизма $\mathcal{F}(\mathrm{f})$. Если $|C_k| > 1$, то рассмотрим элемент $\mathrm{U} \in C_k$ такой, что $\mathrm{U} \neq \mathrm{W}$. Ясно, что найдется кубический путь P_{t_U} в U, заканчивающийся в конечной точке t_U блока U. Тогда, поскольку $\bar{f}(t_U) = \bar{q}(\widehat{Q}, \widehat{Q}) = \bar{f}(r^W_{k,l}(t_l))$ и $\mathcal{F}(\mathrm{E}^2)$ — ПМ с di-односвязным полукубическим множеством, то $\bar{f}(P_{t_U}) \overset{s_1}{---} \cdots \overset{s_b}{---} \bar{f}(r^W_{k,l}(Q_l))$. А значит, так как $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ — $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм, то, применяя теорему 1 b раз, получаем, что существует кубический путь P'_U такой, что $P_{t_U} \overset{s_1}{---} \cdots \overset{s_b}{---} P'_U$, т.е. P'_U лежит в U, и $\bar{f}(P'_U) = \bar{f}(r^W_{k,l}(Q_l))$.

Ясно, что отображение $\mathrm{r^U_{k,l}}$, определяемое как $r^U_{k,l}(Q_l) = P'_U$, достраивается до морфизма категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$, используя равенство $\bar{f}(r^U_{k,l}(Q_l)) = \bar{f}(r^W_{k,l}(Q_l)) = \bar{q}(\iota'_l(Q_l))$. Из этого же равенства следует коммутативность нижнего внутреннего квадрата в диаграмме на рис. 3.5 для $\mathrm{r^U_{k,l}}$. Отсюда получаем, что верно и равенство $\mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r^U_{k,l}} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l} = \mathcal{F}(\mathrm{q}) \circ \iota'_\mathrm{l} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l}$. Следовательно, используя коммутативность левого внутреннего и внешнего квадратов, получаем, что $\mathcal{F}(\mathrm{f})|_\mathrm{U} \circ$

$r^U_{k,l} \circ \mathcal{F}(m)|_{k,l} = \mathcal{F}(f)|_U \circ \mathcal{F}(p) \circ \iota_k$, поскольку $r^U_{k,l}(\mathcal{F}(m)|_{k,l}(\bar{\square}_k)), \mathcal{F}(p)(\iota_k(\bar{\square}_k)) \subseteq U$. В силу следствия 4, коммутативен и верхний внутренний квадрат диаграммы на рис. 3.5 для $r^U_{k,l}$. $\square$

Рассмотрим диаграмму



где $I = \boxplus^0$ — начальный объект категории $op\mathbb{S}et_L$, состоящий из единственного куба нулевой размерности. Следовательно, найдутся морфизмы-вложения $\iota_{I,k} : I \hookrightarrow \bar{\square}_k$ и $\iota_{I,i} : I \hookrightarrow \bar{\square}_i$. Поскольку $I \in \{\bar{\square}_k\}_{k \le n^P}$, то существуют морфизмы $\{r^V_{I,l}\}_{V \in C_I}$ для всех $l \le n^Q$. Будем обозначать такие морфизмы как $r^V_l = r^V_{I,l}$. Заметим, что $C_I = C$.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма B. Пусть $V \in C$. Если $y^l \in \bar{\square}'_l$ и $y^j \in \bar{\square}'_j$ такие, что $\iota'_l(y^l) = \iota'_j(y^j) = y$ из $\mathcal{F}(\widehat{Q})$, то $r^V_l(y^l) = r^V_j(y^j)$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{F}(\widehat{Q})$ — ПМ с di-односвязным полукубическим множеством, то, по определению Q_l и Q_j, $\iota'_l(Q_l)$ и $\iota'_j(Q_j)$ гомотопны. Значит, достаточно проверить справедливость леммы в случае $\iota'_l(Q_l) \overset{s}{-\!\!-\!\!-} \iota'_j(Q_j)$. Пусть, например, $\iota'_l(\bar{\square}'_l) \subseteq \iota'_j(\bar{\square}'_j)$. Тогда существует морфизм-вложение $\iota'_{l,j} : \bar{\square}'_l \to \bar{\square}'_j$. Ясно, что $\iota'_l = \iota'_j \circ \iota'_{l,j}$. Из коммутативности нижних внутренних квадратов диаграммы на рис. 3.5 для r^V_l и r^V_j, получаем, что $\mathcal{F}(f) \circ r^V_j \circ \iota'_{l,j} = \mathcal{F}(f) \circ r^V_l$. Так как $\mathrm{r}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{V}}(\bar{\square}_{\mathrm{l}}')$, $\mathrm{r}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{V}}(\iota_{\mathrm{l,j}}'(\bar{\square}_{\mathrm{l}}')) \subseteq \mathrm{V}$, то требуемый результат очевиден, в силу следствия 4. $\square$

