ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Н. И. Александрова

СЕМИНАРЫ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Новосибирск
2007

УДК 512.8
ББК 22.143
А 46

Александрова Н. И. Семинары по высшей алгебре и аналитической геометрии: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007. 88 с.

Изложены необходимые для решения задач теоретические сведения по курсу высшей алгебры и аналитической геометрии, а также приведены задачи, используемые на практических занятиях на физическом факультете Новосибирского государственного университета в I семестре 1-го курса. На данный курс отводится 32 практических занятий, из них одно занятие посвящено контрольной работе.

Предназначено для студентов 1-го курса и преподавателей физического факультета.

Печатается по решению методической комиссии физического факультета.

Рецензент
ст. преп. каф. высшей математики ФФ НГУ А. П. Ульянов

© Новосибирский государственный университет, 2007

© Александрова Н. И., 2007

Семинар 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение. Мнимая единица $i = \sqrt{-1}$.

Определение. Комплексные числа $z = x + iy$, где x и y – действительные числа.

Определение. Операции сложения и умножения: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$, $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$.

Определение. Операция сопряжения: $\bar{z} = x - iy$, $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

Определение. Модуль числа: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Определение. Операция деления: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$, $z_2 \neq 0$.

Определение. Комплексная плоскость: $z = x + iy = (x, y)$, $x = \operatorname{Re} z$ – вещественная часть z или декартова координата вдоль вещественной оси, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть z или декартова координата вдоль комплексной оси, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – длина вектора или модуль комплексного числа z.

Геометрический смысл. Положение точки z на плоскости вполне определяется заданием её полярных координат: расстояния $r = |z|$ от начала координат до z и угла φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на z. Угол φ называется аргументом числа z и обозначается символом $\arg z = \varphi = arctg(y/x)$. По заданной точке z её модуль определяется единственным образом, а аргумент – с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \leq \pi$, называется главным. Комплексные числа не упорядочены, т. е. отношения больше или меньше бессмысленны. Операция сложения комплексных чисел соответствует операции сложения векторов. Полярные

координаты r и φ определяют декартовы координаты x и y по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Теорема. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$,

$|z_1 / z_2| = |z_1|/|z_2|$, $\arg(z_1 / z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Определение. Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, где φ – вещественное число.

Возведение в степень: $z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{i\varphi n}$.

Извлечение корня (формула Муавра):

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{re^{i(\varphi + 2\pi k)}} = \sqrt[n]{r}\exp\left[i(\varphi + 2\pi k)/n\right]$, $k = 0, 1, ..., n-1$.

Задачи

1.Найти модули и аргументы комплексных чисел:

a) $3i$; b) -2; c) $1+i$; d) $-1-i$; e) $2+5i$; f) $2-5i$;

g) $-2+5i$;h) $-2-5i$; i) $yi, y \neq 0$; j) $x+yi, x \neq 0$.

2.Вычислить:

a) $\frac{1}{i}$; b) $\frac{1-i}{1+i}$; c) $\frac{2}{1-3i}$; d) $(1+i\sqrt{3})^3$.

3.Найти все значения следующих корней и построить их:

a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[3]{i}$; c) $\sqrt[4]{-1}$; d) $\sqrt[6]{-8}$; e) $\sqrt[8]{1}$; f) $\sqrt{1-i}$;

g) $\sqrt[3]{-2+2i}$; h) $\sqrt{3+4i}$; i) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

4.Вычислить:

a) $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$; b) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; c) $\frac{(2-i)(3+4i)}{(1-i)(4-i)}$.

5.Описать множество комплексных чисел, удовлетворяющих условию:

a) $|z-2| = \mathrm{Re}\, z + 2$;

b) $|z-1|+|z+1|=3$;

c) $|z-2|+|z+2|=3$.

6.Найти все комплексные числа z, по модулю равные 1, при которых $z^2+(1+i)z$ принимает чисто мнимые значения. Изобразить соответствующее геометрическое место точек на плоскости C.

7.Решить уравнение $\bar{z}=z^{n-1}$, $n\neq 2$, n – натуральное.

8.Найти все комплексные числа, сопряженные своему квадрату.

9.Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2-1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках $-1, 1$ и z, проведенной из вершины z.

10.Найти вершины правильного n-угольника, если его центр находится в точке $z=a+ib$, а одна из вершин в точке $z_1=a+i(b+R)$.

11.Две вершины правильного треугольника находятся в точках $z_1=1, z_2=2+i$. Найти третью вершину.

12.Доказать, если $z_1+z_2+z_3=0$ и $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треуголь-ника, вписанного в единичную окружность.

13.Вычислить суммы:

a) $\sin x-\sin 2x+\ldots+(-1)^{n-1}\sin nx$;

b) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$;

c) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$.

Семинар 2. МНОГОЧЛЕНЫ

Определение. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ – многочлен от переменной x с коэффициентами a_i; $a_0\neq 0$ –

старший коэффициент, a_n – свободный член, n – степень многочлена, обозначается $\deg f$.

Определение. Многочлен f называется нулевым, если все его коэффициенты равны нулю.

Определение. C[x] – кольцо многочленов с коэффициентами в поле комплексных чисел C.

Определение. P[x] – кольцо многочленов с коэффициентами в поле рациональных чисел P.

Деление с остатком. Всякой паре многочленов $f, g \in C[x]$ сопоставляется одна и только одна пара многочленов $q, r \in C[x]$ такая, что $f = qg + r$, $\deg r < \deg g$. При этом r называют остатком, а q – частным. Если $r = 0$, то говорят, что f делится на g или g делит f. Это обозначают $g \mid f$.

Определение. Наибольшим общим делителем (НОД) двух многочленов f и g называется многочлен p, обладающий двумя свойствами:

1) $p \mid f$ и $p \mid g$ (f делится на p и g делится на p);

2) $q \mid f,\ q \mid g \Rightarrow q \mid p$ (из того, что f делится на q, g делится на q следует, что p делится на q).

Определение. Наименьшим общим кратным (НОК) двух многочленов f и g называется многочлен p, обладающий двумя свойствами

1) $f \mid p$ и $g \mid p$ (p делится на f и p делится на g);

2) $f \mid q,\ g \mid q \Rightarrow p \mid q$ (из того, что q делится на f, q делится на g, следует, что q делится на p).

Определение. Многочлены f, g называются взаимно простыми, если $\text{НОД}(f, g) = \text{const}$.

Определение. Многочлен f ненулевой степени называется неприводимым, если он не делится ни на какой многочлен g, у которого $0 < \deg g < \deg f$. В частности, всякий многочлен первой степени неприводим.

Определение. Число c называется корнем многочлена f или его нулем, если $f(c) = 0$.

Теорема Безу. Число c является корнем многочлена f тогда и только тогда, когда $x - c$ делит f.

Определение. Число c называется k-кратным корнем многочлена f, если f делится на $(x - c)^k$, но не делится на $(x - c)^{k+1}$.

Определение. Корень кратности 1 называется простым.

Теорема. Число корней многочлена $f \in C[x]$ с учетом их кратностей равно степени f: $k_1 + k_2 + ... + k_r = \deg f$.

Схема Горнера. Деление многочлена f на линейный многочлен $x - c$ удобно осуществлять по схеме Горнера более простой, чем алгоритм деления с остатком. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$, $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1}$. Тогда $b_0 = a_0$, … , $b_k = b_{k-1}c + a_k$, … , $b_{n-1} = b_{n-2}c + a_{n-1}$, $r = f(c) = b_{n-1}c + a_n$.

Теорема. Если число c является k-кратным корнем многочлена f, то при $k > 1$ оно будет $(k - 1)$-кратным корнем первой производной этого многочлена. Если же $k = 1$, то нет.

Теорема. Если целое число c служит корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то c будет делителем свободного члена этого многочлена.

Теорема. Если целочисленный многочлен, старший коэффициент которого равен 1, имеет рациональный корень, то этот корень будет целым числом.

Алгоритм для получения всех рациональных (дробных и целых) корней целочисленного многочлена: нужно найти все целые корни многочлена $g(y) = g(a_0x) = a_0^{n-1}f(x)$ и разделить их на a_0.

Алгоритм Евклида (способ нахождения НОД):

$f = q_1g + r_1$, $\deg r_1 < \deg g$,

$g = q_2 r_1 + r_2, \quad \deg r_2 < \deg r_1,$

$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \quad \deg r_3 < \deg r_2,$

. . . . .

$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k, \quad \deg r_k < \deg r_{k-1},$

$r_{k-1} = q_{k+1} r_k, \quad r_{k+1} = 0.$

Последний отличный от нуля остаток r_k является как раз наибольшим общим делителем двух многочленов f и g: $r_k = НОД(f, g)$.

Теорема. Существуют многочлены u, v такие, что $НОД(f, g) = uf + vg$.

Определение. Принадлежность двух каких-либо чисел a и b к одному и тому же классу по модулю m характеризуется тем, что эти два числа дают при делении на m один и тот же остаток (равноостаточны), так что $a = k_1 m + r_1$, $b = k_2 m + r_2$, $0 \le r_1 \le m$, $0 \le r_2 \le m$, и $r_1 = r_2$. Записывается это так: $a \equiv b \pmod m$. Это носит название «сравнения по модулю m» и читается так: a сравнимо с b по модулю m.

Задачи

1.Разделить уголком $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x - 1$ на $g(x) = x^2 + x + 1$.

2.Пользуясь схемой Горнера, разделить

a) $f(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3$ на $x - 3$;

b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 4x - 9$ на $x + 1$;

c) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$ на $x + 1$.

3.Найти кратность корня $x = 2$ многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

4.С помощью алгоритма Евклида найти наибольший общий делитель $d(x)$ функций $f(x), g(x)$. Найти многочлены $u(x), v(x)$ такие, что $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$.

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 10$, $g(x) = x^3 + 6x^2 - 9x - 14$;

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$, $g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$;

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

d) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.

5.Найти вещественный многочлен $f(x)$ наименьшей степени такой, что $f(x)$ делится на $(x^2 + 1)$, а $f(x) - 1$ делится на $(x^3 + 1)$.

6.Остатки от деления многочлена $f(x)$ на одночлены $(x - 1)$, $(x - 2)$, $(x - 4)$ равны, соответственно, $2,1,5$. Найти остаток от деления $f(x)$ на произведение $(x - 1)(x - 2)(x - 4)$.

7.Найти целые корни многочлена:

a) $f(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 2x + 2$;

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$;

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$;

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

8.Найти рациональные корни многочлена:

a) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$;

b) $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

Семинар 3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Определение. Рациональной дробью называется дробь f/g, где f и g многочлены из $P[x]$, $g \neq 0$. По определению, $f/g = f_1/g_1 \Leftrightarrow fg_1 = f_1 g$.

Определение. Степень дроби равна степени f минус степень g.

Определение. Рациональная дробь называется несократимой, если её числитель взаимно прост со знаменателем.

Определение. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то несократимая дробь называется правильной.

Теорема. Всякая рациональная дробь однозначно представима в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Определение. Правильная рациональная дробь f/g называется простейшей, если $g = p^n, n \geq 1$, где $p = p(x)$ – неприводимый многочлен, причем $\deg f < \deg p$.

Теорема. Каждая правильная рациональная дробь может быть разложена и притом единственным образом в сумму простейших дробей.

Задачи

1.Разложить многочлен $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 1$ по степеням $x+1$ и получить отсюда разложение дроби $f(x)/(x+1)^5$ в сумму простейших.

2.Разложить в сумму простейших дробей:

a) $\dfrac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}$; b) $\dfrac{x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$;

c) $\dfrac{x^4+3x^2+2x+5}{(x^2+x+1)(x+2)}$; d) $\dfrac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{(x^2+1)(x-1)^2(x+2)}$.

Семинар 4. ТРЕХМЕРНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется число равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними: $(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

Следствие. $\cos\varphi = (\vec{a},\vec{b})/|\vec{a}||\vec{b}|$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;

2) $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$;

3) $(\alpha\vec{a})(\beta\vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a}\vec{b})$;

4) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$;

5) Если $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ и $\varphi < \pi/2$, то $\vec{a}\vec{b} > 0$;

6) Если $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ и $\varphi > \pi/2$, то $\vec{a}\vec{b} < 0$;

7) $\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;

8) $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Определение. Пусть задана косоугольная система координат с базисом e_1, e_2, e_3. Матрицей Грама называется матрица с элементами $g_{ij} = (e_i, e_j)$.

Теорема. Если $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ в базисе e_1, e_2, e_3, то $\vec{a}\vec{b} = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} a_i b_j$.

Следствие. $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ в ортонормированном базисе.

Определение. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $\vec{a} \times \vec{b}$, который определяется следующими тремя условиями:

1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$;

3) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ направлен также относительно векторов $\vec{a}, \vec{b}$, как координатная ось Oz относительно координатных осей Ox, Oy.

Геометрические свойства векторного произведения:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ – коллинеарны;

2)если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу, то $|\vec{a} \times \vec{b}|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Алгебраические свойсва векторного произведения:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2) $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$;
3) $\vec{a} \times (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$;
4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
5) $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$;
6) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$;
7) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) + \vec{a}(\vec{b}, \vec{c})$;
8) $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{d})(\vec{b}, \vec{c})$.

