Распознавание аффинно-эквивалентных многогранников по их натуральным развёрткам

Виктор Алексеевич Александров

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
& Новосибирский гос. университет

Семинар “Дискретная геометрия и геометрия чисел”
15 февраля 2022

Краткое содержание доклада:

Классическая теорема Коши об однозначной определённости выпуклых многогранников гласит, что *если два выпуклых многогранника имеют изометричные развёртки, то они конгруэнтны*. Другими словами, мы можем судить о том изометричны многогранники или нет, используя только их развёртки.

В докладе рассказывается об аналогичном вопросе: можно ли, используя только натуральные развёртки двух выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^3$, понять, что эти многогранники являются (или не являются) аффинно-эквивалентными.

Доклад основан на препринте автора “Recognition of affine-equivalent polyhedra by their natural developments,” `arXiv:2106.13659 [math.MG]`.

План доклада:

§ 1. Введение: постановка проблемы и уточнение терминологии

§ 2. Решение проблемы для простых многогранников

§ 3. Исследование проблемы для подвесок

§ 4. Исследование проблемы для произвольных многогранников

§ 5. Заключительные замечания

§ 1. Введение: постановка проблемы и уточнение терминологии

Основные определения

Выпуклый многоугольник = выпуклая оболочка конечного числа точек в $\mathbb{R}^2$, не лежащих на одной прямой

Многогранник = конечный набор выпуклых многоугольников в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющий следующим условиям:

(1) каждая сторона любого из этих многоугольников есть одновременно сторона не более, чем одного другого многоугольника, называемого смежным с первым;

(2) никакие два смежных многоугольника не принадлежат одной плоскости;

(3) от всякого многоугольника этого набора можно дойти до любого другого из них, переходя через рёбра (то есть от смежного к смежному)

Понятие натуральной развёртки многогранника интуитивно очевидно всякому, кто хоть раз склеил многогранник из набора его граней, вырезанных, например, из картона. Более формально:

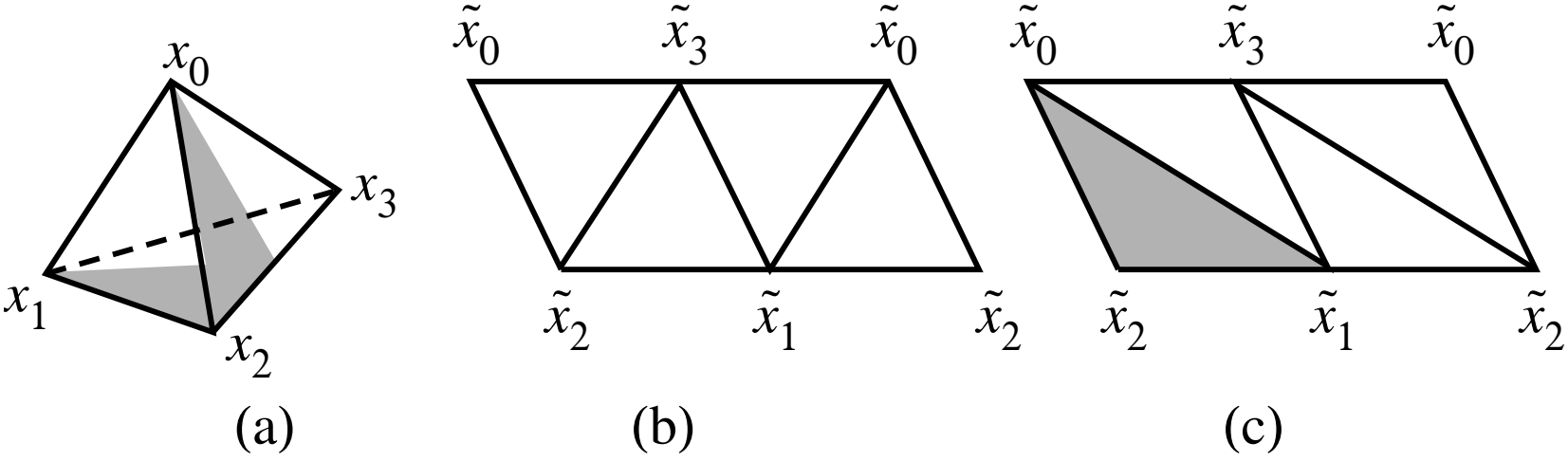
Натуральная развёртка многогранника P = множество R, выпуклых многоугольников в $\mathbb{R}^2$, снабжённое «правилами склейки» так что:
(a) R находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством граней P;
(b) каждый многоугольник из R конгруэнтен соответствующей грани P;
(c) вершины многоугольников из R отождествлены (иногда говорят «склеены друг с другом») если и только если они соответствуют одной и той же вершине P;
(d) стороны многоугольников из R отождествлены («склеены»), если и только если они соответствуют одному и тому же ребру P.

