ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Н. И. Александрова

СЕМИНАРЫ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Новосибирск
2008

УДК 517.7
ББК 22.143
А 46

Александрова Н. И. Семинары по линейной алгебре и дифференциальной геометрии: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2008. 44 с.

В пособии изложены необходимые для решения задач теоретические сведения по курсу линейной алгебры и дифференциальной геометрии, а также приведены задачи, используемые на практических занятиях на физическом факультете Новосибирского государственного университета во II семестре 1-го курса. На данный курс отводится 16 практических занятий, из которых одно посвящено контрольной работе.

Предназначено для студентов 1-го курса и преподавателей физического факультета.

Печатается по решению методической комиссии физического факультета.

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доц. Н. А. Кудрявцева

© Новосибирский государственный университет, 2008
© Александрова Н. И., 2008

Семинар 1. КРИВЫЕ: УРАВНЕНИЯ, КАСАТЕЛЬНАЯ, ДЛИНА

Определение. Элементарная кривая γ есть образ отрезка $[a,b]$ при взаимно однозначном и непрерывном отображении $F: [a,b] \to R^3$.

Способы задания кривых.

1)Параметрический: $\bar{r} = \bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, $a \le t \le b$, где $x(t), y(t), z(t)$ – непрерывные числовые функции, заданные на отрезке $[a,b]$.

2)Явный: $y = y(x)$, $z = z(x)$, $x_1 \le x \le x_2$.

3)Неявный: $\varphi(x,y,z) = 0$, $\psi(x,y,z) = 0$, где $\{x, y, z\} \in R^3$ и функции φ и ψ удовлетворяют условиям:

$$rang \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{pmatrix} = 2.$$

Определение. Говорят, что кривая γ принадлежит классу регулярности C^n $(n = 1,2,...,\infty)$, если её можно задать формулой вида $\bar{r} = \{x(t), y(t), z(t)\}$, $a \le t \le b$, где $x(t), y(t), z(t) \in C^n$, причём $\bar{r}'(t) \neq 0$ для всех $t \in [a,b]$. Кривая называется гладкой, если она принадлежит классу C^1.

Определение. Прямая называется касательной к кривой в данной её точке, если она является предельным положением секущей, проходящей через данную точку и другую точку кривой, неограниченно приближающуюся к данной.

Теорема о касательной. Гладкая элементарная кривая γ имеет в каждой точке касательную и притом единственную. Если $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – параметрическое уравнение кривой, то касательная в точке $\bar{r}(t_0)$ имеет направление вектора $\bar{r}'(t_0)$. При этом уравнение касательной имеет вид $\tilde{r} = \bar{r}(t_0) + \lambda \bar{r}'(t_0)$

или $\frac{\tilde{x} - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{\tilde{y} - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{\tilde{z} - z(t_0)}{z'(t_0)}$, где $\tilde{r} = \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ – радиус-вектор точки касательной. Если кривая задана явно, то уравнение касательной в точке $\{x, y(x), z(x)\}$ имеет вид $\frac{\tilde{y} - y(x)}{y'(x)} = \frac{\tilde{z} - z(x)}{z'(x)} = \tilde{x} - x$. Если кривая задана неявно, то уравнение касательной в точке $\{x, y, z\}$ имеет вид $\frac{\tilde{x} - x}{\tau_1} = \frac{\tilde{y} - y}{\tau_2} = \frac{\tilde{z} - z}{\tau_3}$, где $\bar{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\} = grad\varphi \times grad\psi$.

Определение. Длина дуги кривой линии определяется как предел длины ломаной линии, вписанной в данную дугу, если число звеньев этой линии неограниченно возрастает, а длина каждого звена стремится к нулю.

Теорема. Пусть γ – гладкая элементарная кривая. Длина дуги $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $a \le t \le b$, на кривой γ равна $S(\gamma) = \int_a^b |\bar{r}'(t)| dt$, где $\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ – произвольная регулярная параметризация кривой γ. Если γ задана явно: $y = y(x)$, $z = z(x)$, $x_1 \le x \le x_2$, то $S(\gamma) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$.

Определение. Параметр t на кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $a \le t \le b$ называется натуральным, если с точностью до постоянного слагаемого он равен длине дуги этой кривой, отсчитываемой (со знаком) от какой-нибудь её точки в каком-нибудь выбранном направлении. Обычно его обозначают *s*.

Определение. Нормальной плоскостью кривой в точке P называется плоскость, проходящая через точку P ортогонально касательной в этой точке.

Определение. Нормалью плоской кривой в точке P называют прямую, расположенную в её плоскости, ортогональную касательной в этой точке.

Задачи

1.Круг радиуса a катится по прямой без скольжения. Составить уравнение траектории точки М, жёстко связанной с кругом и находящейся на расстоянии d от его центра. Такие кривые называются циклоидами.

2.Кривой Вивиани называется линия пересечения боковой поверхности кругового цилиндра радиуса R и сферы радиуса $2R$, центр которой находится на образующей цилиндра. Составить параметрическое уравнение кривой Вивиани. *Указание.* Принять за начало координат центр сферы, за ось z образующую цилиндра. Положить $y = R\sin t$.

3.Составить уравнение касательной и нормали к следующим кривым:

a) $\bar{r} = \{a\cos t, b\sin t\}$, $0 \le t \le 2\pi$;

b) $\bar{r} = \{a(t + t^{-1})/2, b(t - t^{-1})/2\}$, $t > 0$;

c) $\bar{r} = \{at\cos t, at\sin t\}$, $-\infty < t < \infty$.

4.Составить уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к следующим кривым:

a) $\bar{r} = \{t^3 - t^2 - 5, 3t^2 + 1, 2t^3 - 16\}$ в точке $t = 2$;

b) $\bar{r} = \{R(1 + \cos t), R\sin t, 2R\sin(t/2)\}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

5.Вычислить длину дуги следующих кривых:

c) $\bar{r} = \{a\cos^3 t, a\sin^3 t\}$, $0 \le t \le 2\pi$;

d) $\bar{r} = \{a(t - \sin t), a(1 - \cos t)\}$, $0 \le t \le 2\pi$;

e) $\bar{r} = \{a\,sh\,t, a\,ch\,t, at\}$, $0 \le t \le t_0$;

f) $y = a\,ch(x/a)$, $0 \le x \le x_0$.

6.Найти выражение длины дуги кривой, заданной уравнением $\rho = \rho(\theta)$ в полярных координатах, от угла θ_1 до угла θ_2.

7.Репараметризовать кривые натуральным параметром:

g) $\bar{r} = \{a\cos t, a\sin t, bt\}$;

h) $\bar{r} = \{ch\,t, sh\,t, t\}$.

Семинар 2. КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ

Определение. Кривизна гладкой кривой в данной её точке есть предел отношения угла поворота касательной на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги.

Утверждение. Если $\gamma \in C^2$ и $\vec{r}'(t) \neq 0$, то определена кривизна k кривой γ, вычисляемая по формулам $k = |\vec{r}''(s)|$, где s – натуральный параметр, или $k = \dfrac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$, где t – произвольный параметр.

Определение. Точка, где $k = 0$, называется точкой распрямления кривой.

Определение. Пусть $\gamma \in C^2$, $k \neq 0$. Тогда для каждой точки кривой существует единственная окружность, проходящая через эту точку и имеющая с кривой касание второго порядка. Такая окружность называется соприкасающейся. Её радиус $R = 1/k$ называется радиусом кривизны, а её центр – центром кривизны линии в рассматриваемой точке.

Определение. Нормаль, проходящая через данную точку кривой и центр кривизны, называется главной нормалью. Обозначается через $\bar{\nu}$.

Определение. Нормаль, ортогональная главной нормали, называется бинормалью. Обозначается $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$, где $\bar{\tau}$ – касательный орт.

Определение. Тройка векторов $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ называется репером Френе:

$$\bar{\tau} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}, \quad \bar{\beta} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}, \quad \bar{\nu} = \bar{\beta} \times \bar{\tau}.$$

Определение. Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль, называется соприкасающейся плоскостью.

Определение. Плоскость, проходящая через касательную и бинормаль, называется спрямляющей плоскостью.

Определение. Плоскость, проходящая через данную точку кривой и ортогональная касательной, называется нормальной плоскостью.

Определение. Касательная, главная нормаль и бинормаль и три плоскости – соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая – вместе образуют так называемый сопровождающий трехгранник.

Определение. Кручение кривой в данной её точке равно пределу отношения угла поворота бинормали на дуге, стягивающейся к данной точке, к длине этой дуги.

Утверждение. Если $\gamma \in C^3$ и в некоторой точке кривой кривизна отлична от нуля, то определено кручение кривой æ, вычисляемое по формулам

$$æ = \frac{(\bar{r}'(s), r''(s), \bar{r}'''(s))}{\left|\bar{r}''(s)\right|^2} \quad \text{или} \quad æ = \frac{(\bar{r}'(t), r''(t), \bar{r}'''(t))}{\left[\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)\right]^2}.$$

Там, где $k = 0$, кручение не определено.