Теорема. Если $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ в ортонормированном базисе.

Определение. $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ – смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Определение. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Определение. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется упорядоченной (или просто тройкой), если задано какой из них первый, какой второй и какой третий. Обычно тройка векторов записывается в порядке нумерации $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Определение. Правая тройка векторов или левая тройка векторов определяется по правилу правой руки.

Теорема. (геометрический смысл) Смешанное произведение $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ равно объему параллелепипеда,

построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «+», если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка, со знаком «–», если эта тройка левая.

Следствие. $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Следствие. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.

Следствие. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Теорема. Если $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \ \vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ в ортонормированном базисе.

Задачи

1.Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла OAB.

2.Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна нулю.

3.В треугольнике ABC даны длины его сторон $BC = 5$, $CA = 6$, $AB = 7$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$.

4.Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

5.Дан равносторонний треугольник ABC, у которого длины сторон равны a. Вычислить выражение $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

6.В треугольнике ABC проведены медианы *AD, BE, CF*. Вычислить выражение $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB}$.

7.Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами, и определить угол между ними:

a) $\vec{a} = \{8, 4, 1\}$, $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$;

b) $\vec{a} = \{2, 5, 4\}$, $\vec{b} = \{6, 0, -3\}$.

8.Даны два вектора $\vec{a} = \{1, 1, 1\}$, $\vec{b} = \{1, 0, 0\}$. Найти единичный вектор $\vec{c}$, перпендикулярный к вектору $\vec{a}$, образующий с вектором $\vec{b}$ угол в 60° и направленный так, чтобы тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ была правой.

9.Зная векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, найти:

a) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$; b) $\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})$; c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}/2)$.

10.Показать, что если три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не коллинеарны, то из равенств $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ вытекает соотношение $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ и обратно.

11.Показать, что если $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

12.Вычислить векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ и площадь параллеллограмма, построенного на этих векторах:

a) $\vec{a} = \{2, 3, 1\}$, $\vec{b} = \{5, 6, 4\}$; b) $\vec{a} = \{5, -2, 1\}$, $\vec{b} = \{4, 0, 6\}$;

13.Две тройки векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ называются взаимными, если векторы этих троек связаны соотношениями: $\vec{a}_i \vec{b}_j = 1$ при $i = j$, $\vec{a}_i \vec{b}_j = 0$ при $i \neq j$. Пользуясь операциями скалярного и векторного умножения, найти векторы $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ тройки, взаимной тройке векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Семинар 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Определение. Системой координат на плоскости или в пространстве называется правило, сопоставляющее каждой точке упорядоченный набор из двух или трех чисел, называемых координатами точки. Единственное требование, чтобы разным точкам соответствовали разные числа.

Определение. Аффинная система координат на плоскости задается указанием произвольной точки O, называемой началом системы координат, и двух неколлинеарных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, отложенных от точки O, и называемых базисными векторами этой системы координат. Прямые, проходящие через начало координат O параллельно базисным векторам $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, называются осями координат и обозначаются Ox, Oy. При этом координаты произвольной точки M находятся следующим образом. Через точку M проводят прямые, параллельные осям координат Ox, Oy. Пусть M_1 и M_2 – точки пересечения этих прямых соответственно с осями Ox, Oy. Отношение длины вектора $\overrightarrow{OM_1}$ к длине вектора $\bar{e}_1$ называется первой координатой точки M и обозначается x. Аналогично отношение длины вектора $\overrightarrow{OM_2}$ к длине вектора $\bar{e}_2$ называется второй координатой точки M и обозначается y. При этом пишут $M(x, y)$. Аналогично определяется аффинная система координат в пространстве любого числа измерений.

Определение. Аффинная система координат называется прямоугольной, если угол между любыми осями координат прямой, иначе её называют косоугольной.

Определение. Пусть наряду с базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, который будем называть старым, дан новый базис $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ с началом

O: $\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}\bar{e}_j$. Тогда матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется матрицей перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ к базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$.

Замечание. Так как векторы $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$ некомпланарны, то $\det A \neq 0$.

Теорема. Если $A = (a_{ij})$ – матрица перехода от старого базиса к новому, то старые координаты вектора выражаются через новые координаты вектора следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad x_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ji}x_i'.$$

Определение. Пусть $O'(x_0, y_0, z_0)$ – новое начало координат. Переносом начала координат называется преобразование: $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0, z' = z - z_0$, где x', y', z' – новые координаты вектора.

Утверждение. Пусть старая и новые системы координат прямоугольные, причем длины базисных векторов одинаковы. Тогда матрица перехода A ортогональная, т. е. $AA^T = E$, и формулы преобразования принимают вид

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{aligned}$$

Углы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – это углы между новыми и старыми базисными векторами, т. е.

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1\cos\alpha_1 + e_2\cos\beta_1 + e_3\cos\gamma_1, \\ e_2' &= e_1\cos\alpha_2 + e_2\cos\beta_2 + e_3\cos\gamma_2, \\ e_3' &= e_1\cos\alpha_3 + e_2\cos\beta_3 + e_3\cos\gamma_3. \end{aligned}$$

Это преобразование соответствует повороту прямоугольной системы координат в пространстве. В плоском случае поворот прямоугольной системы координат соответствует следующему преобразованию:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

где α – это угол между векторами e_1, e_1', отсчитываемый в положительном направлении от вектора e_1.

Задачи

1.Найти формулы преобразования аффинной системы координат на плоскости в каждом из следующих случаев, если даны старые координаты новых единичных векторов и старые координаты нового начала координат:

a) $O'E_1' = \{2, 5\}$, $O'E_2' = \{7, 9\}$, $O'(3, 1)$;

b) $O'E_1' = \{5, 0\}$, $O'E_2' = \{0, 4\}$, $O'(3, 5)$;

c) $O'E_1' = \{0, 2\}$, $O'E_2' = \{-7, 0\}$, $O'(0, 2)$.

2.Найти формулы преобразования аффинной системы координат, если даны старые координаты концов новых единичных векторов и нового начала координат:

a) $E_1'(2, 5), E_2'(-3, 7), O'(5, 4)$;

b) $E_1'(0, 0), E_2'(0, 1), O'(1, 0)$;

c) $E_1'(a, 0), E_2'(0, b), O'(a, b)$.

3.Даны две системы координат Oxy и $O'x'y'$. Координаты x и y произвольной точки относительно первой системы координат выражаются через ее координаты x' и y' относительно второй системы координат следующими формулами: $x = 2x' - 5y' + 3$, $y = -x' - 5y' - 2$. Найти координаты начала второй системы и единичных векторов ее осей относительно первой системы.

4.Новая система координат получена из старой переносом начала в точку $O'(3,-4)$ и поворотом на угол α такой, что $\cos\alpha = 12/13$, $\sin\alpha = -5/13$. Найти координаты точки $A(6,-2)$ в новой системе.

5.Написать формулы преобразования прямоугольной системы координат на плоскости в прямоугольную систему, оси которой имеют направления биссектрис координатных углов первой системы.

6.Даны две системы кординат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. По отношению к первой системе начало второй находится в точке $O'(2,1,3)$, а единичные векторы второй системы суть $\vec{e}_1'\{2,4,1\}$, $\vec{e}_2'\{0,4,4\}$, $\vec{e}_3'\{1,1,0\}$. При этих условиях:

a)написать выражения координат точек относительно первой системы через их координаты во второй;

b)выразить координаты точек относительно второй системы через их координаты в первой системе;

c)найти координаты начала и единичных векторов первой системы относительно второй.

7.Найти формулы перехода от одной прямоугольной системы координат к другой при условии, что начала этих систем различны, а концы базисных векторов совпадают.

Семинар 6, 7. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Прямая на плоскости

Определение. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ – параметрическое уравнение прямой в векторной форме. Здесь $\vec{a} = (a_x, a_y)$ называется направляющим вектором прямой, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ – точка, через которую проходит прямая.

Определение. $\begin{cases} x(t) = x_0 + a_x t \\ y(t) = y_0 + a_y t \end{cases}$ – параметрическое задание прямой в координатах.

Определение. $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$ – общее уравнение прямой.

Определение. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0).

Определение. $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 = 1$ – нормальное уравнение прямой в прямоугольной системе координат.

Определение. $\vec{n} = (A, B)$ – вектор, ортогональный прямой, $\vec{a} = (-B, A)$ – вектор, параллельный прямой (в прямоугольной системе координат).

Определение. $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$ – уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Теорема. $d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – расстояние от точки (x, y) до прямой $Ax + By + C = 0$ в прямоугольной системе координат.

Определение. Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется угловым коэффициентом этой прямой: $k = tg\alpha$.

Определение. $y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k .

Определение. $y - y_1 = k(x - x_1)$ – уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей угловой коэффициент k .

Определение. $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ – угол между двумя прямыми.

Определение. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, $\{a, 0\}$ – точка пересечения с осью Ox; $\{0, b\}$ – с осью Oy.

Задачи

1.Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + y + 1 = 0$, $x + 14y + 13 = 0$ перпендикулярно вектору $a = \{1, 1\}$. Компоненты матрицы Грама: $g_{11} = g_{12} = g_{21} = 1, g_{22} = 2$.

2.Написать в параметрической форме уравнения следующих прямых:

a) $3x + 6y + 5 = 0$; b) $x - 2y - 4 = 0$; c) $y = -3x + 5$;

d) $x = 2$; e) $2x + 3y = 0$.

3.Написать общее уравнение прямой:

a) $x = t,\ y = 1 - 3t$; b) $x = 2 + 5t,\ y = 4 - 7t$.

4.Дан треугольник ABC: $A(-2, 3), B(4, 1), C(6, -5)$. Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A.

5.Дан треугольник ABC: $A(4, 4), B(-6, -1), C(-2, -4)$. Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника, проведенной из вершины C.

6.Установить какие из нижеследующих пар прямых будут перпендикулярны:

a) $x - 2y + 3 = 0,\quad 2x + y - 5 = 0$;

b) $2x + 3y - 6 = 0,\quad 2x - 3y + 4 = 0$;

c) $3x + 7y + 4 = 0,\quad 7x - 3y + 2 = 0$;

d) $5x + 6y - 8 = 0,\quad 6x + 5y + 2 = 0$;

e) $x - y = 0,\quad x + y = 0$;

f) $x + 3,\quad y - 2 = 0$.

7.Даны две точки $A(3, 3)$ и $B(0, 2)$. На прямой $x + y - 4 = 0$ найти точку, из которой отрезок AB виден под углом 45^{o}.

8.Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x - 4y - 3 = 0$, $5x + 12y + 2 = 0$, $3x + 4y + 390 = 0$.

9.Определить положение точек $A(0,\ 0), B(2,\ 1), C(-3,\ 1), D(3,\ -1), E(-1,\ 1), F(4,\ 2), G(1,\ -1), H(-6,\ 4)$ относительно прямой $2x + 3y = 0$.

10.Через точку пересечения прямых $3x - 2y + 4 = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x + 7y = 0$.

Плоскость в пространстве

Определение. $\vec{r}(u,v) = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$ – параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точку $\vec{r}_0$ параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение. $Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ – общее уравнение плоскости.

Определение. $Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 = 1$ – нормальное уравнение плоскости в прямоугольной системе координат, $|D|$ – расстояние от плоскости до начала координат.

Определение. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0).

Определение. $\vec{n} = \{A, B, C\}$ – вектор, ортогональный плоскости в прямоугольной системе координат.с

Теорема. $d = \dfrac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ – расстояние от точки (x, y, z) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ в прямоугольной системе координат.

Определение. $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $\vec{r}_0$ ортогонально вектору $\vec{n}$.

Определение. $\vec{n}\cdot\vec{r}+D=0$ – уравнение плоскости, ортогональной вектору $\vec{n}$.

Определение. $(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{a},\vec{b})=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $\vec{r}_0$ параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение. $\vec{r}=\vec{r}_0+u(\vec{r}_1-\vec{r}_0)+v\vec{a}$ – уравнение плоскости, проходящей через точки $\vec{r}_0,\vec{r}_1$ параллельно вектору $\vec{a}$.

Определение. $(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{r}_1-\vec{r}_0,\vec{a})=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точки $\vec{r}_0,\vec{r}_1$ параллельно вектору $\vec{a}$.

Определение. $(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{r}_1-\vec{r}_0,\vec{r}_2-\vec{r}_1)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точки $\vec{r}_0,\vec{r}_1,\vec{r}_2$.

Определение. $\vec{r}=\vec{r}_0+u(\vec{r}_1-\vec{r}_0)+v(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$ – параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точки $\vec{r}_0,\vec{r}_1,\vec{r}_2$.

Определение. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – уравнение плоскости в отрезках; $\{a,0,0\}$ – точка пересечения с осью Ox; $\{0,b,0\}$ – с осью Oy; $\{0,0,c\}$ – с осью Oz.

Определение. $\cos\varphi=\pm\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$ – угол между двумя плоскостями.