Предостережение: В этом докладе используется только понятие натуральной развёртки и совсем не используется понятие абстрактной развёртки!

Абстрактная развёртка многогранника P = метрическое пространство, изометричное многограннику P, снабжённому внутренней метрикой.

Абстрактную развёртку можно мыслить себе как конечный набор выпуклых многоугольников в $\mathbb{R}^2$ вместе с правилом отождествления рёбер, но (в отличие от натуральной развёртки) многоугольники абстрактной развёртки могут и не соответствовать граням многогранника P.

Пример: абстрактная развёртка может не быть натуральной



(a) = правильный тетраэдр;
(b) = натуральная развёртка правильного тетраэдра (a);
(c) = абстрактная развёртка правильного тетраэдра (a), не являющаяся его натуральной развёрткой.

Теорема (О.Л. Коши об однозначной определённости выпуклого многогранника)

Пусть P и P' — комбинаторно эквивалентные выпуклые замкнутые многогранники в $\mathbb{R}^3$. Если натуральные развёртки многогранников P и P' изометричны, то P и P' конгруэнтны.

Теорема (А.Д. Александрова о единственности выпуклого многогранника с данной развёрткой)

Пусть P и P' — выпуклые замкнутые многогранники в $\mathbb{R}^3$, а R и R' — любые их абстрактные развёртки. Если развёртки R и R' изометричны, то многогранники P и P' конгруэнтны.

Другими словами, теорема А.Д. Александрова показывает, что в теореме О.Л. Коши нет необходимости проверять, что развёртки многогранников P и P' являются натуральными.

Теорема единственности А.Д. Александрова интересна не только сама по себе. Она играет существенную роль при доказательстве следующей теоремы, также доказанной А.Д. Александровым:

Теорема (А.Д. Александрова о существовании выпуклого многогранника с данной развёрткой)

Пусть абстрактная развёртка R такова, что:
(i) R гомеоморна сфере,
(ii) кривизна R в каждой вершине $\geqslant 0$ (т. е. сумма углов многоугольников, сходящихся в любой вершине $\leqslant 2\pi$),
(iii) полная кривизна R равна 4π.
Тогда в $\mathbb{R}^3$ существует замкнутый выпуклый многогранник, для которого R является абстрактной развёрткой.

Замечание: если в теореме существования А.Д. Александрова заменить термин «абстрактная развёртка» термином «натуральная развёртка», то получим неверное утверждение.

Уточненная постановка нашей проблемы:

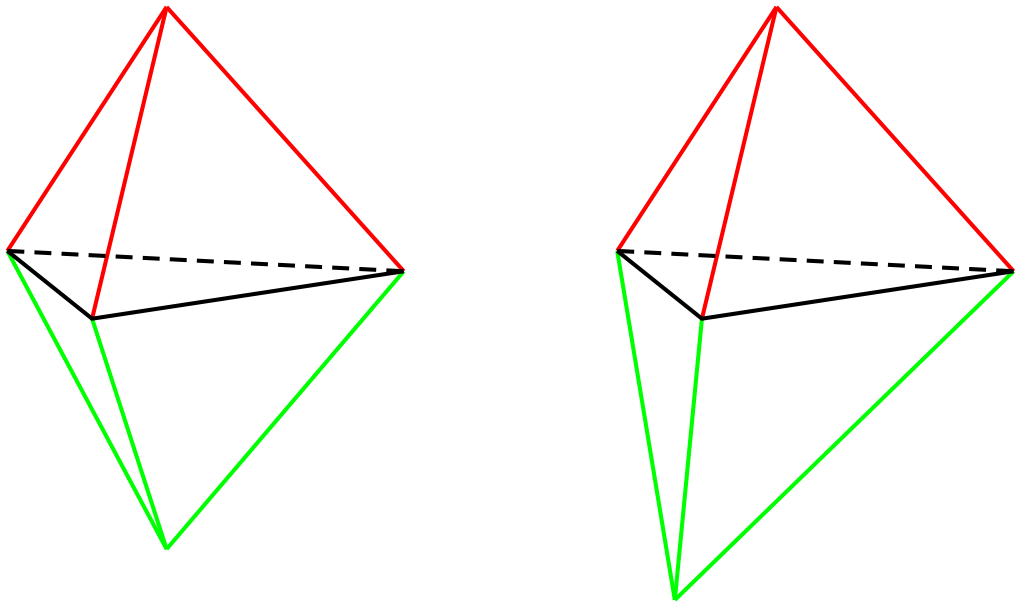
- нам даны два комбинаторно эквивалентных выпуклых многогранника P и P' в $\mathbb{R}^3$;
- мы строим натуральные развёртки многогранников P и P';
- используя только эти натуральные развёртки мы хотим ответить на вопрос являются или нет многогранники P и P' аффинно эквивалентными.

Очевидно, что если P и P' аффинно эквивалентны, то соответствующие грани их натуральных развёрток тоже аффинно эквивалентны.

Это очевидное необходимое условие для аффинной эквивалентности многогранников.

Но оно не является достаточным.

Пример: среди треугольных бипирамид есть аффинно не эквивалентные



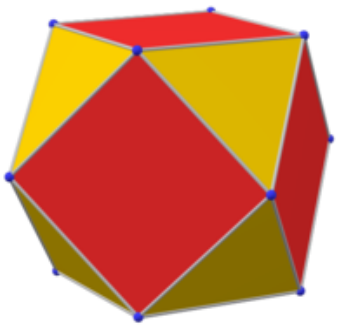
§ 2. Решение проблемы для простых многогранников

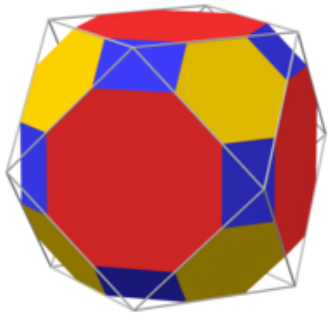
Определение: Строго выпуклый многогранник называется простым, если любая его вершина инцидентна в точности трем его ребрам (или, что то же самое, имеет валентность 3).

Примеры простых многогранников:

- тетраэдр,
- куб,
- додекаэдр,
- любая строго выпуклая n-угольная призма при $n \geqslant 3$.

Конструирование новых простых многогранников:





Теорема 1 (почти очевидная)

Пусть P и P' являются простыми многогранниками в $\mathbb{R}^3$, комбинаторно эквивалентными друг другу.
Если соответствующие грани натуральных развёрток многогранников P и P' аффинно-эквивалентны, то сами многогранники P и P' аффинно-эквивалентны.