Определение. Точки, в которых $æ = 0$, называются точками уплощения кривой.

Задачи

1.Найти кривизну и кручение следующих кривых:

a) $\bar{r} = \{R(1+\cos t), R\sin t, 2R\sin(t/2)\}$;

b) $x^3 = 3a^2 y$, $2xz = a^2$;

c) $\bar{r} = \{\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t\}$;

d) $\bar{r} = \{e^t \sin t, e^t \cos t, e^t\}$.

2.Найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнениями в неявном виде: $x + sh\, x = \sin y + y$, $z + e^z = x + \ln(1+x) + 1$ в точке $(0, 0, 0)$.

3.Найти сопровождающий трехгранник для следующих кривых:

a) $\bar{r} = \{R(1+\cos t), R\sin t, 2R\sin(t/2)\}$ в точке $t = \pi/2$;

b) $x = y^2$, $x^2 = z$ в точке $(1,1,1)$.

4.Показать, что кривая $\bar{r} = \{au+b, cu+d, u^2\}$ имеет одну и ту же соприкасающуюся плоскость.

5.Доказать, если $æ=0$, $k \neq 0$ во всех точках кривой, то эта кривая плоская.

Семинар 3. УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ. ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ

Определение. Элементарной поверхностью называется образ плоской области U при непрерывном взаимно однозначном отображении $F: U \to R^3$.

Способы задания поверхности.

1)Параметрическое задание: $\bar{r} = \bar{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$, где $\bar{r}(u,v)$ – непрерывная вектор-функция. При этом u, v изменяются в области на плоскости и называются криволинейными координатами на поверхности.

2)Явное задание: $z = f(x,y)$, где f – непрерывная функция, определенная в некоторой области.

3)Неявное задание: $\varphi(x,y,z) = 0$, где $grad\varphi \neq 0$.

Определение. Если $\bar{r}(u,v)$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция и $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0$, то параметризация F называется регулярной.

Определение. Точка $\bar{r}_0$ на поверхности называется особой, если в этой точке $\bar{r}_u \times \bar{r}_v = 0$ в случае поверхности, заданной параметрически, и $grad\,\varphi = 0$ в случае поверхности, заданной неявно.

Определение. $\bar{n} = [\bar{r}_u \times \bar{r}_v] / |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|$ – вектор нормали к поверхности в данной точке. Он определен, если точка не особая.

Определение. Говорят, что прямая касается поверхности, если она касается некоторой кривой, принадлежащей данной поверхности.

Определение. Касательной плоскостью поверхности называется плоскость, в которой лежат все прямые, касающиеся поверхности в данной точке.

Определение. Элементарная поверхность называется гладкой, если она имеет гладкую параметризацию, т. е. её можно задать формулой вида $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, где $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1$ и $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0$.

Теорема. Гладкая поверхность имеет в каждой точке касательную плоскость, и притом единственную. Уравнение касательной плоскости имеет вид:

1) $(\tilde{r} - \bar{r}, \bar{r}_u, \bar{r}_v) = 0$, если поверхность задана параметрически. Здесь $\tilde{r} = \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ – радиус-вектор точки касательной;

2) $\tilde{z} - z = (\tilde{x} - x)z_x + (\tilde{y} - y)z_y$, если поверхность задана явно;

3) $(\tilde{r} - \bar{r}, grad\, \varphi) = 0$, если поверхность задана неявно.

Определение. Первая квадратичная форма поверхности на гладкой поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ определяется формулой

$$I(\bar{\xi}) = (\bar{\xi}, \bar{\xi}) = E\xi_1^2 + 2F\xi_1\xi_2 + G\xi_2^2, \quad \bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2) = \xi_1\bar{r}_u + \xi_2\bar{r}_v$$

где $E = (\bar{r}_u, \bar{r}_u)$, $F = (\bar{r}_u, \bar{r}_v)$, $G = (\bar{r}_v, \bar{r}_v)$ – коэффициенты первой квадратичной формы.

Утверждение. Пусть поверхность задана уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ и на ней заданы кривые γ_1, γ_2 уравнениями $\gamma_1 : u = u_1(t), v = v_1(t)$ и $\gamma_2 : u = u_2(t), \quad v = v_2(t)$. Тогда длина касательного вектора $\bar{\tau}_1$ к кривой γ_1 вычисляется по формуле

$$|\bar{\tau}_1| = \sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2} = \sqrt{I(\bar{\tau}_1)},$$

а угол между векторами $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$, касательными к этим кривым, определяется по формуле

$$\cos\theta = \frac{(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)}{|\bar{\tau}_1||\bar{\tau}_2|} = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv_1'v_2'}{\sqrt{I(\bar{\tau}_1)I(\bar{\tau}_2)}}.$$

Утверждение. Угол между координатными линиями определяется формулой $\cos\theta = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v)}{|\bar{r}_u||\bar{r}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$.

Утверждение. Координатная сеть на поверхности ортогональна $\Leftrightarrow \quad F = 0$.

Утверждение. Длина дуги кривой $\gamma: \; u = u(t), v = v(t)$, $a \le t \le b$, заданной на поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, определяется формулой

$$\int_a^b |\bar{r}'|dt = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{I(u',v')}dt.$$

Утверждение. Площадь области на поверхности определяется формулой

$$S(D) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

Определение. Линейчатой поверхностью называется поверхность, задаваемая параметрическим уравнением $\bar{r} = \bar{\rho}(u) + v\bar{a}(u)$, где $\bar{\rho}(u)$ – вектор-функция, задающая некоторую кривую, $\bar{a}(u)$ – вектор-функция, задающая распределение прямолинейных образующих линейчатой поверхности.

Задачи

1.Найти параметрические уравнения поверхностей:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$; b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; c) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$

.

2.Перейти от параметрического задания тора к неявному:

$\bar{r}=\{(a+\rho\cos\theta)\cos\varphi,(a+\rho\cos\theta)\sin\varphi,\rho\sin\theta\}$,

$0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le 2\pi$.

3.Составить уравнение поверхности, образованной вращением трактрисы $x=a\ln tg(\pi/4+t/2)-a\sin t$, $y=a\cos t$ вокруг оси *Ox*.

4.Составить уравнение линейчатой поверхности, образующие которой параллельны плоскости $y-z=0$ и пересекают параболы $y^2=2px$, $z=0$ и $z^2=-2px$, $y=0$.

5.Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхностям:

a) $\bar{r}=\{u\cos v,u\sin v,kv\}$;

b) $xyz=a^3$.

6.Вычислить первую квадратичную форму поверхности вращения $\bar{r}(u,v)=\{\rho(u)\cos v,\rho(u)\sin v,z(u)\}$ и найти линии, которые делят пополам углы между координатными линиями на поверхности, если $\rho(u)=u$, $z(u)=u^2/2$.

7.Найти длину дуги кривой, заданной уравнением $u=v$ на поверхности с первой квадратичной формой $I=du^2+sh^2udv^2$.

8.Первая квадратичная форма поверхности имеет вид $I=du^2+(u^2+a^2)dv^2$. Вычислить, под каким углом пересекаются кривые $u+v=0$ и $u-v=0$. Вычислить площадь треугольника, образованного пересечением кривых $u=\pm av$ и $v=1$.

9.Дана поверхность $\bar{r}=\{u\sin v,u\cos v,v\}$. Найти площадь криволинейного треугольника $0\le u\le shv,0\le v\le v_0$, длины сторон этого треугольника и его углы.

10.Вычислить первую квадратичную форму тора (см. задачу 2).

11.Найти площадь всего тора и его внутренней и внешней поверхностей.

Семинар 4. ВТОРАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ

Определение. Нормальным сечением поверхности F в точке P называется линия пересечения поверхности с произвольной плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке P.

Определение. Нормальной кривизной поверхности F в точке P в направлении вектора $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ называется кривизна нормального сечения этой поверхности в точке P в данном направлении.

Утверждение. Нормальная кривизна поверхности F в точке P в направлении $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$, $|\lambda| = 1$ вычисляется по формуле $k(P, \lambda) = L(\lambda^1)^2 + 2M\lambda^1\lambda^2 + N(\lambda^2)^2 = II(\lambda)$, где $II(\lambda)$ – вторая квадратичная форма, $L = (\bar{r}_{uu}, \bar{n})$, $M = (\bar{r}_{uv}, \bar{n})$, $N = (\bar{r}_{vv}, \bar{n})$ – её коэффициенты, $\bar{n} = [\bar{r}_u \times \bar{r}_v] / |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|$ – нормаль к поверхности. Если $|\lambda| \neq 1$, то $k(P, \lambda) = II(\lambda) / I(\lambda)$.