Задачи

1.Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A(2,\ 3,\ 1), B(3,\ 1,\ 4), C(2,\ 1,\ 5)$.

2.Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3,\ 5,\ 7)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

3.Определить отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью $x-y+7z-4=0$.

4.Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3,7,2)$ и параллельной двум векторам $\{4,\ 1,\ 2\}, \{5,\ 3,\ 1\}$.

5.Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $(4,\ 5,\ 2)$, $(6,\ 2,\ 4)$, и параллельной вектору $\{1,\ 2,\ 1\}$.

6.Даны четыре вершины тетраэдра $A(3,\ 5,\ -\ 1)$, $B(7,\ 5,\ 3)$, $C(9,\ -\ 1,\ 5)$, $D(5,\ 3,\ -\ 3)$. Написать уравнения плоскостей, равноудаленных от вершин тетраэдра.

7.Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям:

a) $x = 2 + 3u - 4v,\ y = 4 - v,\ z = 2 + 3u$;

b) $x = u + v,\ y = u - v,\ z = 5 + 6u - 4v$.

8.Составить параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точку $(3,\ -\ 5,\ 1)$ и параллельной плоскости $x - 2y + 4z = 0$.

9.Найти косинусы углов между двумя плоскостями:

a) $2x - y + 3z = 0,\ x + 4y - 6z = 0$;

b) $x + 3y - 4z + 5 = 0,\ 2x + 2y + 2z - 7 = 0$.

10.Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ и образующей с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$ угол 45°.

11.Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой пересечения плоскости $x - 2y + 4z - 3 = 0$ с плоскостью Oxz.

12.Определить расстояния от точек $A(3, 5, 1)$, $B(7, -\ 1, 2)$, $C(2, 0, 4)$ до плоскости $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

13.Составить уравнения биссекторных плоскостей углов между двумя плоскостями $7x + y - 6 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$.

14.Найти проекцию точки $M_0(\vec{r}_0)$ на плоскость $\vec{r} \cdot \vec{n} = D$.

15.Найти зеркальное отражение точки $M_0(\vec{r}_0)$ относительно плоскости $\vec{r} \cdot \vec{n} = D$.

16.Найти проекцию точки $M_0(\vec{r}_0)$ на плоскость $\vec{r} = \vec{r}_1 + u\vec{a} + v\vec{b}$.

Прямая в пространстве

Определение. $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ – параметрическое уравнение прямой. Здесь $\vec{a}$ называется направляющим вектором прямой, $\vec{r}_0$ – точка, через которую проходит прямая.

Определение. $\begin{cases} x(t) = x_0 + a_x t \\ y(t) = y_0 + a_y t \\ z(t) = z_0 + a_z t \end{cases}$ – параметрическое задание прямой.

Определение. $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ – каноническое уравнение прямой.

Определение. $\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)$ – уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Определение. $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ – уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Теорема. Две прямые $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, $\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t\vec{b}$ лежат в одной плоскости $\Leftrightarrow$ $(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Теорема. $d = \dfrac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$ – расстояние от точки $\vec{r}_1$ до прямой $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{a}$.

Теорема. $d = \dfrac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ – кратчайшее расстояние между прямыми $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, $\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t\vec{b}$.

Утверждение. Условие параллельности или совпадения двух прямых $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, $\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + t\vec{b}$ имеет вид: $\vec{a} = \lambda \vec{b}, \lambda \neq 0$.

Утверждение. Условие ортогональности двух прямых имеет вид: $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Задачи

1.Составить уравнения прямой, проходящей через точки:

a) $M_1(2,\ 3,\ 1)$, $M_2(4,\ 6,\ 9)$;

b) $M_1(7,\ -1,\ 2)$, $M_2(5,\ -1,\ 4)$;

2.Составить параметрические уравнения прямых:

a) $x - 2y + 4z = 0$, $3x - 2y + 5z = 0$;

b) $x + y - z + 5 = 0$, $2x - y + 2z - 2 = 0$.

3.Найти проекцию прямой на плоскость Oxy:

a) $5x + 8y - 3z + 9 = 0$, $2x - 4y + z - 1 = 0$;

b) $\dfrac{x-3}{-5} = \dfrac{y-4}{6} = \dfrac{z-6}{8}$.

4.Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями $(0,\ y_1,\ z_1)$, $(x_1,\ 0,\ z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью.

5.Найти расстояние от точки $(1,\ 3,\ 5)$ до прямой, по которой пересекаются плоскости $2x + y + z - 1 = 0$, $3x = y + 2z - 3 = 0$.

6.Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

a) $x = 3 + t, y = 1 - t, z = 2 + 2t$ и $x = -t, y = 2 + 3t, z = 3t$;

b) $x + y - z + 1, x + y = 0$ и $x - 2y + 3z - 6 = 0$, $2x - y + 3z - 6 = 0$.

7.Установить какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают:

a) $x = 1 + 2t,\ y = 7 + t,\ z = 3 + 4t$ и
$x = 6 + 3t,\ y = -1 - 2t,\ z = -2 + t$.

b) $x = 1 + 2t,\ y = 2 - 2t,\ z = -t$ и $x = -2t,\ y = -5 + 3t,\ z = 4$.

c) $x = 2 + 4t,\ y = -6t,\ z = -1 - 8t$ и
$x = 7 - 6t,\ y = 2 + 9t,\ z = 12t$.

d) $x = 1 + 9t,\ y = 2 + 6t,\ z = 3 + 3t$ и
$x = 7 + 6t, y = 6 + 4t,\ z = 5 + 2t$.

8.Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

a) $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1},\quad 3x + 5y - z - 2 = 0.$

b) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3},\quad 3x - 3y + 2z - 5 = 0.$

Семинар 8, 9. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА

Определение. Система уравнений вида

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

называется системой линейных алгебраических уравнений. Здесь m и n – произвольные целые положительные числа.

Определение. Число b_i называется свободным членом i-го уравнения.

Определение. Система называется однородной, если $b_i = 0$ для $i = 1, \ldots, m$.

Определение. Коэффициенты при неизвестных составляют прямоугольную таблицу:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

называемую матрицей размера $m \times n$ и сокращенно обозначаемую символом (a_{ij}) или просто буквой A.

Наряду с матрицей (2) рассматривают и расширенную матрицу $(a_{ij} \mid b_i)$ системы (1), получаемую из (2) добавлением столбца свободных членов.

Определение. Если каждое из уравнений системы (1) обращается в тождество после замены неизвестных x_i числами x_i^0, то упорядоченный набор из n чисел $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ называется решением системы (1).

Определение. Система, не имеющая ни одного решения, называется несовместной. Если же у системы есть решения, то она называется совместной и притом определенной, если решение единственно. Решений может быть и более одного, тогда система называется неопределенной.

Определение. Пусть нам дана ещё одна линейная система того же размера:

$$\begin{aligned} &a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ &a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{aligned} \qquad (3)$$

Линейные системы (1), (3) называются эквивалентными, если они либо несовместны, либо совместны и обладают одними и теми же решениями.

Определение. Элементарными преобразованиями системы уравнений называются следующие преобразования:

a) если в системе (1) все уравнения, кроме i-го и k-го, остались прежними, а i-е и k-е уравнения поменялись местами;

b) если в системе (1) все уравнения, кроме i-го, остались прежними, а к i-му уравнению прибавлено k-е, умноженное на α.

Теорема. Две линейные системы (1) и (3) эквивалентны, если одна получается из другой путем применения конечной последовательности элементарных преобразований.

Метод Гаусса (приведение к ступенчатому виду). Путем последовательного применения элементарных преобразований можно перейти от заданной системы уравнений к системе более простого вида.

Среди коэффициентов a_{i1} имеется хотя бы один отличный от нуля. Если $a_{11} = 0$, то поменяем местами первое уравнение с таким j-м, что $a_{j1} \neq 0$. Обозначим его через a'_{11}. Вычтем из i-го уравнения $(i = 2, ..., m)$ новой системы первое уравнение, умноженное на a_{i1}/a'_{11}. В результате получим систему, в которой x_1 входит только в первое уравнение. При этом может оказаться, что вторая неизвестная также не входит во все уравнения с номером $i > 1$. Пусть x_k – неизвестная с наименьшим номером, которая входит в какое-нибудь уравнение, не считая первого. Получим систему

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + \quad & \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ & a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a'_{mk}x_k + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{aligned} \qquad k > 1, \quad a'_{11} \neq 0.$$

Не обращая внимания теперь на первое уравнение, применим ко всем оставшимся те же рассуждения, что и ранее. После ряда элементарных преобразований система примет вид

$$
\begin{aligned}
a''_{11}x_1 + \quad & \ldots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\
a''_{2k}x_k + \quad & \ldots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\
a''_{3l}x_l + \ldots & + a''_{3n}x_n = b''_m \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a''_{ml}x_l + \ldots & + a''_{mn}x_n = b''_m,
\end{aligned}
$$

Здесь $l > k > 1, \quad a''_{11} \neq 0, \quad a''_{2k} \neq 0$.

Будем применять этот процесс пока это возможно. При этом система примет вид

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_{11}x_1 + \quad & \ldots + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1, \\
\overline{a}_{2k}x_k + \quad & \ldots + \overline{a}_{2n}x_n = \overline{b}_2, \\
\overline{a}_{3l}x_l + \quad & \ldots + \overline{a}_{3n}x_n = \overline{b}_3 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overline{a}_{rs}x_l + \ldots & + \overline{a}_{rn}x_n = \overline{b}_r, \\
0 = & \ \overline{b}_{r+1}, \\
& \ldots\ldots\ldots \\
0 = & \ \overline{b}_m.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Здесь $m > \ldots > s > l > k > 1, \quad \overline{a}_{11} \cdot \overline{a}_{2k} \cdot \overline{a}_{3l} \cdot \ldots \cdot \overline{a}_{rs} \neq 0$.

Про систему уравнений вида (4) говорят, что она имеет ступенчатый вид.

Теорема. Всякая система линейных уравнений эквивалентна системе, имеющей ступенчатый вид.

Очевидно, что если система уравнений (4) содержит уравнения вида $0 = \overline{b}_t$ с $\overline{b}_t \neq 0$, то эта система несовместна.

Определение. Пусть $\overline{b}_t = 0$ при $t > r$. Назовем неизвестные $x_1, x_k, x_l, \ldots, x_s$ главными, а остальные неизвестные, если таковые имеются, – свободными.

Придадим свободным неизвестным произвольные значения и подставим их в уравнения системы (4). Тогда значения

главных неизвестных определяются однозначно из системы (4).

Задачи

Исследовать совместность и найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений:

1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,$
$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2,$
$2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7,$
$3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12,$
$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20;$

2) $12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5,$
$16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8,$
$18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9,$
$10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4;$

3) $10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25,$
$15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40,$
$25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65,$
$30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95;$

4) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4,$
$x_2 - x_3 + x_4 = -3,$
$x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 1,$
$-7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3;$

5) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11,$
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12,$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13,$
$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1;$

6) $18x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5,$
$-12x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 12,$
$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3,$
$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2.$

Семинар 10. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Векторным пространством V называется множество, на элементах которого, называемых векторами, определены две операции: сложения векторов ($a, b \to a + b$) и умножения вектора на число (λ – число, a – вектор; $\lambda, a \to \lambda a$) так, что выполнены аксиомы векторного пространства:

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$; 2) $a + b = b + a$;
3) $\exists\, 0 : a + 0 = a$; 4) $\exists\, -a : a + (-a) = 0$;
5) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$; 6) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
7) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$; 8) $1 \cdot a = a$.

Определение. Система векторов $a_1, ..., a_n$ называется линейно независимой, если из того, что некоторая их линейная комбинация равна нулю $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0\right)$, следует, что все коэффициенты равны нулю ($\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$).

Утверждение. Пусть $a_1, ..., a_n$ – линейно независимая система векторов и вектор a является линейной комбинацией векторов $a_1, ..., a_n$: $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$. Тогда, коэффициенты $\lambda_1, ..., \lambda_n$ определены однозначно и называются координатами вектора a относительно линейно независимой системы векторов $a_1, ..., a_n$.

Определение. Базисом векторного пространства называется максимальная линейно независимая система векторов.

Определение. Размерностью векторного пространства V называется максимальное число линейно независимых векторов, содержащихся в этом пространстве и обозначается $\dim V$. Если $\dim V = n$, то часто пишут V^n.

Определение. Подмножество P векторного пространства V называется подпространством, если оно замкнуто относительно операций над векторами, т. е. если $a, b \in P$, то $a + b \in P$, и если $a \in P$, то $\forall \lambda \quad \lambda a \in P$, где λ – число.

Определение. Линейной оболочкой множества векторов $x_1, ..., x_n$ называется совокупность всевозможных линейных комбинаций вида $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$, где λ_i – числа.

Утверждение. Линейная оболочка является векторным пространством.

Теорема. Если $A = (a_{ij})$ – матрица перехода от старого базиса к новому, т. е. $e_i^{'} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, то старые координаты вектора выражаются через новые координаты вектора следующим образом: $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_i^{'}$.