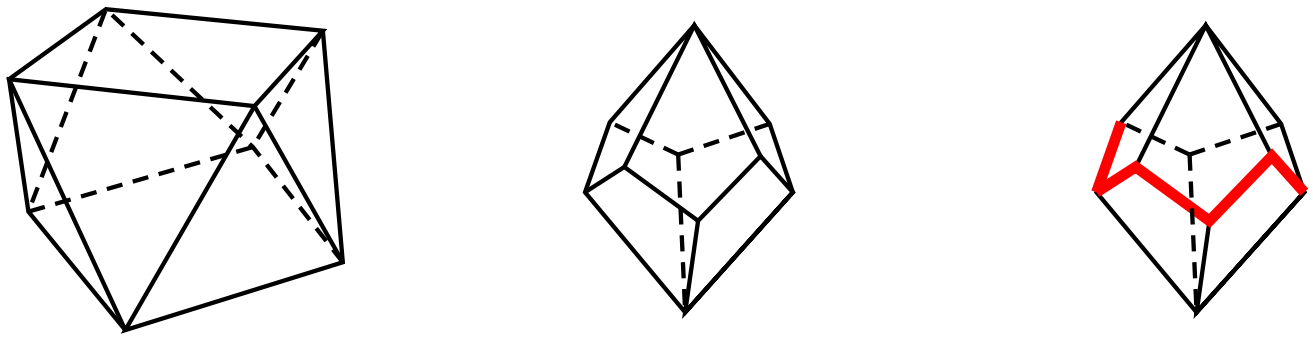
Теорема 1 показывает, что для простых многогранников аффинная эквивалентность граней уже влечёт аффинную эквивалентность многогранников.

Теорема 1 может быть обобщена в нескольких направлениях, например, она справедлива даже если некоторые вершины имеют валентность $\geqslant 4$.

В этом направлении верна следующая теорема:

Теорема 2

Пусть строго выпуклые замкнутые многогранники P и P' в $\mathbb{R}^3$ имеют одинаковое комбинаторное строение, причём их соответствующие грани аффинно-эквивалентны.
И пусть на P имеется связный рёберный путь γ такой, что
(i) в каждой вершине пути γ сходится ровно три ребра P и
(ii) для любой грани многогранника P существует инцидентная этой грани вершина пути γ.
Тогда многогранники P и P' аффинно-эквивалентны.



(a) (b) (c)

Теорема 1 позволяет доказать и такое утверждение:

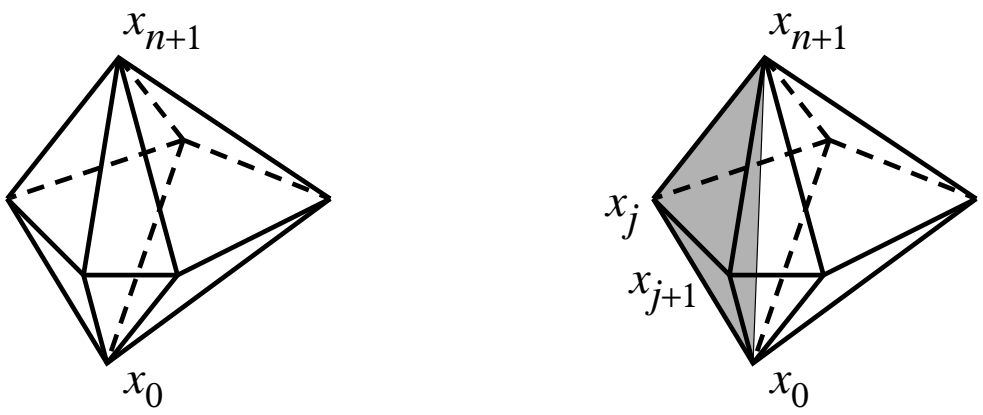
Теорема 3

Пусть $n \geqslant 4$ и M_n — множество всех строго выпуклых замкнутых многогранников с n гранями в $\mathbb{R}^3$, снабжённое метрикой Хаусдорфа.
Существует открытое плотное подмножество $\Omega_n \subset M_n$, такое что для любых многогранников $P, P' \in \Omega_n$ следующие два утверждения эквивалентны:
(i) P и P' комбинаторно эквивалентны друг другу, причём каждые две соответствующие грани аффинно-эквивалентны;
(ii) P и P' аффинно-эквивалентны.

§ 3. Исследование проблемы для подвесок

Теперь изложим совсем иную идею, чем та, что была использована в доказательстве теоремы 1. Начнём с подвесок.

Подвеской называется многогранник, комбинаторно эквивалентный правильной n-угольной бипирамиде при $n \geqslant 3$.



(a) (b)

(a) $= x_0$ и x_{n+1} это южный и северный полюсы подвески P
(b) $= x_j$ это точки на экваторе; серый цвет объясним позже.