Утверждение. Для произвольной точки $P \in F$ справедливо утверждение: либо существуют два взаимно ортогональных направления, называемых главными направлениями, в которых $k(\lambda)$ имеет экстремальные значения $k_1 = \min\limits_{\lambda} k(\lambda)$, $k_2 = \max\limits_{\lambda} k(\lambda)$, $k_1 < k_2$; либо кривизна всех нормальных сечений одинакова ($k(\lambda) = k_1 = k_2$) – такая точка называется омбилической. Величины k_1, k_2 называются главными кривизнами поверхности в точке P.

Утверждение. Главные кривизны k_1, k_2 есть корни квадратного уравнения

$$k^2(EG - F^2) - k(LG - 2MF + NE) + (NL - M^2) = 0.$$

Формула Эйлера. Если нормальное сечение образует угол ϕ с первым главным направлением, то для кривизны этого сечения справедлива формула $k = k_1 \cos^2\phi + k_2 \sin^2\phi$.

Определение. Те направления, в которых $k = 0$, называются асимптотическими направлениями. Они определяются уравнением $II(du, dv) = 0$.

Определение. Гауссовой кривизной поверхности называется величина

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Определение. Средней кривизной поверхности называется величина

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

Классификация точек: $K > 0$ – эллиптическая точка; $K < 0$ – гиперболическая точка; $K = 0, H \neq 0$ – параболическая точка; $K = 0, H = 0$ – точка уплощения.

Определение. Линия на поверхности называется линией кривизны, если в каждой своей точке она имеет главное направление. Линии кривизны определяются дифференциальным уравнением

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Определение. Поверхность называется минимальной, если во всех её точках $H = 0$.

Определение. Поверхность называется развёртывающейся, если $K = 0$.

Задачи

1.Найти асимптотические линии поверхностей:

a) $z = a\left(x/y + y/x\right)$;

b) $\bar{r}(u,v) = \left\{chu\cos v,\ chu\sin v,\ u\right\}$.

2.Вычислить вторую квадратичную форму следующих поверхностей:

a) $\bar{r} = \left\{R\cos u\cos v,\ R\cos u\sin v,\ R\sin u\right\}$ (сфера);

b) $\bar{r} = \left\{a\,chu\cos v,\ b\,shu\sin v,\ c\,shu\right\}$ (двуполостный гиперболоид);

c) $\bar{r} = \left\{u\cos v,\ u\sin v,\ au\right\}$ (круговой конус);

d) $\bar{r} = \left\{u\cos v,\ u\sin v,\ av\right\}$ (прямой геликоид);

e) $xyz = a^3$.

3.Вычислить гауссову и среднюю кривизну поверхностей:

a) $\bar{r} = \left\{u\cos v,\ u\sin v,\ u+v)\right\}$;

b) $x = 3u + 3uv^2 - u^3,\ y = v^3 - 3v - 3u^2v,\ z = 3(u^2 - v^2)$;

c) $\bar{r} = \left\{a(u-v),\ b(u+v),\ uv\right\}$.

4.Найти главные кривизны поверхностей:

a) $\bar{r} = \left\{\cos v - (u+v)\sin v,\ \sin v + (u+v)\cos v,\ u + 2v\right\}$;

b) $y = x\cdot tg(z/a)$.

5.Найти линии кривизны на поверхностях:

a) $\bar{r} = \left\{u\cos v,\ u\sin v,\ kv)\right\}$;

b) $\bar{r} = \left\{a(u-v),\ b(u+v),\ uv\right\}$.

Семинар 5. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Определение. Геодезическая кривизна линии L в точке P по абсолютной величине равна кривизне в этой точке проекции линии L на касательную плоскость к F,

проведенную в точке P. Вычисляется по формуле $k_g = |(\bar{r}_{tt}, \bar{r}_t, \bar{n})| / |\bar{r}_t|^3$.

Определение. Линия на поверхности называется геодезической, если во всех её точках $k_g = 0$. Это условие эквивалентно следующему: главная нормаль линии в каждой точке совпадает с нормалью к поверхности в этой же точке.

Утверждение. Через каждую точку поверхности в заданном направлении проходит единственная геодезическая линия.

Теорема Менье. Нормальная кривизна линии L в произвольной точке P равна кривизне нормального сечения поверхности F, проходящей через точку P в направлении линии L.

Задачи

1.Найти геодезическую кривизну винтовых линий геликоида $\bar{r} = \{u\cos v, u\sin v, av)\}$.

2.Найти геодезические линии следующих поверхностей:

a) $\bar{r} = \{u\cos v, u\sin v, av)\}$ (геликоид);

b) $x^2 + y^2 = z^2$ (круговой конус);

c) $\bar{r} = a\{\sin u\cos v, \sin u\sin v, \ln tg\, u/2 + \cos u\}$ (псевдосфера);

d)куб.

Семинар 6. ГЕОМЕТРИЯ ЕВКЛИДОВЫХ И ЭРМИТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение. Пусть V^n – векторное пространство размерности n над полем вещественных или комплексных чисел. Скалярным произведением в V^n называется отображение, которое каждой паре векторов $x, y \in V^n$ ставит в

соответствие число (x, y) (действительное или соответственно комплексное) и удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$ для любых чисел α, β и любых векторов $x, y, z \in V^n$ (линейность по первому аргументу);

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где черта означает комплексное сопряжение (эрмитова симметричность);

3) $(x, x) \geq 0$ для любого $x \in V^n$, причём $(x, x) = 0$ если и только если $x = 0$ (положительная определенность).

Определение. Векторное пространство V^n со скалярным произведением над полем вещественных чисел называется евклидовым, а над полем комплексных чисел – унитарным (эрмитовым).

Определение. Пусть $e_1, ..., e_n$ – базис в V^n, где V^n – унитарное пространство. Тогда скалярное произведение векторов $x = \sum_1^n x_i e_i$ и $y = \sum_1^n y_i e_i$ записывается в виде $(x, y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i \bar{y}_j$, где $g_{ij} = (e_i, e_j)$ – коэффициенты этой билинейной формы. Матрица $G = (g_{ij})$ называется матрицей Грама базиса $e_1, ..., e_n$.

Определение. Векторы x, y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. В этом случае пишут $x \perp y$.

Определение. Длиной вектора x называется число $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Определение. Базис $e_1, ..., e_n$ называется ортонормированным, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Определение. Подмножество P векторного пространства V^n называется подпространством, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций

сложения и умножения, т. е. если для любых $x, y \in P$ и любого числа α имеем $x + y \in P$ и $\alpha x \in P$.

Определение. Пусть V^n – векторное пространство со скалярным произведением. Вектор $x \in V^n$ называется ортогональным подпространству P, если он ортогонален всем векторам из P, т. е. если $(x, y) = 0$ для любого $y \in P$.

Утверждение. Множество всех векторов, ортогональных подпространству P, является подпространством в V^n. Оно называется ортогональным дополнением к P и обозначается $P^{\perp}$.

Утверждение. Если P – подпространство векторного пространства V^n, то всякий вектор $x \in V^n$ единственным образом представляется в виде суммы $x = y + z$, где $y \in P$, $z \in P^{\perp}$. Вектор y называется ортогональной проекцией x на P.

Ортогонализация Грама – Шмидта. Пусть в пространстве V^n дана упорядоченная система линейно независимых векторов $x_1, ..., x_k$ $(1 \le k \le n)$. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта состоит в том, что этой системе сопоставляют новую систему векторов $z_1, ..., z_k$ по формулам

$$
\begin{aligned}
&y_1 = x_1, && z_1 = y_1 / |y_1|,\\
&y_2 = x_2 - (x_2, z_1) z_1, && z_2 = y_2 / |y_2|,\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\\
&y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} (x_k, z_j) z_j, && z_k = y_k / |y_k|.
\end{aligned}
$$

При этом векторы $z_1, ..., z_k$ ортонормированны и их линейная оболочка совпадает с линейной оболочкой векторов $x_1, ..., x_k$.

Теорема (неравенство Коши – Буняковского). Для любых двух векторов x, y векторного пространства со скалярным

произведением имеет место неравенство $|(x, y)| \le |x| \cdot |y|$, причём равенство достигается лишь в случае, когда векторы x, y линейно зависимы.

Теорема (неравенство треугольника для векторов). $|x + y| \le |x| + |y|$.

Теорема. Определитель матрицы Грама любой системы векторов $x_1, ..., x_k$ в евклидовом пространстве равен квадрату k-мерного объема параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1, ..., x_k$.

Задачи

1. Разложить вектор $x = (2, 7, -2, 5)$ в сумму $x = y + z$, $y \in P$, $z \in P^{\perp}$, где подпространство P порождается векторами

$x_1 = (1, -1, 1, -1)$, $x_2 = (4, -2, 4, -2)$, $x_3 = (-2, 7, -4, 7)$.

2. Найти ортогональную проекцию вектора $x = (-3, 5, 9, 3)$ на линейную оболочку системы векторов

$x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 1, 1)$, $x_3 = (2, -7, -1, -1)$.