В матричном виде эту теорему можно сформулировать так: Если $E' = EA$, то $X = AX'$, где E' – матрица, составленная из векторов столбцов нового базиса, E – матрица, составленная из векторов столбцов старого базиса, $X' = (x_1', ..., x_n')^T$, $X = (x_1, ..., x_n)^T$.

Задачи

1.Доказать утверждения:

a)конечная система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима;

b)конечная система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима;

c)если система векторов линейно независима, то любая её подсистема также линейно независима;

d)если векторы $a_1, ..., a_k$ линейно независимы, а векторы $a_0, a_1, ..., a_k$ линейно зависимы, то вектор a_0 является линейной комбинацией векторов $a_1, ..., a_k$.

2.Может ли быть линейно зависимой система, состоящая из одного вектора?

3.Доказать, что для любых трех векторов a, b, c и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha a - \beta b, \gamma b - \alpha c, \beta c - \gamma a$ линейно зависимы.

4.Проверить, что векторы $a = \{-5, -1\}$, $b = \{-1, 3\}$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $c = \{-1, 2\}, d = \{2, -6\}$ в этом базисе.

5.Проверить, что векторы $a = \{4, 1, -1\}, b = \{1, 2, -5\}$, $c = \{-1, 1, 1\}$ образуют базис в пространстве. Найти координаты векторов $d = \{4, 4, -5\}$, $e = \{2, 4, -10\}$ в этом базисе.

6.Зная радиус-векторы r_1, r_2, r_3 вершин треугольника, найти радиус-вектор центра окружности, вписанной в треугольник.

7.Выяснить, является ли векторным пространством данное множество векторов в n-мерном пространстве, и если является, то найти его размерность:

a)множество векторов, все координаты которых равны между собой;

b)множество векторов, первая координата которых равна нулю;

c)множество векторов, сумма координат которых равна 0;

d)множество векторов, сумма координат которых равна 1;

e)множество векторов плоскости, параллельных данной прямой;

f) множество векторов трехмерного пространства, перпендикулярных данной прямой.

8.Доказать, что множество матриц размера $m \times n$ образует векторное пространство относительно обычных операций сложения матриц и умножения матрицы на число. Найти размерность и какой-нибудь базис этого пространства.

9.Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки системы многочленов $(1+t)^3,\ t^3,\ 1,\ t+t^2$.

10.Доказать, что многочлены $2t+t^5,\ t^3-t^5,\ t+t^3$ образуют базис в пространстве нечетных многочленов степени не выше 5, и найти координатный столбец многочлена $5t-t^3+2t^5$ в этом базисе.

11.Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве квадратных матриц порядка 2, и найти координатный столбец матрицы $\begin{pmatrix}5 & 14\\ 6 & 13\end{pmatrix}$ в этом базисе.

12.Выяснить, какие из следующих совокупностей матриц порядка n над полем F образуют подпространства в пространстве матриц $M_n(F)$, найти их базисы и размерности:

a)все матрицы;

b)симметрические матрицы;

c)невырожденные матрицы;

d)вырожденные матрицы;

e)матрицы со следом равным нулю.

13.Доказать, что при любом натуральном n множество многочленов степени не выше n (обозначается $P^{(n)}$) образует конечномерное векторное пространство относительно обычных операций сложения многочленов и умножения на число; найти размерность и указать базис этого пространства.

14.Векторы базисов $f = (f_1, ..., f_n)$ и $g = (g_1, ..., g_n)$ заданы своими координатными столбцами относительно третьего базиса $e = (e_1, ..., e_n)$. Найти матрицу перехода S от базиса f к базису g.

Семинар 11. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

Определение. Таблица чисел $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)$ называется матрицей размера $m \times n$.

Определение. Пусть $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ – матрицы одинакового размера, α – число. Если $\forall i, j \quad b_{ij} = \alpha a_{ij}$, то говорят, что матрица B есть произведение матрицы A на число α и пишут $B = \alpha A$.

Определение. Пусть $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ – матрицы одинакового размера. Если $\forall i, j \quad c_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, то говорят, что матрица C есть сумма двух матриц A и B, и пишут $C = B + A$.

Определение. Пусть матрица B имеет размеры $m \times n$, а матрица A – размеры $n \times p$. Если $\forall i, j \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$, то говорят, что матрица C есть произведение двух матриц A и B, и пишут $C = BA$ (число столбцов матрицы B должно быть равно числу строк матрицы A). Матрица C имеет размеры $m \times p$.

Определение. Если $\forall i, j \quad b_{ij} = a_{ji}$, то говорят, что матрица B получена транспонированием матрицы A, и пишут $B = A^T$.

Определение. Если $\forall\, i, j \quad b_{ij} = \overline{a}_{ij}$, то говорят, что матрица B называется комплексно-сопряженной к матрице A, и пишут $B = \overline{A}$.

Определение. Матрица A называется нулевой, если $\forall\, i, j \quad a_{ij} = 0$, и пишут $A = 0$.

Определение. Квадратная матрица называется диагональной, если $a_{ij} = 0$ для $i \neq j$, т. е. все её недиагональные элементы равны нулю.

Определение. Диагональная матрица порядка n, у которой все диагональные элементы равны 1, называется единичной и обозначается E.

$E = \left(\delta_{ij}\right)$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера.

Определение. Матрица называется симметрической (симметричной), если $\forall\, i, j \quad a_{ij} = a_{ji}$ или $A^T = A$.

Определение. Матрица называется кососимметрической (кососимметричной), если $\forall\, i, j \quad a_{ij} = -a_{ji}$ или $A^T = -A$.

Определение. Элементарными преобразованиями матриц называются следующие преобразования:

1)умножение строки матрицы на число не равное нулю;

2)прибавление к одной строке матрицы другой её строки;

3)перестановка двух строк матрицы;

4)умножение столбца матрицы на число не равное нулю;

5)прибавление к одному столбцу матрицы другого её столбца;

6)перестановка двух столбцов матрицы.

Теорема. Элементарное преобразование строк равносильно умножению матрицы A слева на некоторую невырожденную матрицу T, т.е. $\widetilde{A} = TA$. Элементарное преобразование столбцов равносильно умножению матрицы A справа на некоторую невырожденную матрицу T, т. е. $\widetilde{A} = AT$.

Задачи

1.Перемножить матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

2.Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; c) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

3.Найти $f(A)$, если

a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

4.Найти матрицы, умножая на которые слева матрицу A, получим элементарные преобразования над строками матрицы A.

5.Найти матрицы, умножая на которые справа матрицу A, получим элементарные преобразования над столбцами матрицы A.

6.Доказать, что $(AB)^T = B^T A^T$.

7.Найти все матрицы, коммутативные с матрицей:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8.Как изменится произведение AB матриц A и B, если:

a)переставить i-ю и j-ю строки матрицы A;

b)к i-й строке матрицы A прибавить j-ю строку, умноженную на число c;

c)переставить i-й и j-й столбцы матрицы B;

d)к i-му столбцу матрицы B прибавить j-й столбец, умноженный на число c?

9.Найти все матрицы второго порядка, квадраты которых равны нулевой матрице.

10.Найти все матрицы второго порядка, кубы которых равны нулевой матрице.

Семинар 12. ПЕРЕСТАНОВКИ И ПОДСТАНОВКИ

Определение. Пусть Ω – конечное множество из n элементов. Поскольку природа его элементов для нас несущественна, удобно считать, что $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$. Группа $S(\Omega)$ всех взаимно-однозначных отображений $\Omega \to \Omega$ называется симметрической группой степени n и обозначается как S_n.

Определение. Элементы группы S_n, обычно обозначаемые строчными буквами греческого алфавита, называются подстановками. Подстановку $\pi : i \to \pi(i)$, $i = 1, 2, ..., n$ изображают двухрядным символом $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & ... & i_n \end{pmatrix}$, где $i_k = \pi(k), k = 1, 2, ..., n$. Как всегда, e – единичная подстановка: $e(i) = i$, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Определение. Если $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & ... & i_n \end{pmatrix}$ – подстановка, то конечная последовательность $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ называется перестановкой чисел $1, 2, ..., n$.

Определение. Подстановки $\sigma, \tau \in S_n$ перемножаются в соответствии с общим правилом композиции отображений: $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. Например:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}, \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,4\,3\,2 \end{pmatrix}, \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\,1\,4 \end{pmatrix}.$$

Определение. Всех различных подстановок в группе S_n получается $n!$. Это число называется порядком группы S_n.

Разложим теперь подстановки из S_n в произведение более простых подстановок. Идею разложения поясним схематически на примере σ, τ.

Определение. Подстановка σ, кратко записываемая в виде $\sigma = (1234)$ или, что то же самое, в виде $\sigma = (2341) = (3412) = (4123)$, носит название цикла длины 4, а подстановка $\tau = (14)(23)$ – произведения двух независимых циклов (14) и (23) длины 2. Заметим, что $\sigma^2 = (13)(24)$, $\sigma^4 = e$, $\tau^2 = e$. Цикл длины 1 действует как единичная подстановка, естественно такие циклы в произведении $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \ldots \cdot \pi_m$ ($\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ – циклы) опускать. Например:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,3\,4\,5\,1\,7\,6\,8 \end{pmatrix} = (12345)(67)(8) = (12345)(67), \pi \in S_8.$$

Теорема. Каждая подстановка $\pi \neq e$ в S_n является произведением независимых циклов длины больше либо равной 2. Это разложение в произведение определено однозначно с точностью до порядка следования циклов.

Определение. Цикл длины 2 называется транспозицией. Любая транспозиция имеет вид $\tau = (i\ j)$ и оставляет на месте символы, отличные от i, j.

Определение. Пара i, j называется инверсией относительно подстановки $\sigma \in S_n$, если $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Следствие. Каждая подстановка $\pi \in S_n$ является произведением транспозиций. Каждый из циклов можно записать в виде произведения транспозиций, например, так $(1\ 2\ \ldots\ k-1\ k) = (1\ k)(1\ k-1)\ldots(1\ 3)(1\ 2)$.

Замечание. Ни о какой единственности записи подстановки через транспозиции не может быть и речи, транспозиции не коммутируют, а их число не является инвариантом подстановки.

Теорема. Пусть $\pi \in S_n$, $\pi = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_m$ – какое-нибудь разложение π в произведение транспозиций. Тогда число $\varepsilon_\pi = (-1)^m$, называемое четностью π, полностью определяется подстановкой π и не зависит от способа разложения, т.е. четность целого числа m для данной подстановки π всегда одна и та же. Кроме того, $\varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau$ $\forall\, \sigma, \tau \in S_n$.

Определение. Подстановка $\pi \in S_n$ называется четной, если $\varepsilon_\pi = 1$ и нечетной, если $\varepsilon_\pi = -1$.

Замечание. Из определения следует, что все транспозиции – нечетные подстановки.

Следствие. Пусть подстановка $\pi \in S_n$ разложена в произведение независимых циклов длин $l_1, \ldots, l_m$. Тогда $\varepsilon_\pi = (-1)^{\sum_{k=1}^{m} (l_k - 1)}$.

Задачи

1.Вычислить:

a) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,2\,4\,1 \end{pmatrix}$.

2.Подобрать i и k так, чтобы подстановка

a) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 1\,2\,7\,4\ i\,5\,6\,k\,9 \end{pmatrix}$ была четной;

b) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 1\,i\,2\,5\,k\,4\,8\,9\,7 \end{pmatrix}$ была нечетной.

2.Найти число инверсий и определить четность подстановки:

a) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,2\,4\,5\,6\,3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,4\,5\,2\,3\,1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 1\,2\,4\,3\,5\,9\,8\,7\,6 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & \ldots & & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \ldots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & \ldots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots & 2n & 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-1 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & & \ldots & & 3n \\ 3 & 6 & 9 & \ldots & 3n & 1 & 4 & 7 & \ldots & 3n-2 & 2 & 5 & \ldots & 3n-1 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & & \ldots & & 3n \\ 1 & 4 & 7 & \ldots & 3n-2 & 2 & 5 & \ldots & 3n-1 & 3 & 6 & \ldots & 3n \end{pmatrix}$.

Семинар 13. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определение. Определитель матрицы A обозначается как $\det A$ или $|A|$, или $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и вычисляется по формуле

$\det A = \sum_{\alpha=(i_1 \dots i_n)} \varepsilon_\alpha a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$, где ε_α – четность перестановки α.

Замечание. Определитель определен только для квадратной матрицы.

Определение. Минором M_{ki} называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием k-й строки и i-го столбца.

Определение. Алгебраическим дополнением элемента a_{ki} называется число $A_{ki} = (-1)^{i+k} M_{ki}$.

Свойства определителей:

1.Если матрица имеет строку (столбец) состоящую из нулей, то определитель равен нулю.

2.Определитель матрицы, содержащий две равные строки (столбца), равен нулю.

3.Если все элементы k-й строки (столбца) матрицы умножить на λ, то определитель умножится на λ.

4.Если в матрице A две строки (столбца) пропорциональны, то $\det A = 0$.

5.Если матрица A получена из A' перестановкой двух строк (столбцов), то определитель меняет знак: $\det A = -\det A'$.