Причины, по которым интересны подвески:

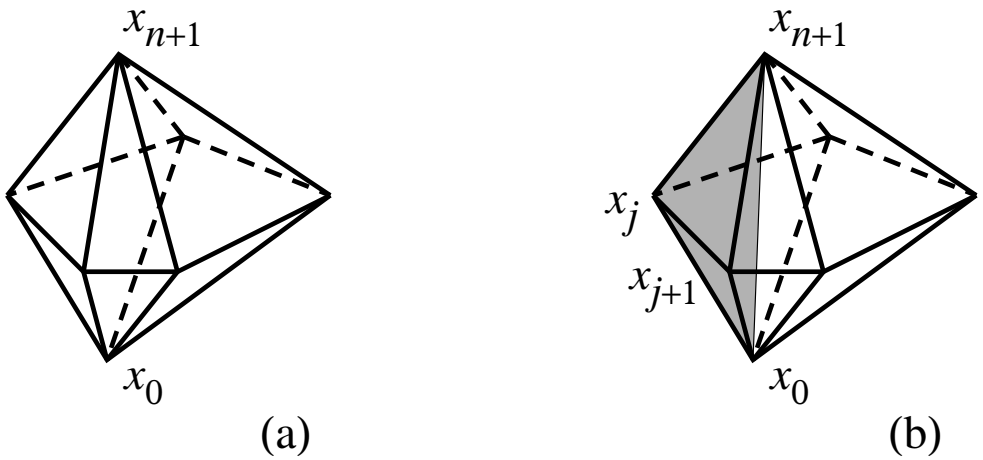
(i) октаэдр является подвеской, но не является простым многогранником;

(ii) наш основной вопрос мотивирован теоремой Коши, а в её истории октаэдр сыграл важную роль:

• A.-M. Legendre. Eléments de géométrie. Paris, 1794. Note XII (pp. 321–334)

• A. L. Cauchy. Sur les polygones et polyèdres. Second Mémoire. J. École Polytéchnique, **9**:87–98, 1813

• И. Х. Сабитов. Алгебраические методы решения многогранников. Успехи мат. наук, **66**(3):3–66, 2011



(a) $=$ x_0 и x_{n+1} это южный и северный полюсы подвески P;
(b) $=$ тетраэдр T_j с вершинами $x_0, x_j, x_{j+1}, x_{n+1}$.

Отрезок x_0x_{n+1} является ребром T_j, но не является ребром P. Другими словами, x_0x_{n+1} является единственным ребром T_j, которое не может быть непосредственно найдено из натуральной развёртки подвески P. Его длину мы будем называть «свободным параметром» и обозначать через t.

Выразим объём T_j через длины его ребер.

Пусть $D_{j,k}$ обозначает квадрат длины отрезка $x_j x_k$, если этот отрезок является ребром как P, так и T_j.

Положим по определению

$$q_j(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & D_{0,j} & D_{0,j+1} & t^2 \\ 1 & D_{j,0} & 0 & D_{j,j+1} & D_{j,n+1} \\ 1 & D_{j+1,0} & D_{j+1,j} & 0 & D_{j+1,n+1} \\ 1 & t^2 & D_{n+1,j} & D_{n+1,j+1} & 0 \end{vmatrix}.$$

$$q_j(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & D_{0,j} & D_{0,j+1} & t^2 \\ 1 & D_{j,0} & 0 & D_{j,j+1} & D_{j,n+1} \\ 1 & D_{j+1,0} & D_{j+1,j} & 0 & D_{j+1,n+1} \\ 1 & t^2 & D_{n+1,j} & D_{n+1,j+1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что

(i) $q_j(t)$ является определителем Кэли–Менгера тетраэдра T_j;

(ii) $q_j(t) = 288(\mathrm{vol}\, T_j)^2$;

(iii) $q_j(t)$ является би-квадратным многочленом от «свободного параметра» t, причём коэффициенты этого многочлена явно строятся по натуральной развёртке.

Если P' — ещё одна подвеска, комбинаторно эквивалентная P, то мы определяем «свободный параметр» t', тетраэдры T'_j и многочлены $q'_j(t')$ также, как выше были определены t, T_j и $q_j(t)$ для P.