Так как для каждого куба y из $\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}})$ существует число $l \leq n^Q$ такое, что $y = \iota_l'(y^l)$, где $y^l \in \bar{\square}_l'$, то, по лемме B, равенство $r^V \circ \iota_l' = r_l^V$ для всех $l \leq n^Q$ дает отображение $\mathrm{r}^{\mathrm{V}} = \langle r^V, id_L \rangle : \mathcal{F}(\widehat{\mathrm{Q}}) \to \mathcal{F}(\mathrm{E}^1)$, являющееся морфизмом категории $\mathrm{op}\mathbb{S}\mathrm{et}_L$.

Рассмотрим произвольный $\bar{\square}_{\mathrm{k}}$ такой, что $\iota_k(\tau_k) = (\hat{P}, \hat{P})$, где τ_k — конечная точка $\bar{\square}_{\mathrm{k}}$. Выберем для k номер l такой, что $(k, l) \in S$. Так как $\mathcal{F}(\mathrm{f})$ — $\mathbb{P}_L$-открытый морфизм, найдется морфизм $\mathrm{r}_{\mathrm{k,l}}^{\mathrm{V}_0}$ (с некоторым $\mathrm{V}_0 \in C_k$) такой, что $\mathrm{r}_{\mathrm{k,l}}^{\mathrm{V}_0} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m})|_{k,l} = \mathcal{F}(\mathrm{p}) \circ \iota_{\mathrm{k}}$ и $\mathcal{F}(\mathrm{q}) \circ \iota_{\mathrm{l}}' = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r}_{\mathrm{k,l}}^{\mathrm{V}_0}$. Заметим, что тогда $\mathrm{V}_0 \in C_i$ для всех $i \leq n^P$. Действительно, продлим кубический путь $\iota_i(P_i)$ до некоторого кубического пути $\bar{P}$, содержащегося в $\mathcal{F}(\widehat{\mathrm{P}})$ и заканчивающегося в точке $(\hat{P}, \hat{P})$. Поскольку $\bar{P} \sim \iota_k(P_k)$, а значит, $\bar{p}(\bar{P}) \sim \bar{p}(\iota_k(P_k))$, и кубический путь $\bar{p}(\iota_k(P_k)) = r_{k,l}^{\mathrm{V}_0}(\bar{m}|_{k,l}(P_k))$ лежит в блоке V_0, то кубический путь $\bar{p}(\bar{P})$, а с ним и $\bar{p}(\iota_i(P_i))$, также лежат в блоке V_0. Следовательно, $\mathcal{F}(\mathrm{p})(\iota_{\mathrm{i}}(\bar{\square}_{\mathrm{i}})) \subseteq \mathrm{V}_0$. Таким образом, существует морфизм $\mathrm{r}_{\mathrm{i,j}}^{\mathrm{V}_0}$ для всех i, j таких, что $(i, j) \in S$.

Ясно, что $\mathrm{r}_{\mathrm{k,l}}^{\mathrm{V}_0} = \mathrm{r}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{V}_0}$. Действительно, в силу коммутативности нижних внутренних квадратов диаграммы на рис. 3.5 для $\mathrm{r}_{\mathrm{k,l}}^{\mathrm{V}_0}$ и $\mathrm{r}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{V}_0}$, имеем, что $\mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r}_{\mathrm{k,l}}^{\mathrm{V}_0} = \mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{V}_0}$. А так как $\mathrm{r}_{\mathrm{k,l}}^{\mathrm{V}_0}(\bar{\square}_{\mathrm{l}}')$, $\mathrm{r}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{V}_0}(\bar{\square}_{\mathrm{l}}') \subseteq \mathrm{V}_0$, то, по следствию 4, получаем нужный результат.