6.Если в матрице A одна из строк (столбцов) является линейной комбинацией других строк, то $\det A = 0$.

7.Если к i-й строке (столбцу) матрицы A прибавить произвольную линейную комбинацию других строк (столбцов), то определитель не изменится.

8.Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

9. $\det A = \det B + \det C$, если $a_{ki} = b_{ki} + c_{ki}$, $i = 1, \dots, n$ и $a_{ji} = b_{ji} = c_{ji}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, .., k-1, k+1, \dots, n$.

10.Определитель матрицы равен сумме произведений элементов k-й строки (столбца) матрицы A на их алгебраические дополнения: $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{ki}$.

Задачи

1.Пользуясь только определением, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

2.Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

3.Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$.

4.Пользуясь свойствами 1–9, вычислить следующий определитель

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ b+c & c+a & a+b & 2 \end{vmatrix}.$$

5.Пользуясь свойствами 1–9, доказать тождество

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

6.Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & -4 & 7 \\ 4 & -9 & 8 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 5 & 9 & 7 \\ 6 & 12 & 13 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & -7 \\ 4 & -5 & -3 & -3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$.

Семинар 14. ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ n-го ПОРЯДКА

Определение. Минором порядка $s\,(s \le n)$ матрицы A называется определитель матрицы, образующейся в пересечении каких-либо s строк и s столбцов матрицы A.

Если эти строки имеют номера $i_1, ..., i_s$, а столбцы – номера $j_1, ..., j_s$, то соответствующий минор обозначается как $L^{i_1, ..., i_s}_{j_1, ..., j_s}$:

$L^{i_1, ..., i_s}_{j_1, ..., j_s} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & ... & a_{i_1 j_s} \\ ... & ... & ... \\ a_{i_s j_1} & ... & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}$. Через $M^{i_1, ..., i_s}_{j_1, ..., j_s}$ обозначаем минор, дополнительный к минору $L^{i_1, ..., i_s}_{j_1, ..., j_s}$, т. е. определитель матрицы порядка $n - s$, полученный из A вычеркиванием выделенных строк и столбцов.

Теорема Лапласа. Для любого натурального числа s $(s \le n)$ и любого фиксированного набора номеров строк $i_1, ..., i_s$ таких, что $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_s \le n$, $\det A = \sum_{(j_1, ..., j_s)} (-1)^{i_1 + j_1 + ... + i_s + j_s} L^{i_1, ..., i_s}_{j_1, ..., j_s} M^{i_1, ..., i_s}_{j_1, ..., j_s}$, где сумма берется по всевозможным наборам значений индексов $j_1, ..., j_s$, таким, что $1 \le j_1 < j_2 < ... < j_s \le n$. Формула называется формулой разложения определителя по данным s строкам. Аналогична формула разложения определителя по данным s столбцам.

Методы вычисления определителей n-го порядка:

1.Метод приведения к треугольному виду. Этот метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, лежащие по одну сторону от одной из диагоналей, равны нулю. Случай побочной диагонали путем изменения порядка строк (или столбцов) сводится на случай главной диагонали. Полученный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

2.Метод выделения линейных множителей: определитель рассматривается как многочлен от одной или нескольких входящих в него переменных; преобразуя его, обнаруживают, что определитель делится на ряд линейных множителей, а значит и на их произведение.

3.Метод рекуррентных соотношений. Он заключается в том, что данный определитель выражают, преобразуя и разлагая его по строке или по столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением.

4.Метод представления определителя в виде суммы определителей. Некоторые определители легко вычисляются путем разложения их в сумму определителей того же порядка относительно строк или столбцов.

5.Метод изменения элементов определителя. Этот метод применяется в тех случаях, когда путем изменения всех элементов определителя на одно и то же число он приводится к такому виду, в котором легко сосчитать алгебраические дополнения всех элементов. Пусть

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} + x & \dots & a_{1n} + x \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}.$$

Тогда $D' = D + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$.

Задачи

1.Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

2.Вычислить определители n-го порядка:

a) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \dots & a_3b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

Семинар 15. РАНГ МАТРИЦЫ

Определение. Наивысший порядок отличных от нуля миноров, т.е. такое число p, что в матрице A нет отличного от нуля минора порядка $p+1$, но есть такой минор порядка p, называется рангом матрицы A и обозначается $rangA$. Ясно, что $0 \le rangA \le \min(m, n)$, где $m \times n$ – размер матрицы.

Утверждение. Если в матрице A имеется отличный от нуля минор порядка p, обладающий тем свойством, что все «окаймляющие» его миноры порядка $p+1$ равны нулю, то ранг матрицы равен p.

Следствие. Определитель квадратной матрицы тогда и только тогда отличен от нуля, когда его строки линейно независимы.

Теорема. Размерность пространства строк равна размерности пространства столбцов и равна наибольшему размеру минора этой матрицы отличному от нуля.

Задачи

Найти ранг следующих матриц методом окаймления миноров:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

Найти ранг матрицы в зависимости от параметра λ :

5) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$.

Вычислить ранг матриц с помощью элементарных преобразований:

7) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

Выяснить являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми и в первом случае определить зависимость между векторами:

9) $a_1 = (4, -5, 2, 6)$, $a_2 = (2, -2, 1, 3)$, $a_3 = (6, -3, 3, 9)$, $a_4 = (4, -1, 5, 6)$.

10) $a_1 = (1,0,0,2,5)$, $a_2 = (0,1,0,3,4)$, $a_3 = (0,0,1,4,7)$, $a_3 = (2,3,4,8,9)$.

11) $a_1 = (2, -1, 3, 5)$, $a_2 = (4, -3, 1, 3)$, $a_3 = (3, -2, 3, 4)$, $a_4 = (4, -1, 15, 17)$, $a_5 = (7, -6, -7, 0)$.

12) $a_1 = (1, 2, 3, -4)$, $a_2 = (2, 3, -4, 1)$, $a_3 = (2, -5, 8, -3)$, $a_4 = (5, 26, -9, -12)$, $a_5 = (3, -4, 1, 2)$.

Семинар 16. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ.

Определение. Если $\det A \neq 0$, то матрица A обратима. Обратная матрица обозначается A^{-1}. Она обладает свойством

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Пусть $A^{-1} = B$, тогда $b_{ik} = \dfrac{A_{ki}}{\det A}$, где A_{ki} – алгебраическое дополнение элемента a_{ki}.

Задачи

1.Найти обратные матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.Найти обратные матрицы с помощью элементарных преобразований:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

3.Решить матричные уравнения:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

4.Найти все матрицы 2-го порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

Семинар 17. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Метод Крамера. Пусть есть система линейных уравнений $Ax = b$, где $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица размера n, причем $\det A \neq 0$, $x = (x_1, ..., x_n)^T$ – вектор столбец неизвестных, $b^T = (b_1, ..., b_n)$ – правая часть. Тогда переменная x_i есть частное от деления определителя матрицы, полученной из матрицы A заменой i-го столбца на столбец правых частей, на определитель матрицы A:

$$x_i = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема Кронекера – Капелли. Система линейных уравнений $Ax = b$ имеет решение тогда и только тогда, когда $rang\, A = rang\, \widetilde{A}$, где $\widetilde{A} = (Ab)$ – расширенная матрица A, к которой добавлен столбец правых частей.

Решение произвольной системы уравнений:

Этап 1. Вычисляя миноры матрицы A, находим её ранг r, одновременно обнаруживая хотя бы один отличный от нуля минор Δ порядка r.

Этап 2. Окаймляя найденный минор в матрице $\widetilde{A}$, убеждаемся, что ранг этой матрицы также равен r (если он больше r, то система несовместна).

Этап 3. В минор Δ входят коэффициенты при r неизвестных в r уравнениях. Оставляя только эти уравнения, придавая остальным $n-r$ неизвестным произвольные значения и, следовательно, получая систему r уравнений от r неизвестных с отличным от нуля определителем, решаем эту систему по формулам Крамера.

Теорема. Множество всех решений $(x_1, ..., x_n)$ системы линейных однородных уравнений является подпространством пространства V^n размерности $n-r$, где $r = rangA$.

Чтобы найти $n-r$ линейно независимых решений, которые обычно называют фундаментальной системой решений, нужно придавать $n-r$ наборов значений, следя за тем, чтобы получались линейно независимые решения. Для этого достаточно указанные наборы выбрать так, чтобы расположенные в квадратную матрицу порядка $n-r$, они составляли бы невырожденную матрицу (проще всего выбрать, чтобы получилась единичная матрица).

Задачи

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

1) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6. \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3. \end{aligned}$

Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем линейных уравнений:

3) $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0,$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0;$

4) $x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0,$

$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0,$

$4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0,$

$3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0.$

5) $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0,$

$3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0,$

$4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0.$

Найти общее решение в зависимости от параметра λ :

6) $5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3,$

$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1,$

$8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9,$

$7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda.$

7) $2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2,$

$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4,$

$4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4,$

$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7.$

8) Построить систему линейных уравнений, решением которой является данное линейное многообразие:

a) $\left\{(0,\ 0,\ 2,\ -1)^T + \alpha\,(13,\ 0,\ 9,\ -1)^T + \right.$

$\left. + \beta\,(0,\ 13,\ -27,\ 3)^T\right\};$

b) $\left\{(2,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1)^T + \alpha\,(1,\ 0,\ 4,\ 0,\ -1)^T + \right.$

$\left. + \beta\,(0,\ 1,\ -8,\ 0,\ 2)^T\right\}.$

Семинар 18. СУММА И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение. Подмножество P векторного пространства V называется подпространством, если оно замкнуто относительно операций над векторами, т. е. если $a, b \in P$, то $a + b \in P$, и, если $a \in P$, то $\forall \lambda \quad \lambda a \in P$, где λ – число.

Определение. Если P и Q векторные подпространства пространства V, то их суммой $P + Q$ называется множество, состоящее из всевозможных сумм $v + w$, где $v \in P$, $w \in Q$.

Утверждение. Если P и Q векторные подпространства пространства V, то их сумма $P + Q$ – векторное подпространство пространства V.

Определение. Если P и Q векторные подпространства пространства V, то их пересечением называется множество, состоящее из векторов z таких, что $z \in P$, $z \in Q$, и обозначается $P \cap Q$.

Утверждение. Если P и Q векторные подпространства пространства V, то их пересечение тоже подпространство.

Определение. Сумма векторных пространств $P + Q = W$ называется прямой суммой, если произвольный вектор $z \in W$ единственным образом представляется в виде суммы $z = v + w$, где $v \in P$, $w \in Q$. Обозначается прямая сумма таким образом: $P \oplus Q = W$.

Определение. Говорят, что векторное пространство V разложено в прямую сумму подпространств P и Q, если $P \oplus Q = V$.

Определение. Если $P \oplus Q = V$, то говорят, что подпространство Q является дополнением к подпространству P.

Утверждение. Сумма $P + Q$ является прямой $(P \oplus Q)$ тогда и только тогда, когда их пересечение состоит только из нулевого вектора $(P \cap Q = \{0\})$.

Утверждение. Из каждых двух условий в списке следует третье:

1) $P + Q = V$; 2) $P \cap Q = \{0\}$; 3) $\dim P + \dim Q = \dim V$.

Утверждение. $\dim(P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P \cap Q)$.

Задачи

Найти размерность и базис суммы и пересечения векторных подпространств, представляющих собой линейные оболочки следующих систем векторов:

1) $a_1 = \{1, 3\}, a_2 = \{1, 4\}, a_3 = \{3, 10\}$,
   $b_1 = \{-1, 1\}, b_2 = \{2, -2\}, b_3 = \{3, -3\}$;
2) $a_1 = \{4, 2, 1\}, a_2 = \{-3, 2, 0\}, a_3 = \{-1, 4, 0\}$,
   $b_1 = \{-2, 3, 1\}, b_2 = \{5, 3, 13\}, b_3 = \{7, 0, 12\}$;
3) $a_1 = \{1, 1, 1\}, a_2 = \{-2, -2, -2\}, a_3 = \{4, 4, 4\}$,
   $b_1 = \{3, 2, 1\}, b_2 = \{2, 1, 1\}, b_3 = \{5, 3, 2\}$;
4) $a_1 = \{1,2,1,3\}, a_2 = \{-1,8,-6,5\}, a_3 = \{0,10,-5,8\}$,
   $b_1 = \{1,4,-1,5\}, b_2 = \{3,-2,6,3\}, b_3 = \{4,2,5,8\}$;
5) $a_1 = \{2,-1,0,-2\}, a_2 = \{3,-2,1,0\}, a_3 = \{1,-1,1,-1\}$,
   $b_1 = \{3,-1,-1,0\}, b_2 = \{0,-1,2,3\}, b_3 = \{5,-2,-1,0\}$;
6) $a_1 = \{1,2,0,1\}, a_2 = \{1,1,1,0\}, a_3 = \{1,1,1,3\}, a_4 = \{1,0,1,3\}$,
   $b_1 = \{1,2,0,2\}, b_2 = \{1,2,1,2\}, b_3 = \{3,1,3,1\}, b_4 = \{1,1,2,2\}$;

7) Доказать, что пространство квадратных матриц порядка n является прямой суммой подпространства симметрических матриц и подпространства кососимметрических матриц того же порядка.