Ключевое соображение: если $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ является аффинным преобразованием, таким, что $P' = A(P)$ (точнее, таким, что $x'_j = A(x_j)$ для всех $j = 1, \ldots, n$), то

$$\big(\det A\big)^2 = \frac{(\mathrm{vol}\ T'_j)^2}{(\mathrm{vol}\ T_j)^2} = \frac{q'_j(|x'_0 - x'_{n+1}|)}{q_j(|x_0 - x_{n+1}|)}$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2

Пусть P и P' — подвески в $\mathbb{R}^3$ с одинаковым числом вершин $n \geqslant 3$ на экваторе.
И пусть система $n \geqslant 3$ алгебраических уравнений

$$q'_j(t') = \delta q_j(t), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

относительно трёх неизвестных δ, t, и t' не имеет положительного решения (т. е., такого решения, что $\delta > 0$, $t > 0$, и $t' > 0$). Тогда P и P' не являются аффинно-эквивалентными.

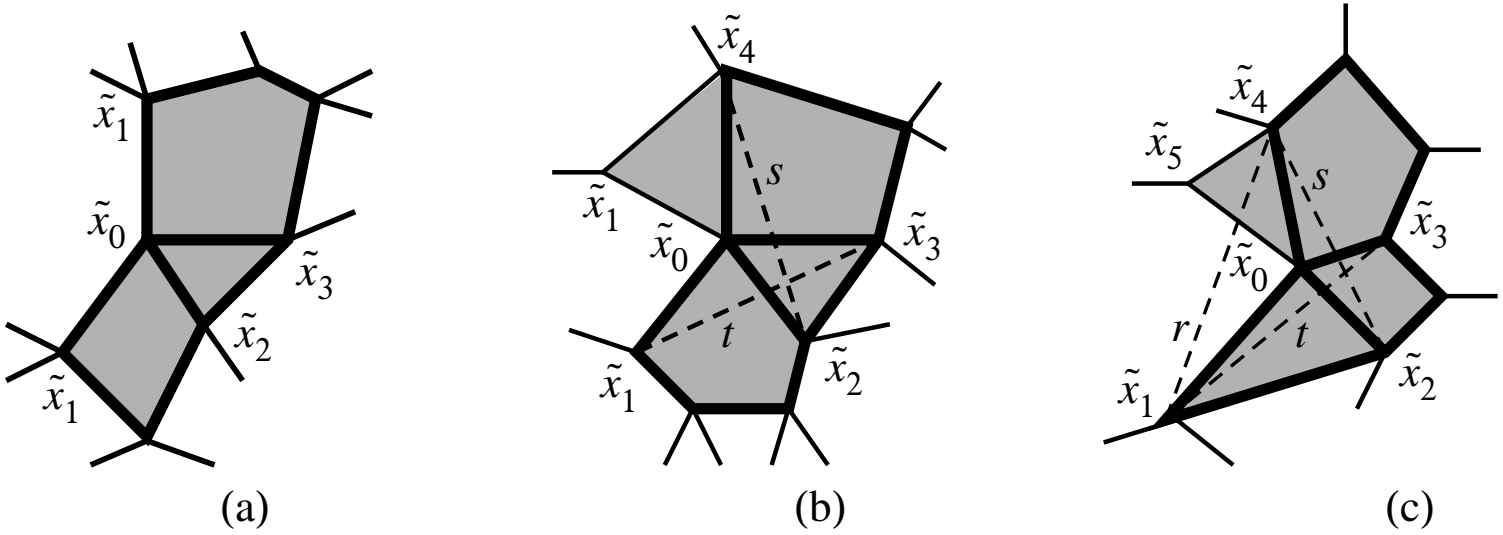
Доказательство: Если P и P' являются аффинно-эквивалентными, то $\delta = (\det A)^2$, $t = |x_0 - x_{n+1}|$, $t' = |x'_0 - x'_{n+1}|$ является положительным решением. $\square$

§ 4. Исследование проблемы для произвольных многогранников

Схематичное объяснение того, почему сказанное в § 3 для подвесок, годится также для любых многогранников

Определение: Совокупность Z трёх граней натуральной развёртки R называется *заплаткой* на R, инцидентной вершине $\widetilde{x}_0 \in R$, если

- каждая из граней, составляющих Z, инцидентна $\widetilde{x}_0$; и
- Z связна, т. е., от всякой грани заплатки Z можно перейти к другой, переходя через рёбра Z.