3. Задана система векторов в ортонормированном базисе векторного пространства. При помощи процесса ортогонализации Грама – Шмидта построить ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов:

a) $(1, 2, 1), (3, 4, 1), (1, -3, -1)$;

b) $(1, 2, -1, 1), (-5, -5, 4, -2), (-3, 6, 2, 0)$;

c) $(1, -1, 1, -1), (4, -2, 4, -2), (-2, 7, -4, 7), (2, 7, -2, 5)$;

d) $(i, 1, -i), (2, 0, -1), (0, 2, -i)$;

e) $(1, -1, 1+i), (1, -i, -2+i), (1+2i, 4-i, -1)$.

4. В ортонормированном базисе четырёхмерного евклидового пространства задана пара векторов

$(1,1,1,2),(1,0,1,-1)$. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

5. Подпространство P евклидова пространства в некотором ортонормированном базисе задано системой линейных уравнений. Найти какой-либо ортонормированный базис в P:

a) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$;

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;

c) $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$, $x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$,

$x_1 - 3x_3 - 6x_4 = 0$.

6.Найти какой-либо ортонормированный базис в подпространстве евклидова пространства, натянутом на систему векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе:

a) $(101,101,-99,-99)$, $(-99,101,101,-99)$,

$(101,-99,-99,101)$;

b) $(29,11,19,1),(101,99,51,49),(52,-48,51,-49)$.

7.Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки векторов $(1,-1,2,0),(-1,1,1,3)$.

8.В пространстве $P^{(3)}$ многочленов степени не выше третьей со скалярным произведением $(p,q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ построить ортонормированный базис, применив процесс ортогонализации Грама – Шмидта к системе многочленов $1, t, t^2, t^3$.

9.Векторы x и y заданы в базисе $\{e_i\}$, и известна матрица Грама G базиса $\{e_i\}$. Вычислить матрицу Грама базиса $\{e_i'\}$ и скалярное произведение векторов x и y, если:

a) $\begin{matrix} e_1' = e_1 - e_2, \\ e_2' = e_1 - 2e_2 \end{matrix}$; $\quad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{matrix} e_1' = e_1 + ie_2, \\ e_2' = -3ie_1 + 4e_2 \end{matrix}$; $G = \begin{pmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$;

10.Найти длину вектора x, заданного в некотором ортонормированном базисе:

a) $x = (1, -2, 3, 4)$; b) $x = (1, i)$; c) $x = (1+i, 1-i)$.

11.В пространстве $P^{(3)}$ многочленов степени не выше третьей со скалярным произведением $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ найти объем параллелепипеда $P(1, x, x^2)$ и расстояние от x^3 до подпространства многочленов степени не выше второй.

12.Доказать, что если $|x-y|+|y-z|=|x-z|$, то x, y, z – линейно зависимые вектора.

Семинар 7. САМОСОПРЯЖЁННЫЙ ОПЕРАТОР

Определение. Пусть V^n – унитарное (евклидово) пространство и $f: V^n \to V^n$ – линейный оператор. Оператор $f^*: V^n \to V^n$, для любых $x, y \in V^n$ удовлетворяющий равенству $(f(x), y) = (x, f^*(y))$, называется сопряжённым к оператору f.

Определение. Оператор называется самосопряжённым, если $f = f^*$.

Теорема. В унитарном (евклидовом) пространстве для каждого оператора f существует сопряжённый оператор f^*, и притом один. Если A – матрица оператора f в некотором базисе, то матрица A^* сопряжённого оператора f^* в том же базисе вычисляется по формуле $A^* = \overline{G^{-1}A^TG}$, где G – матрица Грама этого базиса, а черта означает комплексное сопряжение. Если базис ортонормированный, то $A^* = \overline{A^T}$ – для унитарного пространства и $A^* = A^T$ – для евклидова.

Определение. Матрица A^* называется эрмитово сопряжённой матрице A, если $A^* = \overline{A^T}$, т. е. $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$ для всех $i, j = 1, ..., n$.

Определение. Матрица называется эрмитовой, если $A^* = A$, т. е. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Определение. Матрица называется косоэрмитовой, если $A^* = -A$, т. е. $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$.

Определение. Матрица U называется унитарной, если $U^*U = UU^* = E$.

Определение. Матрица Q называется ортогональной, если $Q^TQ = QQ^T = E$.

Теорема. Пусть A – эрмитова матрица. Тогда найдется унитарная матрица U такая, что $U^*AU = D$ – диагональная матрица.

Замечание. Можно показать, что матрица U состоит из ортонормированных собственных векторов матрицы A, расположенных в виде столбцов, а матрица D – из собственных чисел матрицы A.

Задачи

1. Пусть оператор f переводит векторы $a_1 = (0, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ ортонормированного базиса в векторы $b_1 = (1, 2, 1)$, $b_2 = (3, 1, 2)$, $b_3 = (7, -1, 4)$. Найти матрицу оператора f^* в исходном базисе.

2. Пусть A − матрица линейного преобразования в некотором базисе евклидова пространства, G − матрица Грама этого базиса. Найти матрицу A^* сопряжённого преобразования в том же базисе, если:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Определить, является ли оператор f самосопря-жённым, если A – матрица оператора f в некотором базисе, G – матрица Грама этого базиса:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

4. Доказать, что для любых векторов x, y имеет место равенство $(Ax, y) = (x, A^* y)$, где A^* – эрмитово сопряжённая матрица.

5. Доказать, что для эрмитовой матрицы $(Ax, y) = (x, Ay)$.

6. Доказать, что у эрмитовой матрицы все собственные числа вещественны.

7. Доказать, что у эрмитовой матрицы собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.

8. Доказать, что ортогональное дополнение к инвариантному подпространству эрмитовой матрицы само является инвариантным подпространством, т. е. если $P \subset V^n$ – подпространство и $A(P) \subseteq P$, то $A(P^\perp) \subseteq P^\perp$.

9. Доказать, что A – эрмитова матрица, если и только если для любого вектора x число (Ax, x) вещественно.

10. Доказать, что $(AB)^* = B^* A^*$.

11. Пусть A и B эрмитовы матрицы. Показать, что $(AB + BA)$ и $i(AB - BA)$ эрмитовы.

12. Доказать, что если $A = A^*$, то матрица $A - iE$ обратима.

13. Доказать, что если $P \subset V^n$ – подпространство и $A(P) \subseteq P$, то $A^*(P^\perp) \subseteq P^\perp$.

14. Доказать, что все отличные от нуля собственные числа косоэрмитовой матрицы чисто мнимы, а собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, ортогональны.

15. Доказать, что все отличные от нуля собственные числа кососимметрической матрицы чисто мнимы, а вещественная и мнимая части соответствующих собственных векторов равны по длине и ортогональны.

16. Для данной эрмитовой матрицы A найти диагональную и унитарную матрицы D, U так, чтобы $U^* AU = D$:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2i \\ 2 & -1 & 2\sqrt{2}+i \\ -2i & 2\sqrt{2}-i & -1 \end{pmatrix}$.

Семинар 8. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР

Определение. Пусть V^n – унитарное (евклидово) пространство и $f : V^n \to V^n$ – линейный оператор. Оператор f называется изометрическим, если для любых $x, y \in V^n$ справедливо равенство $(f(x), f(y)) = (x, y)$. Если пространство евклидово, то оператор f называется ортогональным. Если пространство унитарное, то оператор f называется унитарным.

Теорема. Следующие условия равносильны:

1)оператор f – изометрический;

2)для любого $x \in V^n$ имеем $|f(x)| = |x|$;

3)если A – матрица оператора f в ортонормированном базисе, то A – унитарная матрица, т. е. $A^* A = AA^* = E$;

4) f обратим и $f^* = f^{-1}$;

5) f переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

Теорема. Для каждой унитарной матрицы A найдется унитарная матрица U такая, что $U^* AU = D$ – диагональная матрица с диагональными элементами, по модулю равными единице.

Замечание. Можно показать, что матрица U состоит из ортонормированных собственных векторов матрицы A, расположенных в виде столбцов, а матрица D – из собственных чисел матрицы A.

Теорема. Для каждой ортогональной матрицы A найдется ортогональная матрица U такая, что $U^T AU = D$ – диагональная матрица, у которой по диагонали стоят числа $1, -1$ или матрицы $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Определение. Матрица D называется каноническим видом ортогональной матрицы A, а базис, в котором матрица A имеет такой вид, называется каноническим.

Алгоритм построения канонического базиса. Канонический базис состоит из ортонормированных собственных векторов матрицы A, если соответствующее собственное число вещественно, и из ортонормированных действительных и мнимых частей собственных векторов матрицы A, если собственное число комплексно. Матрица U состоит из векторов канонического базиса, расположенных в виде столбцов. Матрица D состоит из собственных чисел матрицы A, если они вещественны, или матриц $A(\varphi_j)$, в

которых углы φ_j определяются из условия $\lambda_j = \cos\varphi_j + i\sin\varphi_j$, где λ_j – собственные числа матрицы A.