Учитывая вышесказанное, легко видеть, что $\mathrm{r}^{\mathrm{V}_0} \circ \mathcal{F}(\mathrm{m}) = \mathcal{F}(\mathrm{p})$ и $\mathcal{F}(\mathrm{f}) \circ \mathrm{r}^{\mathrm{V}_0} = \mathcal{F}(\mathrm{q})$. Тогда, используя формулу (3.2), имеем, что искомый морфизм $\upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{r}^{\mathrm{V}_0}) \circ \varsigma_{\widehat{\mathrm{Q}}} : \widehat{\mathrm{Q}} \to \mathrm{E}^1$ удовлетворяет следующим равенствам: $\mathrm{p} = \upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{p})) \circ \varsigma_{\widehat{\mathrm{P}}} = \upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{r}^{\mathrm{V}_0}) \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathrm{m})) \circ \varsigma_{\widehat{\mathrm{P}}} = \upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{r}^{\mathrm{V}_0}) \circ \varsigma_{\widehat{\mathrm{Q}}} \circ \mathrm{m}$ и, аналогично, $\mathrm{q} = \mathrm{f} \circ \upsilon_{\mathrm{E}^1} \circ \mathcal{G}(\mathrm{r}^{\mathrm{V}_0}) \circ \varsigma_{\widehat{\mathrm{Q}}}$. $\square$

В заключении сформулируем важное следствие полученных результатов.

Теорема 13. Два ПМ, размеченных с помощью одного и того же множества L действий, $\mathbb{P}_L$-эквивалентны, если и только если их образы при действии функтора универсальной di-накрывающей, представленные в виде поступательных Чу-пространств, $\mathbf{sP}_L$-эквивалентны.

Доказательство. Прямое следствие теорем 10, 11, 12, утверждения 16, следствия 3 и леммы 6 из статьи [30]. $\square$

Заключение

В рамках диссертационной работы были получены следующие основные результаты:

1. на кубических путях полукубических множеств определены эквивалентности, для которых сформулированы категорные критерии в терминах конструкций открытых морфизмов, путей-морфизмов, коалгебраических морфизмов, а также получен di-топологический критерий посредством существования общего di-накрывающего полукубического множества;

2. для категории полукубических пространств построены и исследованы сопряженные функторы, связывающие ее с категорией полукубических множеств и позволяющие перенести категорный критерий в терминах конструкций открытых морфизмов и di-топологический критерий эквивалентностей на полукубические пространства;

3. показана эквивалентность корефлексивной подкатегории di-односвязных полукубических множеств и категории поступательных пространств Чу, сохраняющая открытость морфизмов.

Литература

1. Букур, И. Введение в теорию категорий и функторов / И. Букур, А. Деляну. — М.:Мир, 1972.

2. Гельфанд, С. Методы гомотопической алгебры / С.И. Гельфанд, Ю.М. Манин. — М.: Наука, 1988.

3. Новиков, С. Топология / С.П. Новиков. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

4. Скурихин, Е. Когомологии и размерности топологических и равномерных пространств / Е.Е. Скурихин. — Владивосток: Дальнаука, 2008.

5. Скурихин, Е. Топологии гротендика на пространствах чу / Е.Е. Скурихин, А.Г. Сухонос // Математические труды. — 2008. — Т. 11(2). — С. 159–186.

6. Фоменко, А. Курс гомотопической топологии / А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. — М.: Наука, 1989.

7. Хусаинов, А. О группах гомологий полукубических множеств / А.А. Хусаинов // Сибирский математический журнал. — 2008. — Т. 49(1). — С. 224–237.

8. Хусаинов, А. Исследование параллельных систем методами теории категорий / А.А. Хусаинов. — Lambert Academic Publishing, 2012.

9. Berger, M. Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces / M. Berger, B. Gostiaux. — Springer-Verlag, 1987.

10. Borceux, F. Handbook of Categorical Algebra / F. Borceux. — Cambridge University Press, 1994.

11. Bubenik, P. Models and van kampen theorems for directed homotopy theory / Peter Bubenik // Homology, Homotopy and Applications. — 2009. — Vol. 11, no. 1. — P. 185–202.

12. Components of the fundamental category / Lisbeth Fajstrup, Eric Goubault, Martin Raussen, Emmanuel Haucourt // Applied Categorical Structures. — 2004. — Vol. 12. — P. 81–108.

13. Fahrenberg, U. Directed homology / U. Fahrenberg // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. — 2004. — Vol. 100. — P. 111–125.