8) Доказать, что пространство многочленов степени не выше n является прямой суммой подпространства четных

многочленов степени не выше n и подпространства нечетных многочленов степени не выше n.

9) Найти размерность и базис суммы и пересечения векторных подпространств пространства многочленов степени не выше 3, натянутых на системы многочленов $1+2t+t^3$, $1+t+t^2$, $t-t^2+t^3$ и $1+3t+t^3$, $1+t^2$, $3t-t^2+t^3$.

Семинар 19. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Определение. Пусть V^n и V^m – линейные пространства над одним и тем же полем (R или C). Отображение $\varphi : V^n \to V^m$ называется линейным, если для любых векторов $x, y \in V^n$ и любого числа α справедливы равенства $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

Определение. Линейным преобразованием называется линейное отображение пространства V^n в себя.

Определение. Пусть $e = \{e_1, ..., e_n\}$ – базис V^n, $f = \{f_1, ..., f_m\}$ – базис V^m. Тогда матрицей линейного отображения φ в базисах e, f называется матрица $A = A_\varphi$, столбцами которой являются координатные столбцы векторов $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$ в базисе f, т. е. $\varphi(e_j) = a_{ij} f_i$. Если $V^n = V^m$, то матрицей линейного преобразования φ в базисе e называется матрица линейного отображения $\varphi : V^n \to V^n$ в базисе e, т. е. $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

Утверждение. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$. Тогда

$y = A_\varphi x$, т.е. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Определение. Множество значений $\varphi(x)$, $x \in V^n$, называют образом линейного отображения φ и обозначают $\mathrm{Im}\varphi$. Оно образует линейное подпространство в V^m. Его размерность называется рангом отображения φ и обозначается $rang\varphi$.

Определение. Ядром линейного отображения φ называется множество $Ker\varphi = \{x \in V^n, \varphi(x) = 0\}$. Дефектом линейного отображения φ называется размерность ядра, т. е. $\dim(Ker\varphi)$.

Теорема. Пусть e и e' – два базиса в пространстве V^n, f и f' – два базиса в пространстве V^m, S и T матрицы перехода от e к e' $(e' = eS)$ и от f к f' $(f' = fT)$ соответственно. Если A_φ и A'_φ – матрицы линейного отображения в парах базисов e, f и e', f', то $A'_\varphi = T^{-1} A_\varphi S$. В частности, если $V^n = V^m$, то $A'_\varphi = S^{-1} A_\varphi S$.

Определение. Отображение φ называется вырожденным, если $Ker\varphi \neq \{0\}$, в противном случае – невырожденным.

Определение. Взаимно-однозначное линейное отображение пространства V^n на V^m называется изоморфизмом V^n на V^m. Если существует изоморфизм V^n на V^m, то пространства V^n и V^m называются изоморфными.

Задачи

1.Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – произвольный вектор R^n. Исследовать линейность преобразования φ, если:

a) $\varphi(x) = (x_2, x_1 - x_2)^T$, $(n = 2)$;

b) $\varphi(x) = (x_2, x_1 x_2)^T$, $(n = 2)$;

c) $\varphi(x) = (x_2, x_1 - 3, x_3)^T$, $(n = 3)$;

d) $\varphi(x) = (\sin x_1, \cos x_2, x_3)^T$, $(n = 3)$;

e) $\varphi(x) = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)^T$.

2.Линейное отображение n-мерного векторного пространства в m-мерное задано матрицей A. Найти его ядро и образ. Вычислить образы указанных векторов:

a) $m = 3, n = 4$, $x^T = \{4, -1, -1, 3\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $m = 4, n = 4$, $x^T = \{-1, 1, 1, -1\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $m = 5, n = 4$, $x^T = \{-2, 1, 3, -1\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

3.Линейное отображение $\varphi : R^n \to R^m$ задано в стандартных базисах матрицей A. Кроме этого заданы базисы $e = \{e_1, ..., e_n\}$ пространства R^n и $f = \{f_1, ..., f_m\}$ пространства R^m, а именно заданы матрицы S, T, образованные столбцами векторов базисов e и f. Вычислить матрицу отображения φ в базисах e и f:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.Линейное преобразование $\varphi : R^2 \to R^2$ переводит вектор a_i в вектор b_i. Вычислить матрицу преобразования φ в стандартном базисе, если

$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.Показать, что существует единственное линейное преобразование комплексного арифметического пространства C^2, переводящее столбцы данной матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B:

$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i-1 & i+1 \\ i+1 & i-1 \end{pmatrix}$.

6.Линейное преобразование φ имеет в данном базисе матрицу A_φ, а координатные столбцы новых базисных векторов образуют матрицу S. Вычислить матрицу преобразования в новом базисе, если

$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

7.Пусть D – дифференцирование в пространстве многочленов степени не выше m. Вычислить матрицу преобразования D, если базис состоит из многочленов:

a) $1+t, t+2t^2, 3t^2-1$, $(m=2)$;

b) $t^3+1, 1-t, 1-t+t^2, 1-t+t^2-t^3$, $(m=3)$.

8.Пусть A и B – матрицы линейного отображения в двух парах базисов. Доказать, что B можно получить из A элементарными преобразованиями строк и столбцов.

9.Линейное отображение $\varphi : R^3 \to R^2$ в базисах $a_1, a_2, a_3 \in R^3$ и $b_1, b_2 \in R^2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу отображения φ в базисах $\{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3\}$ и $\{b_1, b_1 + b_2\}$.

Семинар 20. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение. Линейное преобразование и линейный оператор – это синонимы.

Определение. Подпространство $P \subset V^n$ называется инвариантным относительно оператора $\varphi : V^n \to V^n$, если $\varphi(P) \subseteq P$ (т. е. φ не выводит векторы из P за пределы P).

Лемма. Следующие утверждения эквивалентны: 1) матрица A_φ обратима; 2) оператор φ обратим.

Определение. Вектор $x \neq 0$ такой, что $\varphi(x) = \lambda x$ называется собственным вектором оператора φ, а λ называется собственным значением φ.

Лемма. $\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ – собственное значение.

Лемма. Если $\widetilde{A} = TAT^{-1}$, то $\forall \lambda \ \det(A - \lambda E) = \det(\widetilde{A} - \lambda E)$.

Определение. Многочлен $f_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом оператора φ (определен корректно, так как не зависит от выбора базиса в котором находим матрицу оператора φ)

$f_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + trA(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \det A$.

Определение. Следом матрицы называется сумма её диагональных элементов: $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Определение. Если λ – собственное число оператора φ, то его алгебраической кратностью n_λ называется кратность корня λ в f_φ. Геометрической кратностью называется число p_λ, равное размерности пространства собственных векторов $p_\lambda = \dim\{x \mid \varphi(x) = \lambda x\}$.

Лемма. Геометрическая кратность всегда меньше либо равна алгебраической кратности: $p_\lambda \le n_\lambda$.

Определение. Множество всех собственных чисел оператора φ называется спектром оператора φ.

Определение. Спектр называется простым, если все собственные числа имеют алгебраические кратности равные 1: $n_{\lambda_i} = 1$.

Теорема. Если есть базис векторного пространства, состоящий из собственных векторов оператора φ, то в этом базисе оператор φ имеет диагональную матрицу: $\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j = \lambda_i e_i \Rightarrow a_{ji} = \lambda_i \delta_{ji}$.

Определение. Оператор φ называется диагонализируемым, если найдется базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V^n, в котором матрица A_φ оператора φ диагональна.

Теорема. Оператор φ – диагонализируемый $\Leftrightarrow$ φ имеет вещественный спектр и $n_\lambda = p_\lambda$.

Замечание. Диагонализируемость зависит от поля, над которым определено пространство V^n. Вещественная матрица, имеющая комплексные характеристические числа, не диагонализируема как матрица линейного преобразования в вещественном пространстве, но может быть диагонализирована над полем комплексных чисел.

Определение. Линейная оболочка всех собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению λ, называется собственным подпространством

линейного оператора φ. Оно же называется инвариантным подпространством оператора φ.

Теорема Гамильтона – Кэли. Линейный оператор φ и соответствующая ему матрица A (в любом базисе) аннулируются своим характеристическим многочленом, т. е., если $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \prod (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, то $f_A(A) = 0$.

Задачи

Диагонализируема ли матрица A? Если да, то диагонализировать её и найти матрицу перехода. Найти все инвариантные подпространства.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7) Пусть x – собственный вектор линейного преобразования φ, λ – его собственное значение, $p(t)$ – многочлен. Доказать, что x есть собственный вектор линейного преобразования $p(\varphi)$, и ему соответствует собственное значение $p(\lambda)$.

8) Найти собственные значения, собственные векторы и все инвариантные подпространства оператора $x\dfrac{d}{dx}$ в пространстве многочленов степени не выше n.

Семинар 21, 22. НОРМАЛЬНАЯ ЖОРДАНОВА ФОРМА МАТРИЦЫ

Определение. Квадратная $k \times k$ матрица вида

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$ называется жордановой клеткой размерности k.

Определение. Нормальной жордановой матрицей называется матрица J, у которой по диагонали стоят жордановы клетки, а остальные элементы равны нулю.

Теорема. Для любого линейного оператора φ на векторном пространстве, спектр которого вещественный, существует базис, в котором матрица, задающая оператор, имеет нормальную жорданову форму.

Алгоритм поиска жордановой формы матрицы. Ищем собственные числа $\lambda_1, ..., \lambda_j$ матрицы A (т. е. решаем уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$) и определяем алгебраическую кратность n_{λ_i} каждого собственного числа $\lambda = \lambda_i, i = 1, ..., j$. Ищем собственные векторы матрицы A (т. е. для каждого $i = 1, ..., j$ решаем уравнение $(A - \lambda_i E)e_i = 0$). Из множества его решений выбираем любой набор линейно независимых решений $e_i^1, ..., e_i^p$, где, как известно, $p = p_{\lambda_i}$ – геометрическая кратность собственного числа λ_i. Каждому собственному

числу λ соответствуют одна или несколько жордановых клеток $J_k(\lambda)$, которые находятся так:

a) Если $n_\lambda = p_\lambda$, т. е. если алгебраическая кратность собственного числа λ равна его геометрической кратности, то собственному числу λ соответствует n_λ жордановых клеток $J_1(\lambda)$ размера 1×1.

b) Если $n_\lambda > p_\lambda$, то собственному числу $\lambda = \lambda_i$ соответствует p_λ жордановых клеток $J_k(\lambda)$ – по одной для каждого собственного вектора, отвечающего данному собственному числу λ. Размер k каждой клетки $J_k(\lambda)$ на единицу больше количества присоединенных (или корневых) векторов, отвечающих собственному вектору e_i^p, $p = 1, ..., p_{\lambda_i}$.

Определение. Пусть e_i собственный вектор оператора φ: $A_\varphi e_i^p = \lambda_i e_i^p$. Тогда вектор $\bar{e}_i^p$ называется первым присоединенным вектором, если $(A_\varphi - \lambda_i E)\bar{e}_i^p = e_i^p$, вектор $\bar{\bar{e}}_i^p$ называется вторым присоединенным вектором, если $(A_\varphi - \lambda_i E)\bar{\bar{e}}_i^p = \bar{e}_i^p$, и т. д.

Продолжим изложение алгоритма поиска жордановой формы матрицы. Возьмем в качестве базиса собственные вектора и все корневые

$$e_1^1, \bar{e}_1^1, \bar{\bar{e}}_1^1, ..., e_1^2, \bar{e}_1^2, \bar{\bar{e}}_1^2, ..., e_2^1, \bar{e}_2^1, \bar{\bar{e}}_2^1, ..., e_j^1, \bar{e}_j^1, \bar{\bar{e}}_j^1, ..., e_j^2, \bar{e}_j^2, \bar{\bar{e}}_j^2, ...$$

В этом базисе матрица оператора φ имеет нормальную жорданову форму J_φ. Столбцы матрицы перехода T от старого базиса к новому образованы координатами найденных выше собственных и присоединенных векторов. Между собой матрицы J_φ и A_φ связаны соотношением $J_\varphi = T^{-1} A_\varphi T$.

Определение. Минимальный многочлен $h_A(\lambda)$ оператора A является делителем характеристического многочлена $f_A(\lambda)$, делящимся на все линейные множители $(\lambda - \lambda_i)$:

$h_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, m_i – максимальный размер жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_i.

Определение. Корневое подпространство – пространство, натянутое на линейную оболочку векторов, состоящих из собственного вектора и всех к нему присоединенных.

Определение. Инвариантное подпространство – линейная оболочка всех собственных и присоединенных векторов, соответствующих данному собственному числу.

Задачи

Найти жорданову форму следующих матриц:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

8) В пространстве многочленов $f(x, y)$ степени не выше двух действуют операторы φ и ψ. Найти жорданову форму для φ и ψ. $\varphi : \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $\psi : f(x, y) \to f(x+1, y+1)$.