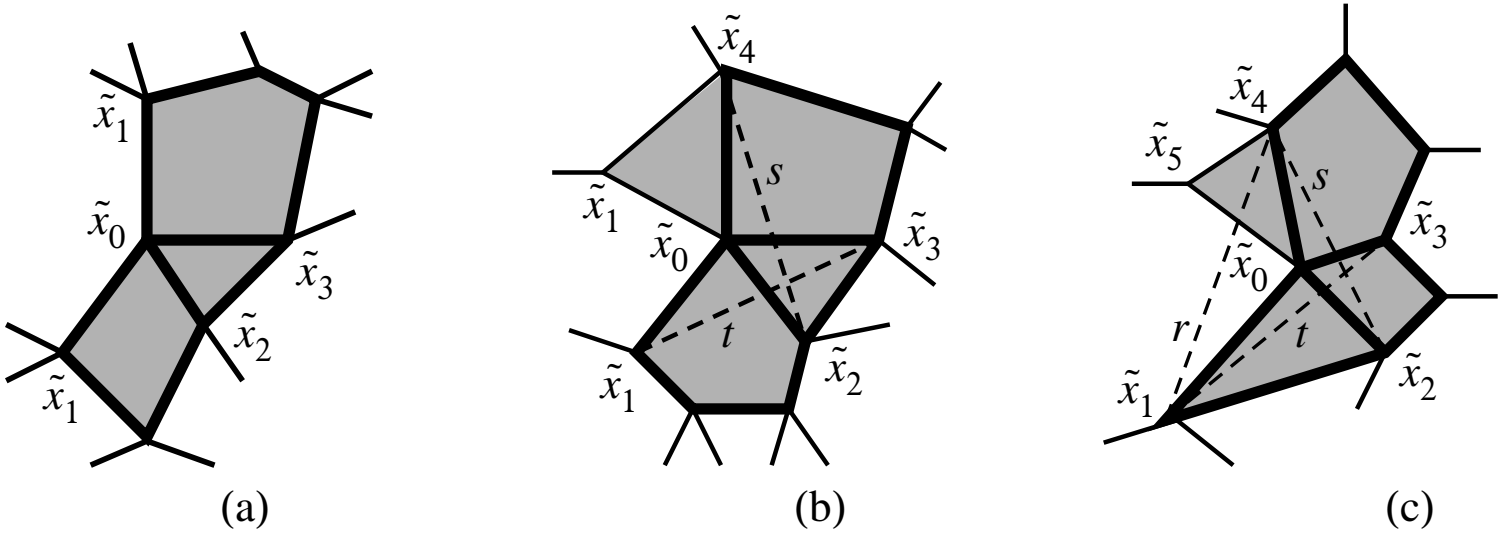


Пусть $P, P' \subset \mathbb{R}^3$ — выпуклые комбинаторно эквивалентные многогранники и пусть R, R' — их натуральные развёртки.

Алгоритм // Шаг I: Перебираем все 3-валентные вершины $\widetilde{x}_0$ развёртки R. Как в § 3, используя определитель Кэли–Менгера вычисляем квадрат объёма $\mathrm{vol}_3^2(T)$ тетраэдра T с вершинами $x_0, \ldots, x_3$ и квадрат объёма $\mathrm{vol}_3^2(T')$ тетраэдра T' с вершинами $x'_0, \ldots, x'_3$.

Если дробь $\mathrm{vol}_3^2(T')/\mathrm{vol}_3^2(T)$ принимает не одно и тоже значение на множестве 3-валентных вершин, то P и P' не являются аффинно-эквивалентными и алгоритм заканчивает работу.

В противном случае общее значение дробей $\mathrm{vol}_3^2(T')/\mathrm{vol}_3^2(T)$ обозначаем через δ_3 и переходим к Шагу II.