Определение. Оператор f называется нормальным, если он перестановочен со своим сопряжённым $f f^* = f^* f$.

Теорема. Для любого нормального оператора f существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет диагональный вид.

Задачи

1.Доказать, что произведение двух унитарных матриц унитарно.

2.Доказать унитарность обратной матрицы, если исходная матрица унитарна.

3.Доказать, что у унитарной матрицы все собственные числа по модулю равны 1.

4.Доказать, что $(A - iE)^{-1}(A + iE)$ – унитарная матрица, если $A = A^*$.

5.Пусть f – ортогональное преобразование, $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ – его собственное число. Доказать, что найдутся векторы $u, v \neq 0$ такие, что $(u,v) = 0$, $f(u) = \alpha u - \beta v$, $f(v) = \beta u + \alpha v$.

6.Ортогональное преобразование f в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства задано матрицей A. Найти канонический базис и матрицу преобразования f в этом базисе:

a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$; e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4}$.

7. Определить, является ли ортогональным линейное преобразование f, действующее на векторы ортонормированного базиса $e_1, ..., e_n$ по формулам:

a) $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_1 - e_2$;

b) $f(e_1) = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$, $f(e_2) = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$;

c) $f(e_1) = (3e_1 + 4e_2)/5$, $f(e_2) = (4e_1 - 3e_2)/5$;

d) $f(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $f(e_2) = 2e_1 + e_2 - 2e_3$, $f(e_3) = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

8. Определить, является ли унитарным оператор f, действующий на векторы ортонормированного базиса $e_1, ..., e_n$ по формулам:

a) $f(e_1) = e_1 + ie_2$, $f(e_2) = ie_1 - e_2$;

b) $f(e_1) = (2e_1 + ie_2)/\sqrt{5}$, $f(e_2) = (ie_1 + 2e_2)/\sqrt{5}$.

9. Доказать, что всякий унитарный оператор является нормальным.

10. Доказать, что всякий самосопряжённый оператор – нормальный.

11. Доказать, что для нормального оператора f любой собственный вектор x, соответствующий собственному числу λ, будет собственным вектором оператора f^*, соответствующим собственному числу $\overline{\lambda}$.

Семинар 9. ПРИВЕДЕНИЕ ПАРЫ ФОРМ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Определение. Пусть в евклидовом пространстве V^n фиксирован базис $e_1, ..., e_n$. Тогда любой вектор $x \in V^n$ может быть записан в виде $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ или $x = (x_1, ..., x_n)^T$. Отображение f из V^n в R, определенное по формуле $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = x^TAx = (Ax, x)$, где $a_{ij} = a_{ji}$, называется квадратичной формой f на V^n. Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей квадратичной формы.

Теорема. Для каждой квадратичной формы f на евклидовом пространстве V^n существует ортонормированный базис, в котором f имеет канонический (диагональный) вид $f = \lambda_1x_1^2 + ... + \lambda_nx_n^2$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in R$. Если форма имеет такой вид, то говорят, что она приведена к главным осям.

Теорема. Пусть есть две квадратичные формы f и g в евклидовом пространстве V^n, причём g положительно определена, т. е. $g(x) > 0$ для всех $x \neq 0$. Тогда существует базис, в котором обе эти формы одновременно приводятся к диагональному виду.

Алгоритм приведения пары форм к диагональному виду. Пусть $f(x) = x^TA_fx$, $g(x) = x^TA_gx$. Приведем форму g невырожденным линейным преобразованием $x = Qy$ (например, с помощью алгоритма Лагранжа) к сумме квадратов. Это возможно, поскольку g положительно определена. Матрицы квадратичных форм изменятся: $A_f' = Q^TA_fQ$ и $A_g' = Q^TA_gQ = E$. Приведем матрицу A_f' квадратичной формы f к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования $y = Uz$: $A_f'' = U^TA_f'U$. Матрица квадратичной формы g при этом преобразовании не изменится: $A_g'' = U^TA_g'U = U^TU = E$. Искомым преобразованием будет $S = QU$.

Задачи

Найти невырожденное линейное преобразование, приводящее пару форм к диагональному виду:

1. $f = x_1^2 + 4x_1x_2 - 15x_2^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$,
   $g = x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;
2. $f = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$,
   $g = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_3^2$;
3. $f = -10x_1x_2 + 15x_2^2 - 8x_1x_3 + 22x_2x_3 - 4x_3^2$,
   $g = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Семинар 10. СОПРЯЖЁННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение. Линейным функционалом на векторном пространстве V^n называется линейное отображение f пространства V^n во множество вещественных или комплексных чисел такое, что $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для любых чисел α, β и любых векторов $x, y \in V^n$.

Во множестве линейных функционалов на пространстве V^n введем операции сложения и умножения на число по формулам $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Утверждение. Множество линейных функционалов на V^n при таком определении сложения и умножения на число является векторным пространством и называется сопряжённым к V^n и обозначается через V^{n*}.

Пусть $e_1, ..., e_n$ – базис в V^n. Определим в V^{n*} элементы $e^1, ..., e^n$, задавая их значения на базисных векторах формулой $e^i(e_j) = \delta^i_j$, где δ^i_j – символ Кронекера, и продолжим e^i на V^{n*} по линейности. Для любого линейного

функционала f положим $f_i = f(e_i)$. Можно показать, что f может быть представлен в виде суммы $f = f_i e^i$ (здесь и далее знак суммы по повторяющимся индексам (один вверху, другой внизу) опущен). Это означает, что элементы $e^1, ..., e^n$ образуют базис в пространстве V^{n*}. Этот базис называется сопряжённым, или взаимным базисом к базису $e_1, ..., e_n$ в V^n.

Преобразование координат при замене базиса в V^n. Перейдем в V^n от базиса $e_1, ..., e_n$ к новому базису $e_1', ..., e_n'$ с помощью невырожденной матрицы $A = (a_k^i)$, $i,k = 1,...,n$, где i – номер столбца, k – номер строки: $e_i' = a_i^k e_k$. Пусть $x = x^i e_i = x^{j'} e_j'$, тогда новые координаты вектора выражаются через старые по формуле $x^{i'} = b_r^i x^r$, где матрица $B = (b_k^i) = A^{-1}$ – обратная к матрице A, т. е. $b_r^i a_k^r = \delta_k^i$. Векторы $x \in V^n$ называются контравариантными или просто векторами. В пространстве V^{n*} базисам $e_1, ..., e_n$ и $e_1', ..., e_n'$ соответствуют базисы $e^1, ..., e^n$ и $e^{1'}, ..., e^{n'}$. Пусть $f = f_i e^i = f_j' e^{j'}$, тогда $f_i' = a_i^k f_k$, т. е. координаты меняются с помощью той же матрицы A. Векторы $f \in V^{n*}$ называются ковариантными векторами или ковекторами.

В случае евклидова пространства E^n со скалярным произведением (x, y) каждый вектор $y \in E^n$ порождает линейный функционал $\tilde{y}$ на E^n, определенный формулой $\tilde{y}(x) = (x, y)$. Таким образом, мы получили отображение $\varphi : E^n \to E^{n*}$, задаваемое формулой $\varphi(y) = \tilde{y}$. Можно показать, что отображение φ является изоморфизмом, что условно можно записать в форме $E^n = E^{n*}$, т. е. евклидово пространство является самосопряжённым. Следовательно, векторы и ковекторы являются векторами одного и того же

пространства. Поэтому говорят о контравариантных и ковариантных координатах одного и того же вектора: $x = x^i e_i = x_j e^j$.

Геометрический смысл: контравариантные координаты вектора связаны с косоугольным проектированием $x = x^i e_i$; ковариантные координаты вектора связаны с прямоугольным проектированием $x_k = (x, e_k)$. В случае ортонормированного базиса ковариантные и контравариантные компоненты вектора совпадают $x^i = x_i$. Связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора: $x_i = g_{ki} x^k$, $x^i = g^{ik} x_k$, где $g_{ki} = (e_k, e_i)$, $g^{ki} = (e^k, e^i)$ – элементы матрицы обратной к (g_{ki}).

Задачи

1.Дан ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 и новый базис $e_1' = \{2, 4, 1\}$, $e_2' = \{0, 4, 4\}$, $e_3' = \{1, 1, 0\}$. Дан вектор с координатами $x^1 = 1$, $x^2 = 2$, $x^3 = 3$. Найти $x^{i'}$, x_i, x_i', e^i, $e^{i'}$ $(i = 1, 2, 3)$.

2.Дано: $x_1 = -2x_1' - x_2' - x_3'$, $x_2 = -x_2' - x_3'$, $x_3 = x_1' + 3x_2' + x_3'$. Выразить $x^{i'}$ через x^i, x_i' через x_i, e^i через $e^{i'}$ $(i = 1, 2, 3)$.