Семинар 23. ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦЫ, МАТРИЧНАЯ ЭКСПОНЕНТА

Если $f(x)$ многочлен, то функция от жордановой клетки с собственным числом λ определяется по формуле

$$f(J_k) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda)/1! & f''(\lambda)/2! & \dots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda)/1! & \dots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Если $A = TJT^{-1}$, где J – жорданова форма матрицы, T – матрица перехода, то функция от матрицы определяется по формуле $f(A) = Tf(J)T^{-1}$.

Задачи

1.Вычислить

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$; b) $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}$.

2.Вычислить e^A, где

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.Вычислить $\ln A$, где

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

4.Вычислить $\sin A$, где $A = \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$.

Семинар 24, 25. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА

Эллипс

Определение. Эллипс – это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1, F_2 есть постоянное число равное $2a$.

Определение. Каноническое уравнение эллипса в канонической системе координат имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и $b\,(a > b)$ длины полуосей, т. е. половины длин отрезков, отсекаемых эллипсом на осях координат.

Определение. Точки пересечения эллипса с его осями симметрии, т. е. с осями координат, называются его вершинами.

Определение. Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются фокусами.

Определение. Фокальная ось – прямая F_1F_2.

Определение. Центр эллипса – середина отрезка F_1F_2.

Определение. Число $e = c/a < 1$ называется эксцентриситетом эллипса.

Определение. Прямые, определяемые уравнением $x = \pm\, a/e$, называются директрисами эллипса.

Директориальное свойство эллипса: $r/d = e$, где r – расстояние от точки до фокуса, d – расстояние до директрисы.

Определение. Касательная к эллипсу в его точке (x_0, y_0) определяется уравнением $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Определение. Через фокус проведем прямую, перпендикулярную фокальной оси. Длину полученной хорды обозначим $2p$; p называется фокальным параметром эллипса.

Фокальное свойство эллипса. Лучи, выпущенные из одного фокуса, после отражения от эллипса соберутся в другом.

Задачи

1.Составить каноническое уравнение эллипса, если

a) расстояние между фокусами равно 8, большая ось равна 10;

b) большая ось равна 26 и эксцентриситет равен $12/13$.

2.Определить фокусы эллипса:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$.

3.Дан эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Написать уравнения его директрис.

4.Для эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ определить фокальный параметр.

5.Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ в точке $M(4,3)$.

6.Определить касательные к эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, параллельные прямой $x+y-1=0$.

7.Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, проходящих через точку $N(10,4)$.

8.Вывести полярное уравнение эллипса.

Гипербола

Определение. Гипербола – это геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых от двух данных точек F_1, F_2 есть постоянное число равное $2a$.

Определение. Каноническое уравнение гиперболы в канонической системе координат имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b длины полуосей, действительной и мнимой.

Определение. Точки пересечения гиперболы с её действительной осью называются её вершинами.

Определение. Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называются фокусами.

Определение. Фокальная ось – прямая F_1F_2.

Определение. Центр гиперболы – середина отрезка F_1F_2.

Определение. Число $e = c/a > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы.

Определение. Асимптоты гиперболы определяются уравнениеми: $y = \pm bx/a$.

Определение. Прямые, определяемые уравнениями $x = \pm a/e$, называются директрисами гиперболы.

Директориальное свойство гиперболы: $r/d = e$, где r – расстояние от точки до фокуса, d – расстояние до директрисы.

Определение. Касательная к гиперболе в её точке (x_0, y_0) определяется уравнением $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Определение. Через фокус проведем прямую перпендикулярную фокальной оси. Длину полученной хорды обозначим $2p$; p называется фокальным параметром.

Фокальное свойство гиперболы. Лучи, выпущенные из одного фокуса, после преломления на гиперболе соберутся в другом.

Задачи

1.Определить фокусы гиперболы:

а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$; б) $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$.

2.Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а)расстояние между фокусами равно 10 и действительная ось равна 8;

b)действительная ось равна 48 и эксцентриситет равен $13/12$;

c)расстояние между директрисами равно $32/5$ и эксцентриситет равен $5/4$;

d)угол между асимптотами равен 60° и $c = 2\sqrt{3}$.

3.Определить фокальный параметр гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4.Доказать, что отрезки, отсекаемые директрисами на асимптотах (считая от центра гиперболы), равны действительной полуоси.

5.Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Вычислить длину этого перпендикуляра.

6.Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $M(5,-4)$.

7.Составить уравнение касательных к гиперболе $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, проходящих через точку $M(1,4)$.

8.Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, если касательная: a) параллельна прямой $3x - y - 17 = 0$; b) перпендикулярна к прямой $2x + 5y + 11 = 0$.

9.Составить уравнение гиперболы в полярных координатах, если дано её уравнение в декартовых координатах $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Парабола

Определение. Парабола – это геометрическое место точек плоскости равноудаленных от некоторой фиксированной прямой (директрисы) и некоторой фиксированной точки (фокуса).

Определение. Каноническое уравнение параболы в канонической системе координат имеет вид $y^2 = 2px$, где число p, называемое фокальным параметром параболы, есть расстояние от фокуса до директрисы.

Определение. Точка пересечения параболы с её осью симметрии называется её вершиной.

Определение. Точка $F(p/2,0)$ называется фокусом.

Определение. Прямая, определяемая уравнением $x = -p/2$, называется директрисой параболы.

Директориальное свойство параболы: $r/d = 1$, где r – расстояние от точки до фокуса, d – расстояние до директрисы.

Определение. Касательная к параболе в её точке (x_0, y_0) определяется уравнением $yy_0 = p(x + x_0)$.

Фокальное свойство параболы. Лучи, выпущенные из фокуса, после отражения от параболы пойдут параллельно оси параболы.

Уравнение в полярных координатах. Если за полярную ось принять ось Ox канонической системы координат, а за полюс – левый фокус в случае эллипса, правый фокус – в случае гиперболы и фокус – в случае параболы, то уравнение в полярных координатах каждой из этих линий имеет один и тот же вид $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\varphi}$, где ρ, φ – полярные координаты точки кривой; p – фокальный параметр; e – эксцентриситет кривой (в случае параболы $e = 1$).

Задачи

1.Определить координаты фокуса параболы:

a) $y^2 = 4x$; b) $x^2 = 4y$; c) $y^2 = -8x$.

2.Составить каноническое уравнение параболы, если:

a) расстояние фокуса от вершины равно 3;

b) расстояние фокуса от директрисы равно 2;

c) даны координаты фокуса $F(3,0)$ и уравнение директрисы $x = -1$.

3.Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = 4x$ в точке $M(9,6)$.

4.Дано уравнение касательной $x - 3y + 9 = 0$ к параболе $y^2 = 2px$. Составить уравнение параболы.

5.Составить уравнение параболы $y^2 = 8x$ в полярных координатах.

6.Найти кратчайшее расстояние параболы $y^2 = 64x$ от прямой $4x + 3y + 46 = 0$.

Семинар 26. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. МЕТОД ЛАГРАНЖА

Определение. Квадратичной формой f от n переменных $x_1, ..., x_n$ называется выражение $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$. Квадратичная форма f может быть записана в виде произведения $f = X^T A X$, где $X^T = (x_1, ..., x_n)$, $A = (a_{ij})$.

Определение. A называется матрицей квадратичной формы f, а её ранг называется рангом квадратичной формы. Матрица A симметрическая, так как $a_{ij} = a_{ji}$.

Определение. Квадратичная форма называется действительной или комплексной в зависимости от того, являются ли её коэффициенты действительными или же комплексными числами.

Определение. Если $rang A = n$, т. е. матрица A невырожденная, то и квадратичная форма f называется невырожденной.

Преобразование координат. Подвергнем переменные линейному преобразованию $x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k$ или в матричном виде $X = QY$, где $Q = (q_{ik})$. Тогда квадратичная форма изменится следующим образом $f = Y^T B Y$, где $B = Q^T A Q$.

Утверждение. Ранг квадратичной формы не меняется при выполнении невырожденного преобразования.

Определение. Форма называется канонической, если она имеет вид $f = b_1 x_1^2 + ... + b_n x_n^2$. Форма называется нормальной, если $b_i = \pm 1, 0$.

Теорема. Всякая квадратичная форма может быть приведена некоторым невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду. Если рассматривается действительная квадратичная форма, то все коэффициенты указанного преобразования можно считать действительными.

Определение. Две квадратичные формы называются эквивалентными, если одна квадратичная форма может быть получена из другой невырожденным линейным преобразованием переменных.

Определение. Пусть квадратичная форма приведена к каноническому виду

$$f = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_p x_p^2 + \lambda_{p+1} x_{p+1}^2 + \ldots + \lambda_{p+q} x_{p+q}^2,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q} < 0$. Тогда p – положительный индекс инерции квадратичной формы f, q – отрицательный индекс инерции формы f.

Теорема. Если формы имеют одинаковые положительные и отрицательные индексы инерции квадратичной формы, то они эквивалентны, и наоборот.

Определение. Квадратичная форма называется положительно определённой, если её значение строго больше нуля на каждом ненулевом векторе.

Критерий Сильвестра. Квадратичная форма с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определённой, когда все главные миноры её матрицы строго положительны.

Определение. Миноры расположенные в левом верхнем углу называются главными минорами матрицы.

Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Пусть дана квадратичная форма $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

а) Пусть существует хотя бы один коэффициент a_{ii} не равный нулю. Допустим $a_{11} \neq 0$. Тогда $g = f - a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2$ будет квадратичной формой, содержащей лишь неизвестные $x_2, \ldots, x_n$, но не x_1. Если обозначим $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$, $y_i = x_i$ ($i = 2, \ldots, n$

), то получим $f = a_{11}^{-1} y_1^2 + g$. Данное преобразование невырожденное, его детерминант равен a_{11}.

b) Если $a_{ii} = 0$ для всех $i = 1, ..., n$, то предварительно нужно совершить вспомогательное линейное преобразование, приводящее к появлению в форме f квадратов переменных. Так как среди a_{ij} обязательно есть отличные от нуля коэффициенты, то пусть, например, $a_{12} \neq 0$. Совершим линейное преобразование $x_1 = z_1 - z_2$, $x_2 = z_1 + z_2$, $x_i = z_i$ при $i = 3, ..., n$. Оно будет невырожденное, так как его определитель равен 2. В результате этого преобразования появляются квадраты переменных $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2$ и можно действовать предыдущим способом.

Задачи

Найти методом Лагранжа нормальный вид квадратичной формы и невырожденное линейное преобразование приводящее к этому виду:

1) $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$;

2) $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

3) $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;

4) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$;

5) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$;

6) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_5 - 2x_4x_6$;

7) $f = x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4$;

8) $f = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3$;

9) $f = 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

10)Привести квадратичную форму к каноническому виду при всевозможных действительных значениях параметра λ :

$$f = 2x_1^2 + 6x_2^2 + \lambda x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 .$$

Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены квадратичные формы:

11) $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

12) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;

13) $f = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

14) $f = (4 - \lambda)x_1^2 + (4 - \lambda)x_2^2 - (2 + \lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Выяснить какие из следующих форм эквивалентны между собой:

15) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$; $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$; $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$;

16) $f_1 = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$;

$f_2 = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

$f_3 = 15x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_1x_2 - 8x_1x_3 + 22x_2x_3$.

17)Доказать, что квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда её матрица представляется в виде $A = C^TC$, где C – невырожденная вещественная матрица.

18)При каких условиях матрица A отрицательно определена, т.е. $X^TAX < 0 \ \forall X \neq 0$.

Семинар 27. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Пусть есть прямоугольная декартовая система координат x, y и задано уравнение

$$\Phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

или в матричном виде

$$\Phi(x,y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(D \quad E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0, \qquad (2)$$

или $\Phi(x,y) = X^T Q X + 2G^T X + F = 0,$ (3)

где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

Определение. Множество точек, удовлетворяющих этому уравнению, называется линией второго порядка.

Пусть $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ и $A, B, C \neq 0$

одновременно. Уравнение (1) определяет одну из следующих линий:

I. $\delta \neq 0$. К первой группе относятся линии, имеющие единственный центр симметрии:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1 - \text{эллипс}, \\ 0 - \text{две мнимые пересекающиеся прямые}, \\ -1 - \text{мнимый эллипс}, \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1 - \text{гипербола}, \\ 0 - \text{две пересекающиеся прямые}. \end{cases}$$

II. $\delta = 0, \Delta \neq 0$. Ко второй группе относятся линии, не имеющие центра симметрии, т. е. только одна парабола:

$y^2 = 2px$ - парабола.

III. $\delta = 0, \Delta = 0$. К третьей группе относятся линии, имеющие прямую центров симметрии:

$$x^2 = \begin{cases} a^2, a \neq 0 - \text{две параллельные прямые}, \\ -a^2, a \neq 0 - \text{две мнимые параллельные прямые}, \\ 0 - \text{две совпадающие прямые}. \end{cases}$$

Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду:

I. $\delta \neq 0$.

a) Выберем новую систему координат $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$ так, чтобы линейные члены в уравнении исчезли:

$$\Phi(x', y') = Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2x'(Ax_0 + By_0 + D) + \\ + 2y'(Bx_0 + Cy_0 + E) + F' = 0,$$

$$F' = \Phi(x_0, y_0) = G^T X_0 + F = \Delta / \delta .$$

Определение. Точка (x_0, y_0), координаты которой удовлетворяют системе уравнений $Ax_0 + By_0 + D = 0$, $Bx_0 + Cy_0 + E = 0$, называется центром линии второго порядка. При этом поскольку $\delta \neq 0$, то линия имеет единственный центр симметрии. Такая линия называется центральной.