Алгоритм // Шаг II: Перебираем все 4-валентные вершины $\widetilde{x}_0 \in R$ и все четыре заплатки $Z \subset R$, инцидентные каждому $\widetilde{x}_0$.

Для каждой заплатки Z обозначим через T_0 4-мерный тетраэдр с вершинами $x_0, \ldots, x_4$. $T_0 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ для его 4-мерного объёма имеем

$$\mathrm{vol}_4^2\,(T_0)(s,t) = 0. \tag{1}$$

Определитель Кэли–Менгера $\Rightarrow$ в левой части (1) стоит многочлен степени $\leqslant 2$ по каждой из переменных s^2, t^2.

Для каждой заплатки Z и каждого $j = 1, \ldots, 4$ обозначим через T_j 3-мерный тетраэдр с вершинами $\left(\cup_{k=0}^{4}\{x_k\}\right) \setminus \{x_j\}$. Определитель Кэли–Менгера $\Rightarrow \mathrm{vol}_3^2\,(T_j)(s,t)$ является многочленом степени $\leqslant 2$ по каждой из переменных s^2, t^2.

Аналогично, обозначим:

- T_0' — 4-мерный тетраэдр с вершинами $x_0', \ldots, x_4'$;
- T_j' — 3-мерный тетраэдр с вершинами $\left(\cup_{k=0}^{4}\{x_k'\}\right) \setminus \{x_j'\}$ заплатки Z' $(j = 1, \ldots, 4)$.

Тогда

$$\mathrm{vol}_4^2\,(T_0')(s', t') = 0, \tag{2}$$

где в левой части (2) стоит многочлен степени $\leqslant 2$ по каждой из переменных $(s')^2, (t')^2$.

Наконец, если многогранники P, P' (а значит, и заплатки Z, Z') аффинно-эквивалентны, то для каждого $j = 1, \ldots, 4$ выполняется соотношение

$$\mathrm{vol}_3^2\,(T_j')(s', t') = \delta \cdot \mathrm{vol}_3^2\,(T_j)(s, t), \tag{3}$$

где $\delta = (\det A)^2$, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $P' = A(P)$.

Следовательно, если переопределённая система (1)–(3) из шести алгебраических уравнений относительно пяти «свободных параметров» s, t, s', t', δ не имеет положительного решения, то P и P' не являются аффинно-эквивалентными.

Отметим, что если P имеет хоть одну 3-валентную вершину, то система (1)–(3) становится «ещё более переопределённой», ведь она содержит шесть алгебраических уравнений относительно четырёх «свободных параметров» s, t, s', t' (поскольку δ обязано быть равным δ_3).

Алгоритм // Шаг III: Перебираем все целые $n \geqslant 4$, все n-валентные вершины $\widetilde{x}_0 \in R$ и все заплатки $Z \subset R$, инцидентные $\widetilde{x}_0$.

Так же, как на Шаге II, убеждаемся, что для каждого $\widetilde{x}_0$ набор заплаток, инцидентных $\widetilde{x}_0$, порождает переопределённую систему алгебраических уравнений относительно семи «свободных параметров» $s, t, r, s', t', r', \delta$.

Если эта переопределённая система не имеет положительного решения, то P и P' не являются аффинно-эквивалентными.

§ 5. Заключительные замечания

(i) Мы решили только «половину» проблемы, т. е. мы можем гарантировать, что некоторые многогранники P, P' не являются аффинно-эквивалентными;

(ii) наше решение является алгоритмическим, т. е. апеллирует к каким-то вычислениям с привлечением данных, непосредственно получаемых из развёрток R, R';

(iii) наше решение «локально», т. е. на самом деле мы проверяем, что звёзды соответствующих вершин P, P' не могут быть аффинно-эквивалентными;

(iv) в принципе наш метод может быть применён как к невыпуклым многогранникам, так и к многогранникам с границей;

(v) наш метод не применим к изучению вопроса о проективной эквивалентности P, P' (а это естественный вопрос);

(vi) мы находимся в начале пути и нужны новые идеи.

Спасибо за внимание!