3.Сопоставим каждому многочлену $p(t) \in P^{(3)}$ число:

a) $f(p) = \int_{-1}^{1} (1 + t^2) p(t) dt$; b) $f(p) = \int_{0}^{1} p(t^2) dt$.

Доказать, что этим определен линейный функционал на пространстве многочленов $P^{(3)}$ не выше степени третьей, и вычислить его координатную строку в базисе из многочленов $1, t, t^2, t^3$.

4.Доказать, что многочлены $1, t, t^2, ..., t^n$ образуют базис в пространстве $P^{(n)}$. Найти взаимный к нему базис.

5. Пусть $\{e_k\}, \{e^k\}$ – старые, $\{e_k^{'}\}, \{e^{k'}\}$ – новые сопряженные базисы V^3 и V^{3*}, $x = 6e_1 + 9e_2 + 14e_3$, $y = e^1 + e^2 + e^3$. Найти координаты векторов x, y в новых базисах, если $e_1^{'} = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2^{'} = e_1 + e_2 + 2e_3$, $e_3^{'} = e_1 + 2e_2 + 3e_3$.

Семинар 11–12. ТЕНЗОРЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Определение. Говорят, что дан тензор в векторном пространстве V^n ранга $p+q$, если для каждой декартовой системы координат дана система n^{p+q} чисел $T_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$, $j_1, ..., j_q, i_1, ..., i_p = 1, ..., n$, называемых компонентами (координатами) тензора T, причём эти числа при переходе от одного базиса к другому преобразуются по закону

$$(T_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q})^{'} = a_{s_1}^{j_1} \cdot ... \cdot a_{s_q}^{j_q} \cdot b_{i_1}^{r_1} \cdot ... \cdot b_{i_p}^{r_p} \cdot T_{r_1 ... r_p}^{s_1 ... s_q},$$

где $A = (a_k^i)$ – матрица перехода от базиса $e_1, ..., e_n$ к новому базису $e_1^{'}, ..., e_n^{'}$, т. е. $e_i^{'} = a_i^k e_k$, а $B = (b_k^i) = A^{-1}$. Тензор T называют q раз контравариантным и p раз ковариантным и говорят, что он является тензором типа (p,q). Заметим, что часто используется такое обозначение: $(T_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q})^{'} = T_{i_1^{'} ... i_p^{'}}^{j_1^{'} ... j_q^{'}}$. В этих обозначениях тензорный закон преобразования запишется в виде $T_{i_1^{'} ... i_p^{'}}^{j_1^{'} ... j_q^{'}} = a_{j_1}^{j_1^{'}} \cdot ... \cdot a_{j_q}^{j_q^{'}} \cdot b_{i_1}^{i_1} \cdot ... \cdot b_{i_p}^{i_p} \cdot T_{i_1 ... i_p}^{j_1 ... j_q}$.

Примеры.

1.Скаляры. Тензор нулевого ранга называется скаляром.

2.Векторы и ковекторы представляют собой контравариантные и ковариантные тензоры ранга 1: $x = x^j e_j$, $y = y_i e^i$.

3.Метрический тензор. Матрица Грама (g_{ij}) базиса $e_1, ..., e_n$ в евклидовом пространстве задает тензор типа (2, 0), называемый метрическим тензором евклидова пространства. Матрица (g^{ij}), обратная к матрице Грама, определяет тензор типа (0, 2).

Операции над тензорами.

1.Сложение тензоров. Если даны два тензора S и T типа (p,q), то их суммой называют тензор U, определяемый формулой $U_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$.

2.Умножение на число. Если дан тензор S типа (p,q) и число $\alpha \in R$, то тензор αS определяется формулой $(\alpha S)_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \alpha S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$.

3.Умножение тензоров. Если даны тензор S типа (p,q) и тензор T типа (r,s), то их произведение ST определяется формулой $U_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+r}}^{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots j_{q+s}} = S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} T_{i_{p+1} \dots i_{p+r}}^{j_{q+1} \dots j_{q+s}}$ и является тензором типа $(p+r, q+s)$.

4.Свёртка тензора. Пусть даны тензор T типа (p,q) и числа k и r $(1 \le k \le q, 1 \le r \le p)$. Определим тензор S типа $(p-1, q-1)$ по формуле $S_{i_1 \dots i_{p-1}}^{j_1 \dots j_{q-1}} = T_{i_1 \dots i_{r-1} i i_{r+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_q}$. Заметим, что по i идет суммирование. Тензор S называется свёрткой тензора T.

5.Операция подъёма и опускания индекса. Пусть $G = (g_{ij})$ – метрический тензор в евклидовом пространстве V^n, а T – тензор типа (p,q). Если $q \ge 1$, то определим новый тензор формулой $S_{i_1 \dots i_{p+1}}^{j_1 \dots j_{q-1}} = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{k-1} \alpha j_{k+1} \dots j_q} g_{\alpha i_{p+1}}$. Эта операция называется операцией опускания индекса и переводит тензор

типа (p, q) в тензор типа $(p+1, q-1)$. Если $p \geq 1$, то определим новый тензор формулой $S_{i_1 \dots i_{p-1}}^{j_1 \dots j_{q+1}} = T_{i_1 \dots i_{k-1} \alpha\, i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} g^{\alpha\, j_{q+1}}$. Эта операция называется операцией подъёма индекса и переводит тензор типа (p, q) в тензор типа $(p-1, q+1)$.

Определение. Тензор называется симметрическим по верхним индексам (соответственно по нижним индексам), если при любой перестановке этих индексов компоненты тензора не меняются, т. е. $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = T_{i_1 \dots i_p}^{s_1 \dots s_q}$, где $s_1, \dots, s_q$ – произвольная перестановка индексов $j_1, \dots, j_q$.

Определение. Кососимметрическим (антисимметрическим) называется тензор, компоненты которого меняют знак при перемене местами любых двух индексов, если оба эти индекса верхние или нижние. Для произвольного антисимметрического тензора верно следующее равенство: $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \pm T_{i_1 \dots i_p}^{s_1 \dots s_q}$, где $s_1, \dots, s_q$ – произвольная перестановка индексов $j_1, \dots, j_q$, причём знак «+» берётся для чётной перестановки и знак «–» – для нечётной.

6. Операция симметрирования. Для любого тензора $T_{i_1 \dots i_p}$ определим симметрический тензор равенствами $T_{(i_1 \dots i_p)} = (p!)^{-1} \sum T_{s_1 \dots s_p}$, где суммирование ведется по всем перестановкам $s_1, \dots, s_p$ индексов $i_1, \dots, i_p$. Операция симметрирования для контравариантных тензоров и тензоров смешанного строения определяется аналогично.

7. Операция альтернирования. Для любого тензора $T_{i_1 \dots i_p}$ определим антисимметрический тензор равенствами $T_{[i_1 \dots i_p]} = (p!)^{-1} \sum \pm T_{s_1 \dots s_p}$, где суммирование ведется по всем перестановкам $s_1, \dots, s_p$ индексов $i_1, \dots, i_p$, причём знак «+» берется для чётной перестановки и знак «−» − для нечётной. Операция альтернирования для контравариантных тензоров и

тензоров смешанного строения определяется аналогично. Аналогично определяются операции симметрирования и альтернирования по группе индексов. Например,

$T_{[ij]k\ldots} = (T_{ijk\ldots} - T_{jik\ldots})/2$, $T^{(ij)k\ldots} = (T^{ijk\ldots} + T^{jik\ldots})/2$.

Правило частного. Сформулируем правило на частном примере. Пусть для каждой системы координат задана таблица чисел K^i_{jk} такая, что для любого тензора A^{lm}_p произведение $K^i_{jk}A^{lm}_p = B^{ilm}_{jkp}$ $(i, j, k, l, m, p = 1, \ldots, n)$ является тензором. Тогда K^i_{jk} – тензор. Это правило остается справедливым при любом количестве верхних и нижних индексов у тензоров K и A.

Задачи

1.Тензор T^{ij}_{kl} задан равенствами:

$T^{11}_{11} = 1$, $T^{11}_{21} = 2$, $T^{11}_{12} = 3$, $T^{11}_{22} = 4$, $T^{21}_{11} = -4$, $T^{21}_{21} = 3$,
$T^{21}_{12} = -2$, $T^{21}_{22} = -1$, $T^{12}_{11} = -4$, $T^{12}_{21} = -3$, $T^{12}_{12} = -2$,
$T^{12}_{22} = -4$, $T^{22}_{11} = 5$, $T^{22}_{21} = 6$, $T^{22}_{12} = 7$, $T^{22}_{22} = 8$.

Найти тензоры: a) T^{ij}_{il}, b) T^{ij}_{kj}, c) T^{ij}_{ki}, d) T^{ij}_{jl}, e) T^{ij}_{ij}, f) $T^{[ij]}_{kl}$, g) $T^{ij}_{[kl]}$, h) $T^{[ij]}_{[kl]}$, i) $T^{(ij)}_{kl}$, j) $T^{ij}_{(kl)}$, k) $T^{(ij)}_{(kl)}$.