В результате, после переноса начала координат в центр симметрии имеем $\Phi(x', y') = Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0$.

b) Теперь сделаем поворот системы координат так, чтобы квадратичная форма привелась к главным осям. Известно, что если в качестве базиса взять ортонормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы Q, то квадратичная форма приведется к виду $A'x''^2 + C'y''^2$, а уравнение поверхности примет вид $A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0$. При этом, поскольку $\delta \neq 0$, то $A', C' \neq 0$. Здесь $X' = TX''$, где T – матрица, состоящая из ортонормированных собственных векторов матрицы квадратичной формы Q, A', C' – собственные числа матрицы Q.

II, III. $\delta = 0$.

Сделаем поворот системы координат так, чтобы квадратичная форма привелась к главным осям. В базисе из ортонормированных собственных векторов уравнение (1) будет иметь вид $A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0$, где $(D' \quad E') = (D \quad E)T$. Поскольку $\delta = 0$, то либо $A' = 0$, либо

$C' = 0$. Пусть $A' = 0$. Тогда $C'(y' + E'/C')^2 + 2D'x' + F' = 0$, $F' = F - E'^2/C'$. Если $D' \neq 0$, то получаем параболу $y''^2 = 2px''$, где $p = -D'/C'$, $x'' = x' + F'/2D'$, $y'' = y' + E'/C'$. Если $D' = 0$, то получаем кривую из третьего класса.

Задачи

Определить вид и расположение линий второго порядка, заданных уравнениями:

1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;
2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;
3) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;
4) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;
5) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;
6) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;
7) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;
8) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$;
9) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$.

Семинар 28, 29. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Пусть есть прямоугольная декартовая система координат x, y, z и задано уравнение

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0 \qquad (1)$$

или в матричном виде

$$F(x,y,z) = X^TQX + 2G^TX + a = 0, \qquad (2)$$

где $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$

Определение. Множество точек, удовлетворяющих этому уравнению, называется поверхностью второго порядка.

Преобразование уравнения поверхности при переносе начала координат. При переносе начала координат $x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0$ функция $F(x, y, z)$ изменяется следующим образом:

$$F(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0) = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + \\ + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a' = 0, \quad (3)$$

где $a'_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1,$

$a'_2 = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2,$

$a'_3 = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3,$

$a' = F(x_0, y_0, z_0) = G^T X_0 + F.$

Наибольшее упрощение за счет переноса начала координат будет достигнуто, если коэффициенты при x', y', z' будут равны нулю.

Определение. Точка x_0, y_0, z_0, координаты которой удовлетворяют системе уравнений $a'_1 = 0$, $a'_2 = 0$, $a'_3 = 0$, называется центром поверхности второго порядка. Если центр есть и только один, то поверхность называется центральной, иначе – нецентральной.

Преобразование уравнения поверхности при повороте системы координат. Приведем квадратичную форму

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

к главным осям. Известно, что, если в качестве базиса взять три ортонормированных собственных вектора e_1, e_2, e_3 матрицы Q, то квадратичная форма φ приведется к виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$, а уравнение поверхности (1) примет вид

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные числа матрицы Q, $(a'_1, a'_2, a'_3) = G^T T$, T – матрица перехода от старого базиса к новому ($E' = ET, X = TX'$). Коэффициент a при повороте не изменяется.

Если $\det Q \neq 0$, то поверхность имеет единственный центр симметрии, а все $\lambda_i \neq 0$. В этом случае сначала делаем перенос начала координат в центр симметрии, затем переходим к новому базису, состоящему из собственных векторов матрицы Q. В зависимости от сочетания знаков λ_i и знака $F(x_0, y_0, z_0)$ мы можем получить следующие поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 - \text{действительный эллипсоид}, \\ 0 - \text{мнимый конус}, \\ -1 - \text{мнимый эллипсоид}, \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 - \text{однополостный гиперболоид}, \\ 0 - \text{конус}, \\ -1 - \text{двуполостный гиперболоид}. \end{cases}$$

Если $\det Q = 0$, то в этом случае система уравнений $QX_0 + G = 0$ либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много. Произведение собственных чисел матрицы Q равно её определителю $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det Q = 0$. При этом выделяют два случая:

а) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Перейдем к новому базису, состоящему из собственных векторов матрицы Q. Уравнение (1) приведется к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a = 0.$$

Сдвигая по x', y', z', получаем $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2a'_3 z'' = 0$.
В результате будем иметь одну из следующих поверхностей:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\begin{cases}2z\text{ - эллиптический параболоид,}\\ -2z\text{ - эллиптический параболоид,}\\ 0\text{ - две мнимые пересекающиеся плоскости,}\\ 1\text{ - эллиптический цилиндр,}\\ -1\text{ - мнимый эллиптический цилиндр,}\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\begin{cases}2z\text{ - гиперболический параболоид,}\\ 0\text{ - две пересекающиеся плоскости,}\\ 1\text{ - гиперболический цилиндр.}\end{cases}$$

b) $\lambda_1=0,\lambda_2\neq 0,\lambda_3=0$. В базисе из собственных векторов матрицы Q уравнение (1) имеет вид

$$\lambda_2 y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+2a'_3z'+a=0. \qquad (4)$$

Возьмем новую систему координат $Ox''y''z''$ такую, что Oy'' совпадает с Oy', а система $Ox''z''$ повернута относительно системы $Ox'z'$ на угол α: $x'=x''\cos\alpha-z''\sin\alpha$, $y'=y''$, $z'=x''\sin\alpha+z''\cos\alpha$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\lambda_2 y''^2+2x''(a'_1\cos\alpha+a'_3\sin\alpha)+2a'_2y''+$$
$$+2z''(-a'_1\sin\alpha+a'_3\cos\alpha)+a=0$$

Выберем α так, чтобы коэффициент при z'' был равен нулю, т. е. $tg\alpha=a'_3/a'_1$. В результате получим

$$\lambda_2 y''^2+2x''a''_1+2a'_2y''+a=0.$$

Перенесем начало координат и разделим на λ_2, получим одну из следующих поверхностей:

$$y^2=\begin{cases}2px\text{ - параболический цилиндр,}\\ b^2\text{ - две параллельные плоскости,}\\ -b^2\text{ - две мнимые паралльные плоскости,}\\ 0\text{ - две совпадающие плоскости.}\end{cases}$$

Задачи

С помощью ортогонального преобразования привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду и определить каноническую систему координат:

1) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6xz - 2x + 6y + 2z = 0$;

2) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;

3) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$;

4) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 8xz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$;

5) $5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy + 4yz - 4xz - 26x - 28y - 13z + 24 = 0$;

6) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y + 11 = 0$;

7) $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 6yz + 4xz + 4x - 6y + 2z - 5 = 0$;

8) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4xz + 4x - 6z + 1 = 0$;

9) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2xz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$;

10) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz - 4xz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$.

Семинар 30, 31. ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ

Определение. Алгеброй (над полем F) называется множество, являющееся одновременно кольцом и линейным пространством над F так, что умножение на скаляры из F и умножение в кольце согласованы: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Определение. Размерностью алгебры над F называется её размерность как линейного пространства над F.

Определение. Подалгеброй алгебры A называется подпространство A' в A, одновременно являющееся подкольцом (т. е. произведение элементов A' также лежит в A').

Пример. Алгебра $M_n(R)$ матриц, размерности n^2, ассоциативная, некоммутативная, с единицей E.

Пример. Алгебра $R[x]$ многочленов, размерности ∞, ассоциативная, коммутативная, с единицей.

Пример. Алгебра $L(V)$ линейных операторов на линейном пространстве V: размерности $(\dim V)^2$, ассоциативная, некоммутативная, с единицей E.

Определение. Алгеброй Ли называется алгебра, в которой операция умножения удовлетворяет двум аксиомам:

1) $(x * x) = 0$; отсюда вытекает свойство антикоммутативности;

2) $(x * y) * z + (y * z) * x + (z * x) * y = 0$; (тождество Якоби). Это не ассоциативная алгебра.

Пример. Векторное пространство $L = R^3$ есть трехмерная алгебра Ли с операцией умножения – векторным произведением векторов.

Определение. Группой $\langle G,* \rangle$ называется множество G с одной бинарной операцией, обладающей свойствами:

1) $a,b \in G \Rightarrow a * b \in G$;

2) ассоциативность: $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a,b,c \in G$;

3) есть нейтральный элемент: $e \in G$; $x * e = e * x = x \quad \forall x \in G$;

4) каждый элемент обратим: $\forall x \in G \quad \exists x^{-1}$: $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Пример. Множество S_n перестановок степени n – симметрическая группа.

Определение. Порядком конечной группы называется число её элементов.

Теорема Кэли. Каждая конечная группа из n элементов есть подгруппа группы перестановок.

Определение. Отображение $f : G \to G'$ группы $\langle G,* \rangle$ в $\langle G',\circ \rangle$ называется гомоморфизмом, если $\forall a,b \in G$ $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$.

Определение. Ядром гомоморфизма f называется множество $Ker\, f = \{g \in G \mid f(g) = e' - \text{единица группы } G'\}$.

Замечание. Имеется тенденция к замене гомоморфизма термином морфизм.

Задачи

1.Какие из указанных числовых множеств с операциями являются группами:

a) $(A, +)$, где A – одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$;

b) $(A, \cdot)$, где A – одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$;

c) $(A_0, \cdot)$, где A – одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, а $A_0 = A \setminus \{0\}$;

a)$(n\mathbb{Z}, +)$, где n – натуральное число;

b)$(\{-1, 1\}, \cdot)$;

c) множество комплексных чисел с фиксированным модулем r относительно умножения;

d)множество ненулевых комплексных чисел, расположенных на лучах, выходящих из начала координат и образующих с лучом Ox углы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$, относительно умножения.

2.Какие из множеств квадратных вещественных матриц фиксированного порядка образуют группу:

a)множество симметрических (кососимметрических) матриц относительно сложения;

b)множество симметрических (кососимметрических) матриц относительно умножения;

c)множество невырожденных матриц относительно сложения;

d)множество невырожденных матриц относительно умножения;

e)множество всех ортогональных матриц относительно умножения;

f)множество верхних треугольных матриц относительно умножения.

g)множество всех целочисленных ортогональных матриц относительно умножения; найти порядок этой группы.

3.Найти порядок группы вращений: a) правильного треугольника; b) квадрата; c) октаэдра.

4.Задано множество $GL_n(R)$ всех $n \times n$ матриц с вещественными коэффициентами и с отличным от нуля определителем. Доказать, что это группа. Доказать, что подмножество $SL_n(R)$ матриц с определителем равным 1, является подгруппой.

5.Найти ядро гомоморфизма

$$\tau : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

6.Доказать, что тождество Якоби выполняется для векторного произведения.

7.Доказать, что делитель нуля в произвольной ассоциативной алгебре не является обратимым.

8.Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ и $(AB)^m = E$ для некоторого целого числа m. Верно ли, что $(BA)^m = E$?

Содержание

Семинар 1. Компле́ксные числа. 3
Семинар 2. Многочлены. 5
Семинар 3. Рациональные дроби. 9
Семинар 4. Трехмерная векторная алгебра. 10
Семинар 5. Преобразование системы координат. 15
Семинар 6, 7. Прямые и плоскости. 18

Семинар 8,9. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. 26
Семинар 10. Векторные пространства. 31
Семинар 11 Действия с матрицами. 35
Семинар 12. Перестановки и подстановки. 38
Семинар 13. Определители. 41
Семинар 14. Теорема Лапласа. Определители n-го порядка. 44
Семинар 15. Ранг матрицы. 48
Семинар 16. Обратная матрица. Матричное уравнение. 49
Семинар 17. Системы линейных уравнений. Фундаментальные решения. 51
Семинар 18. Сумма и пересечение векторных пространств. 54
Семинар 19. Линейные отображения и преобразования. 56
Семинар 20. Линейные операторы. 60
Семинар 21, 22. Нормальная жорданова форма матрицы. 63
Семинар 23. Функции от матрицы. Матричная экспонента 66
Семинар 24, 25. Эллипс, гипербола, парабола. 67
Семинар 26. Квадратичные формы. Метод Лагранжа. 73
Семинар 27. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. 76
Семинар 28, 29. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. 79
Семинар 30, 31. Группы и алгебры. 83

Учебное издание
Александрова Надежда Ивановна

СЕМИНАРЫ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ
И АНАЛИТИЧЕСКОЙОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Редактор С. Д. Андреева

Подписано в печать 30.08.07. Формат 60х 84 1/16. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 5.1. Уч.-изд. л. 5,5. Тираж 150 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.