14. Fahrenberg, U. A category of higher-dimensional automata / U. Fahrenberg // Lecture Notes in Computer Science. — 2005. — Vol. 3441. — P. 187–201.

15. Fajstrup, L. Dicovering spaces / L. Fajstrup // Homology, Homotopy, and Applications. — 2003. — Vol. 5, no. 2. — P. 1–17.

16. Fajstrup, L. Dipaths and dihomotopies in a cubical complex / Lisbeth Fajstrup // Advances in Applied Mathematics. — 2005. — Vol. 35. — P. 188–206.

17. Fajstrup, L. Erratum to “dicovering spaces” / L. Fajstrup // Homology, Homotopy and Applications. — 2011. — Vol. 13, no. 1. — P. 403–406.

18. Fajstrup, L. Algebraic topology and concurrency / Lisbeth Fajstrup, Martin Raussen, Eric Goubault // Theoretical Computer Science. — 2006. — Vol. 357, no. 1–3. — P. 241–278.

19. Gaucher, P. Topological deformation of higher dimensional automata / Philippe Gaucher, Eric Goubault // Homology, Homotopy and Applications. — 2003. — Vol. 5, no. 2. — P. 39–82.

20. Goubault, E. The Geometry of Concurrency: Ph. D. thesis / Ecole Normale Superieure. — Paris, 1995.

21. Goubault, E. Some geometric perspectives in concurrency theory / E. Goubault // Homology, Homotopy and Applications. — 2003. — Vol. 5, no. 2. — P. 95–136.

22. Goubault, E. Components of the fundamental category ii / Eric Goubault, Emmanuel Haucourt // Applied Categorical Structures. — 2007. — Vol. 15, no. 4. — P. 387–414.

23. Goubault, E. Homology of higher-dimensional automata / E. Goubault, T.P. Jensen // Lecture Notes in Computer Science. — 1992. — Vol. 630. — P. 254–268.

24. Grandis, M. Directed combinatorial homology and noncommutative tori (the breaking of symmetries in algebraic topology) / M. Grandis // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 2005. — Vol. 138. — P. 233–262.

25. Grandis, M. Directed algebraic topology / Marco Grandis. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. — Vol. 13 of New Mathematical Monographs.

26. Gupta, V. Chu Spaces: A Model of Concurrency: Ph. D. thesis / Stanford University. — Stanford, 1994.

27. Haucourt, E. Comparing topological models for concurrency / E. Haucourt // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. — 2009. — Vol. 230. — P. 111–127.

28. Hune, T. Timed bisimulation and open maps / T. Hune, M. Nielsen // Lecture Notes in Computer Science. — 1998. — Vol. 1450. — P. 378–387.

29. Jacobs, B. Simulations in coalgebra / B. Jacobs, J. Hughes // Theoretical Computer Science. — 2004. — Vol. 327, no. 1-2. — P. 71–108.

30. Joyal, A. Bisimulation from open maps / A. Joyal, M. Nielsen, G. Winskel // Information and Computation. — 1996. — Vol. 127, no. 2. — P. 164–185.

31. Kahl, T. Some collapsing operations for 2-dimensional precubical sets /

Th. Kahl // Homotopy and Related Structures. — 2012. — Vol. 7(2). — P. 281–298.

32. Lasota, S. Coalgebra morphisms subsume open maps / S. Lasota // Theoretical Computer Science. — 2002. — Vol. 280. — P. 123–135.

33. MacLane, S. Categories for the working mathematician / S. MacLane. — New York: Springer, 1998. — Vol. 5 of Graduate Texts in Mathematics.

34. Monteiro, L. A coalgebraic characterization of behaviors in the linear time – branching time spectrum / L. Monteiro // Lecture Notes in Computer Science. — 2008. — Vol. 5486. — P. 251–265.

35. Nielsen, M. Observing behaviour categorically / M. Nielsen, A. Cheng // Lecture Notes in Computer Science. — 1995. — Vol. 1026. — P. 263–278.

36. Nielsen, M. Petri nets and bisimulation / M. Nielsen, G. Winskel // Theoretical Computer Science. — 1996. — Vol. 153, no. 1-2. — P. 211–244.

37. Pratt, V. Modeling concurrency with geometry / V.R. Pratt // Proc. 18th Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages. — ACM Press, 1991. — P. 311–322.