2.Тензор T_{ijk} задан равенствами:

$T_{111} = 2$, $T_{112} = 4$, $T_{113} = 6$, $T_{121} = 4$, $T_{122} = 6$, $T_{123} = 8$, $T_{131} = 6$, $T_{132} = 2$, $T_{133} = 4$, $T_{211} = 6$, $T_{212} = 2$, $T_{213} = 4$, $T_{221} = 2$,
$T_{222} = 6$, $T_{223} = 6$, $T_{231} = 8$, $T_{232} = 4$, $T_{233} = 2$, $T_{311} = 4$,
$T_{312} = 8$, $T_{313} = 2$, $T_{321} = 6$, $T_{322} = 2$, $T_{323} = 4$, $T_{331} = 2$,
$T_{332} = 4$, $T_{333} = 6$.

Найти компоненты тензоров: a) $T_{[ijk]}$, b) $T_{(ijk)}$, c) $T_{[ij]k}$, d) $T_{i(jk)}$.

3.Каждому базису в пространстве сопоставлены числа:

$$\delta^{j_1\dots j_k}_{i_1\dots i_k} = \begin{cases} 1, & \text{если } j_1,\dots,j_k \text{ - чётная перестановка чисел } i_1,\dots,i_k; \\ -1, & \text{если } j_1,\dots,j_k \text{ - нечётная перестановка чисел } i_1,\dots,i_k; \\ 0 & \text{- в остальных случаях.} \end{cases}$$

Будет ли набор этих чисел тензором?

4.Доказать, что $T^{[j_1\dots j_k]} = \delta^{j_1\dots j_k}_{i_1\dots i_k} T^{i_1\dots i_k}$, $T_{[i_1\dots i_k]} = \delta^{j_1\dots j_k}_{i_1\dots i_k} T_{j_1\dots j_k}$.

5.Метрический тензор g_{ij} и тензор T_{ij} заданы равенствами $g_{11} = 2$, $g_{12} = g_{21} = 3$, $g_{22} = 5$, $T_{11} = 9$, $T_{12} = T_{21} = -5$, $T_{22} = 3$. Найти матрицы тензоров:

a) $S^i_j = g^{ik}T_{kj}$, b) $S^i_j = g^{ki}T_{jk}$, c) $S^{ij} = g^{ik}g^{jl}T_{kl}$.

6.Если матрица тензора T_{ij} симметрична, то будут ли симметричны матрицы тензоров:

a) $S^i_j = g^{ki}T_{jk}$, b) $S^{ij} = g^{ik}g^{jl}T_{kl}$?

Если матрица тензора T_{ij} симметрична в одном базисе, то будет ли она симметрична и в другом базисе?

7.Упростить выражения:

a) $(T_{ij}g^{jk} + \delta_i{}^j T_{jl}g^{lk})g_{ks}$, b) $\delta^i_j\delta^j_k g^{kl}T_{ij}$, c) $T_{ij}g^{jk}g_{kl}g^{ls}$.

8.Доказать, что тензор является кососимметрическим, если и только если его компоненты меняют знак при перемене местами любых двух соседних индексов.

Семинар 13. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. Пусть V^n – n-мерное евклидово пространство, в котором зафиксирована некоторая декартова система координат $(x^1,\dots,x^n)$, и пусть $e_1,\dots,e_n$ – базис, порождающий эту координатную систему. Возьмем вспомогательное арифметическое евклидово пространство R^n векторов $\bar{u} = (u^1,\dots,u^n)$. Пусть G – некоторая открытая область в V^n, U – некоторая открытая область в R^n, а

$f : U \to G$ – взаимно однозначное отображение области U на G. Так как f взаимно однозначно, то определено обратное отображение $f^{-1} : U \to G$. В координатах это записывается так: $x^i = x^i(u^1, ..., u^n)$, $i = 1, ..., n$, $u^k = u^k(x^1, ..., x^n)$, $k = 1, ..., n$. Будем говорить, что в области G задана криволинейная система координат $(u^1, ..., u^n)$, если отображение f гладкое и якобиан $J = \left| \partial u^i / \partial x^j \right| \neq 0$ в каждой точке области G.

Определение. Дадим одной из криволинейных координат постоянное значение $u^i = const$ и будем менять остальные. Получим так называемую координатную гиперповерхность.

Определение. Если закрепить все координаты кроме одной, которая будет меняться, получим так называемую координатную линию.

Локальный базис в криволинейных координатах. Через каждую точку $M(u^1, ..., u^n)$ проходит n координатных линий γ_i, $i = 1, ..., n$. Обозначим через $\bar{r}_i(M)$ вектор касательный к γ_i в точке M. Координаты вектора $\bar{r}_i(M)$ относительно основного фиксированного базиса $e_1, ..., e_n$ выражаются по формулам $\bar{r}_i(M) = \dfrac{\partial x^k}{\partial u^i} e_k$. Так как якобиан $J \neq 0$, то система векторов $\bar{r}_1, ..., \bar{r}_n$ образует базис, который называется локальным базисом в точке M, или ковариантным подвижным базисом криволинейной координатной системы.

Преобразование криволинейных координат. Пусть в области G введены две системы криволинейных координат: $u^1, ..., u^n$ – старая система, $u^{1'}, ..., u^{n'}$ – новая система и задана связь $u^{i'} = u^{i'}(u^1, ..., u^n)$. Это отображение в области G должно быть взаимно однозначным и гладким и во всей области G якобиан $J = \left| \partial u^{i'} / \partial u^i \right| \neq 0$. Тогда из определения локального

базиса следует $\bar{r}_{i'} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{i'}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^{j}} \frac{\partial u^{j}}{\partial u^{i'}} = \bar{r}_j \frac{\partial u^{j}}{\partial u^{i'}}$. Эти формулы дают закон преобразования локального базиса при переходе от одной криволинейной системы координат к другой.

Векторные и тензорные поля в евклидовом пространстве.

Определение. Говорят, что в V^n задано тензорное поле, q раз контравариантное и p раз ковариантное, если в каждой системе криволинейных координат и для каждой точки задана система n^{p+q} величин $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$, причём эта система величин в каждой точке при любом преобразовании криволинейных координат преобразуется по закону

$$T_{i_1' \dots i_p'}^{j_1' \dots j_q'}(u^{1'}, \dots, u^{n'}) = \frac{\partial u^{j_1'}}{\partial u^{j_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial u^{j_q'}}{\partial u^{j_q}} \cdot \frac{\partial u^{i_1}}{\partial u^{i_1'}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial u^{i_p}}{\partial u^{i_p'}} \cdot T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}(u^1, \dots, u^n).$$

Примеры тензорных полей.

1)Обозначим $g_{ij} = g_{ij}(u^1, \dots, u^n) = (\bar{r}_i, \bar{r}_j)$. Этот набор чисел является дважды ковариантным полем метрического тензора.

2)Обозначим через $g^{ij}(u^1, \dots, u^n)$ элементы обратной матрицы к матрице $G = (g_{ij})$. Тогда числа g^{ij} образуют дважды контравариантное тензорное поле.

Задачи

Найти компоненты метрического тензора и координатные поверхности в следующих координатных системах:

1.Цилиндрические координаты:

$\bar{r} = \{\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z\}$, $0 < \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

2.Сферические координаты:

$\bar{r} = \{r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta\}$,

$0 < r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta < \pi$.

3.Координаты параболического цилиндра:

$\bar{r} = (u^2 - v^2)e_1 + 2uve_2 + ze_3$,

$-\infty < u < \infty$, $0 \le v < \infty$, $-\infty < z < \infty$.

4.Биполярные цилиндрические координаты:

$$\bar{r} = \frac{sh\rho}{ch\rho + \cos\varphi}e_1 + \frac{\sin\varphi}{ch\rho + \cos\varphi}e_2 + ze_3,$$

$0 < \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

5.Тороидальные координаты:

$$\bar{r} = \frac{sh\rho}{ch\rho + \cos\theta}(\cos\varphi\ e_1 + \sin\varphi\ e_2) + \frac{\sin\theta}{ch\rho + \cos\theta}e_3,$$

$0 < \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta < 2\pi$.

6.Пусть векторное поле X задано в прямоугольной системе координат (x, y, z) равенством $X = -ye_1 + xe_2 + ce_3$, где c – некоторая константа. Найти разложение X: a) в локальном базисе $\bar{r}_\rho, \bar{r}_\varphi, \bar{r}_z$ цилиндрической системы координат; b) в локальном базисе $\bar{r}_r, \bar{r}_\varphi, \bar{r}_\theta$ сферической системы координат.

