Нахождение пересечений многогранных поверхностей

В.А. Александров
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
& Новосибирский государственный университет

Однодневная конференция по современному анализу, посвящённая памяти профессора А.П. Копылова –
14.04.2026 – Институт математики им. С.Л. Соболева

Результаты о пересечении многогранных поверхностей, упоминаемые в этом докладе, получены автором совместно с Евгением Павловичем Волокитиным.

2: Задача А.П. Копылова

Пусть $n \geqslant 2$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, ∂D – её граница.

Относительное расстояние $\rho_D(x, y)$ между точками $x, y \in \partial D$ – это точная нижняя граница длин кривых, соединяющих x и y и лежащих в D всеми своими внутренними точками.

Задача А.П. Копылова: Определяется ли область D относительным расстоянием $\rho_D(x, y)$?

Эту задачу изучали В.А. Александров (1984, 1985, 1987, 1989, 1990, 1992), А.В. Кузьминых (1985), М.К. Боровикова (1992), Д.А. Троценко (1993), А.П. Копылов (2008, 2017), М.В. Коробков (2008, 2010).

Ответ зависит от области.

3: Изометричные поверхности

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ – (гладкая) поверхность.

Внутреннее расстояние $\rho_S(x, y)$ между точками $x, y \in S$ – это точная нижняя граница длин кривых, соединяющих x и y и лежащих на S.

Классическая задача: Определяется ли поверхность S внутренним расстоянием $\rho_S(x, y)$?

Эту задачу знали Л. Эйлер и К. Гаусс и решали «все» геометры.

4: Изометричные поверхности (продол.)

Ответ на класическую задачу зависит от поверхности и класса гладкости:

- ДА для любой выпуклой поверхности, гомеоморфной сфере (А.В. Погорелов, Ленинская премия 1962 г.);

- НЕТ для стандартной сферы в классе C^1-гладких поверхностей (Дж. Нэш & Н. Кёйпер (1957); Ю.Ф. Борисов (2004) доказал, что пример Нэша–Кёйпера имеется в классе $C^{1,\alpha}$ при $0 < \alpha < 1/13$ и невозможен при $\alpha > 2/3$);

- НЕИЗВЕСТЕН для C^ω-поверхности, гомеоморфной сфере, если изометричная ей поверхность ищется в классе C^ω-поверхностей.

- НЕТ для многогранников (Р. Коннелли, 1977).

5: Изгибаемые многогранники

Многогранник это многогранная поверхность.

Многогранник называется изгибаемым, если его пространственная форма может быть непрерывным образом изменена за счёт изменения только двугранных углов.

О замкнутых ориентируемых изгибаемых многогранниках в $\mathbb{R}^3$ известно следующее:

• они существуют (Р. Брикар, 1897); причём существуют даже без самопересечений (Р. Коннелли, 1977);
• в процессе изгибания каждый из них сохраняет ограничиваемый им 3-мерный объём (И.Х. Сабитов, 1996), интегральную среднюю кривизну (Р. Александер, 1985) и все инварианты Дэна (А.А. Гайфуллин & Л.С. Игнащенко, 2018).

6: Вложенные изгибаемые многогран-ки

Многогранник называется вложенным, если у него нет самопересечений.

При доказательстве постоянства объёма и инвариантов Дэна важно допускать к рассмотрению невложенные многогранники.

Однако есть задачи, в которых требуется найти именно вложенный изгибаемый многогранник или удостовериться, что построенный изгибаемый многогранник является вложенным.

Приведём три примера таких задач.

7: Пример №1

Верно ли, что у всякого вложенного изгибаемого многогранника есть ребро, двугранный угол при котором остаётся постоянным?

Ответ: НЕТ.

В.А. Александров, Е.П. Волокитин, Вложенный многогранник, допускающий изгибание, при котором все его двугранные углы изменяются, Сибирский математический журнал, 65:6 (2024), 1076–1101.

8: Пример №2

Верно ли, что многогранник Штеффена вложен?

Ответ: ДА.

V. Alexandrov, E. Volokitin, Steffen's flexible polyhedron is embedded. A proof via symbolic computations, Journal for Geometry and Graphics, 29:1 (2025), 79–88.

9: Пример №3

Существует ли вложенный изгибаемый многогранник с 8 вершинами?

Ответ: ДА.

- M. Gallet, G. Grasegger, J. Legerský, J. Schicho, Pentagonal bipyramids lead to the smallest flexible embedded polyhedron, 2024. arXiv: 2410.13811.

- E. Atlason, Cutting along a symmetric quadrilateral to construct an embedded flexible dodecahedron, 2025. arXiv:2510.06897.

10: План дальнейшей работы с Е.П.

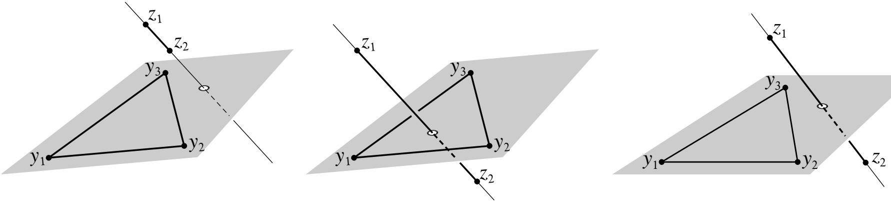
Усовершенствовать вышеупомянутые примеры вложенных изгибаемых многогранников с 8 вершинами, увеличив размах их допустимых движений.

Новизна нашего подхода в следующем:
• опимизировать конструкцию с помощью параметризации Коннелли изгибаемых бипирамид;
• вложенность сконструированного многогранника проверять на компьютере с помощью символьных вычислений.

11: Две основные идеи нашего подхода к доказательству вложенности мн-ка

Лемма: Многогранник не вложен $\Leftrightarrow$ существуют пересекающиеся грань и ребро.

Вычисления:



Спасибо за внимание!