38. Raussen, M. Invariants of directed spaces / Martin Raussen // Applied Categorical Structures. — 2007. — Vol. 15, no. 4. — P. 355–386.

39. Roggenbach, M. Towards a unified view of bisimulation: a comparative study / M. Roggenbach, M. Majster-Cederbaum // Theoretical Computer Science. — 2000. — Vol. 238. — P. 81–130.

40. Rutten, J. Universal coalgebra: a theory of systems / J.J.M.M. Rutten // Theoretical Computer Science. — 2000. — Vol. 249. — P. 3–80.

41. Sassone, V. Higher-dimensional transition systems / V. Sassone, G.L. Cattani // Proc. 11th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science. — Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1996. — P. 55–62.

42. Sharpe, R. Differential Geometry / R.W. Sharpe. — New York: Springer, 1997.

43. Bisimulation semantics for higher dimensional automata: Rep.: 5/1 / Stanford University; Executor: R. van Glabbeek: 1991.

44. van Glabbeek, R. On the expressiveness of higher dimensional automata / R.J. van Glabbeek // Theoretical Computer Science. — 2006. — Vol. 356, no. 3. — P. 265–290.

45. van Glabbeek, R. Configuration structures / R.J. van Glabbeek, G. D. Plotkin // Proc. 10th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science. — IEEE Computer Society Press, 1995. — P. 199–209.

46. Virbitskaite, I. Open maps and observational equivalences for timed partial order models / I.B. Virbitskaite, N.S. Gribovskaya // Fundamenta Informaticae. — 2004. — Vol. 60, no. 1-4. — P. 383–399.

47. Virbitskaite, I. A categorical view of timed behaviours / I.B. Virbitskaite, N.S. Gribovskaya, E.Best // Fundamenta Informaticae. — 2010. — Vol. 102, no. 1. — P. 129–143.

48. Winskel, G. Models for concurrency / G. Winskel, M. Nielsen. — London: Oxford University Press, 1005. — Vol. 4 of Handbook of Logic in Computer Science. — P. 1–148.

Список работ автора по теме диссертации

49. Ошевская, Е. Исследование геометрических свойств параллельных моделей / Е.С. Ошевская // Материалы XLI международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирск, апрель 2003. — НГУ, 2003. — С. 36–37.

50. Ошевская, Е. Об одной геометрической модели временных параллельных процессов / Е.С. Ошевская // Проблемы программирования. — 2004. — Т. 2-3. — С. 23–29.

51. Ошевская, Е. Эквивалентность категорий полукубических множеств и поступательных чу-пространств с сохранением открытости морфизмов / Е.С. Ошевская // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2011. — Т. 11, № 3. — С. 124–147.

52. Oshevskaya, E. A categorical account of bisimulation for timed higher dimensional automata / E.S. Oshevskaya // Proc. 15th International Workshop CS&P, Wandlitz (Germany), September 2006. — Humboldt University of Berlin, 2006. — P. 174–185.

53. Oshevskaya, E. Open maps bisimulations for higher dimensional automata models / E.S. Oshevskaya // Lecture Notes in Computer Science. — 2009. — Vol. 5699. — P. 274–286. — Proc. 17th International Symposium FCT, Wroclaw, Poland, September 2009 (русская расширенная версия принята в журнал «Математические труды»).

54. Matching equivalences on higher dimensional automata models: Rep.: 1/11 / Carl von Ossietzky Universitaet Oldenburg, Germany; Executor: E.S. Oshevskaya: 2011.

55. Oshevskaya, E. A categorical view of bisimulation for higher dimensional

automata / E.S. Oshevskaya, I.B. Virbitskaite, E. Best // Proc. 23rd International Workshop NWPT, Vasteras (Sweden), October 2011 / Ed. by C. Seceleanu P. Pettersson. — Malardalen University, 2011. — P. 102–104.

56. Oshevskaya, E. Relating categorical semantics for higher dimensional automata / E.S. Oshevskaya, I.B. Virbitskaite, E. Best // Proc. 20th International Workshop CS&P, Pultusk (Poland), September 2011 / Ed. by M. Szczuka et al. — Warsaw University, 2011. — P. 385–396.

57. Oshevskaya, E. Unifying equivalences for higher dimensional automata / E.S. Oshevskaya, I.B. Virbitskaite, E. Best // Fundamenta Informaticae. — 2012. — Vol. 119, no. 3-4. — P. 357–372.