Семинар 14. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ И ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Если в области $G \subset E^n$ задано векторное поле $X = X^i(x^1, ..., x^n)e_i$ и в некоторой точке $x = (x^1, ..., x^n)$ задан вектор $Z = Z^i e_i$, то производная $\nabla_Z X$ векторного поля X в направлении вектора Z вычисляется по формуле

$$\nabla_Z X = \lim_{t \to 0} \frac{X(x + tZ) - X(x)}{t} = \frac{\partial X^i}{\partial x^k} Z^k e_i.$$

Пусть в области G задана криволинейная система координат $(u^1, ..., u^n)$. Производная векторного поля $X = \lambda^i(u^1, ..., u^n)\bar{r}_i(u^1, ..., u^n)$ в направлении векторного поля $Z = \mu^i \bar{r}_i(u^1, ..., u^n)$ вычисляется по формуле

$$\nabla_Z X = \left(\frac{\partial \lambda^j}{\partial u^i} + \Gamma^j_{ki} \lambda^k \right) \mu^i \bar{r}_j ,$$

где Γ^j_{ki} – символы Кристоффеля II рода. Они определяются из разложения $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial u^i} = \Gamma^j_{ki} \bar{r}_j$ и связаны с символами Кристоффеля I рода $\Gamma_{ik,l}$ формулами $\Gamma^j_{ik} = \Gamma_{ik,l} g^{lj}$, $\Gamma_{ik,j} = \Gamma^l_{ik} g_{lj}$. Символы Кристоффеля I рода выражаются через производные компонент метрического тензора: $\Gamma_{kj,i} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right]$. Символы Кристоффеля обладают симметрией по некоторым индексам $\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$, $\Gamma_{ik,l} = \Gamma_{ki,l}$ и не являются тензорами. Выражение $\frac{\partial \lambda^j}{\partial u^i} + \Gamma^j_{ki} \lambda^k = \lambda^j_{,i}$ называется ковариантной производной векторного поля $X = \lambda^j(u^1, ..., u^n) \bar{r}_j(u^1, ..., u^n)$ и является тензорным полем типа (1, 1). Аналогично выражение $\frac{\partial \nu_j}{\partial u^i} - \Gamma^k_{ji} \nu_k = \nu_{j,i}$ называется ковариантной производной ковекторного поля $\nu = \nu_j(u^1, ..., u^n) \bar{r}^j(u^1, ..., u^n)$ и является тензорным полем типа (2, 0). Для тензорного поля типа (1, 1) ковариантная производная вычисляется по формуле

$$\left(T^i_j\right)_{,k} = T^i_{j,k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial u^k} + \Gamma^i_{kr} T^r_j - \Gamma^r_{kj} T^i_r .$$

Для тензорного поля $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ типа (p, q) ковариантная производная вычисляется по формуле

$$T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p, k} = \frac{\partial T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}}{\partial u^k} + \sum_{r=1}^{q} \Gamma^{j_r}_{k\alpha_r} T^{j_1 \dots \alpha_r \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} - \sum_{r=1}^{p} \Gamma^{\alpha_r}_{ki_r} T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots \alpha_r \dots i_p} ,$$

где индекс α_r стоит на r-м месте и по нему производится суммирование.

Задачи

1.Найти выражение для символов Кристоффеля в сферической системе координат.

2.Найти выражение для символов Кристоффеля в цилиндрической системе координат.

3.Доказать, что $g^{kl} g^{ij}{}_{,l} = 0$.

4.Доказать, что символы Кристоффеля не являются тензорами.

Семинар 15. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Определение. Пусть $f : G \to R$ – дифференцируемая функция, определенная в некоторой области $G \subset E^n$ и $(u^1, ..., u^n)$ – произвольная криволинейная система координат в G. Тогда набор функций $\left(\frac{\partial f}{\partial u^1}, ..., \frac{\partial f}{\partial u^n} \right)$ определяет в области G компоненты ковекторного поля, которое называется градиентом функции f и обозначается через

$$grad\ f(u^1, ..., u^n) = \frac{\partial f}{\partial u^j}(u^1, ..., u^n)\bar{r}^j(u^1, ..., u^n) = \frac{\partial f}{\partial u^j} g^{ij} \bar{r}_i .$$

Определение. Дивергенцией векторного поля $V = V^i(u^1, ..., u^n)\bar{r}_i(u^1, ..., u^n)$, заданного в области G, называется скалярное поле, определенное формулой

$$div\ V = V^i_{,i} = \frac{\partial V^i}{\partial u^i} + \Gamma^{\ i}_{ik} V^k .$$

Определение. Дивергенцией ковекторного поля $\mu = \mu_k(u^1, ..., u^n)\bar{r}^k(u^1, ..., u^n)$, заданного в области G, называется скалярное поле, определенное формулой

$$div\ \mu = g^{ik}\mu_{i,k} = g^{ik}\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial u^k} - \Gamma^{\ j}_{ik}\mu_j \right) = \frac{\partial g^{ik}\mu_i}{\partial u^k} + \Gamma^{\ i}_{ik} g^{kj}\mu_j .$$

Определение. Лапласианом дважды дифференцируемой функции f называют функцию Δf, определенную формулой

$$\Delta f = div(grad\ f) = g^{ik}\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^k} - g^{ik}\Gamma_{ik}^{\ j}\frac{\partial f}{\partial u^j}.$$

Определение. Ротором ковекторного поля $\mu = \mu_k(u^1,...,u^n)\bar{r}^k(u^1,...,u^n)$ называют кососимметрическое дважды ковариантное тензорное поле T, определенное формулой $T_{ij} = \frac{\partial \mu_i}{\partial u^j} - \frac{\partial \mu_j}{\partial u^i}$, которое обозначается $rot\mu$.

Если $n = 3$, то тензорному полю T_{ij} сопоставляют векторное поле $\eta^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}T_{23}$, $\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}T_{31}$, $\eta^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}T_{12}$, где $g = \det(g_{ij})$, и пишут $\eta = rot\mu$. Эти формулы эквивалентны формуле

$$rot\mu = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \bar{r}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}.$$

Введем единичный локальный базис $\hat{e}_i = \bar{r}_i / \sqrt{g_{ii}}$. Физическими компонентами вектора (тензора) μ называются компоненты, определяемые уравнением $\mu = \hat{\mu}^i \hat{e}_i$. В этих терминах предыдущая формула в криволинейной ортогональной системе координат имеет вид

$$rot\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\begin{vmatrix} \sqrt{g_{11}}\hat{e}_1 & \sqrt{g_{22}}\hat{e}_2 & \sqrt{g_{33}}\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ \sqrt{g_{11}}\hat{\mu}^1 & \sqrt{g_{22}}\hat{\mu}^2 & \sqrt{g_{33}}\hat{\mu}^3 \end{vmatrix}.$$

Задачи

1.Задано векторное поле $T = grad(1/r)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ в трехмерном пространстве за исключением начала координат. Найти компоненты этого поля в следующих системах координат: а) полярной, б) цилиндрической, в) сферической.

2.Для ковекторного поля $T = grad(1/r)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ найти $divT$ в следующих системах координат: а) полярной, б) цилиндрической, в) сферической.

3.Для произвольного ковекторного поля найти выражение дивергенции в следующих системах координат: а) полярной, б) цилиндрической, в) сферической.

4.Для ковекторного поля $T = grad(1/r)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ найти $rotT$ в следующих системах координат: а) полярной, б) цилиндрической, в) сферической.

5.Для произвольной функции найти лапласиан в следующих системах координат: а) полярной, б) цилиндрической, в) сферической.

6.Доказать, что если T_{ij} – ротор ковариантного векторного поля, то $T_{ij,k} + T_{jk,i} + T_{ki,j} = 0$.

7.В метрике $g_{11} = g_{22} = (u^1)^2 + (u^2)^2$, $g_{33} = 1$, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$ вычислить ротор ковекторного поля $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \sin u^2$, $\mu_3 = u^1$.

Оглавление

Семинар 1. Кривые: уравнения, касательная, длина……..3
Семинар 2. Кривизна и кручение…….6
Семинар 3. Уравнения поверхности. Первая
квадратичная форма поверхности ……...8
Семинар 4. Вторая квадратичная форма поверхности…….12
Семинар 5. Геодезические кривые…….14
Семинар 6. Геометрия евклидовых и эрмитовых
пространств……..……15
Семинар 7. Самосопряжённый оператор……..……20
Семинар 8. Ортогональный оператор……23
Семинар 9. Приведение пары форм
к диагональному виду …….27
Семинар 10. Сопряжённое пространство…..……28
Семинар 11–12. Тензоры и операции над ними..……31
Семинар 13. Криволинейные координаты
в евклидовом пространстве……..…….35
Семинар 14. Дифференцирование векторных
и тензорных полей в криволинейных координатах..38
Семинар 15. Основные дифференциальные
операторы в криволинейных координатах..……40

Учебное издание
Александрова Надежда Ивановна

СЕМИНАРЫ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Подписано в печать 09.01.08. Формат $60 \times 84\,{}^{1}\!/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5.1. Уч.-изд. л. 5,5. Тираж 150 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.