(14) Топологические группы и их представления

1. Вполне приводимость компактных групп

__Опр 1__ Топологическая группа — это группа G, снабженная хаусдорфовой топологией так, что от-я $\mu: G\times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$ и
$i: G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$
непрерывны (в данной топологии).

Подробнее см. гл. 11 §2 (стр. 459–467) из [ВиН].

__Зам.__ Относительно дискретной топологии — всякая группа явл-ся топологической.

Предл 1 а) Если подгруппа H топол. группы G наделена индуцированной топологией, то H — тоже топол. группа

б) G, H — топол. группы $\Rightarrow G \times H$ — топол. группа

Упр Д-во предл 1.

Далее, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$,

Примеры $\langle \mathbb{K}, + \rangle$, $\langle \mathbb{K}^*, \cdot \rangle$,

$GL_n(\mathbb{K})$, $SL_n(\mathbb{K})$, $O_n = GO_n(\mathbb{R})$,

$U_n = GU_n(\mathbb{C})$.

Опр 2 Топ. гр. G компактна, если G — компактное топологическое пр-во.

Предл 2 Следующие группы G компактны

1) G — кон. группа,

2) $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$ — „ед. окр-сть в $\mathbb{R}^2$",

3) прямое пр-е комп. групп; в частности, n-мерный тор $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{T} \times \ldots \times \mathbb{T}}_{n \text{ раз}}$ — компактная гр.,

4) O_n

5) U_n.

Д-во: См. [ВИН, также]

Понятие центра тяжести выпукл. мн-ва в вещ. аффин. пр-ве и его св-ва см[ВЦН, также]

<u>Лемма 1</u> (о неподвижной точке) Пусть G — компактная группа вещ. аффинного пр-ва S и $M \subseteq S$ — непустое выпуклое мн-во, инвариантное отн-но G. Тогда группа G имеет в M неподвижную точку.

<u>Д-во:</u> Пусть $p \in M$ — произв. точка и M — выпуклая оболочка орбиты p^G точки p отн-но G. Тогда её центр тяжести — искомая неподвижная точка $\square$

Т. 1 (о полной приводимости). Пусть $\bar{V}$ — к.м. в.п. над $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и $G \le GL(\bar{V})$.

Тогда $\forall$ подпр-ва $\bar{U}$ пр-ва $\bar{V}$, инв. отн-но G, найдется G-инв. дополнительное подпр-во $\bar{W}$ (т.е. $\bar{V} = \bar{U} \oplus \bar{W}$).

Д-во: Повторяет док-во т-мы Машке о полной пр-сти кон. групп. Единственное замечание, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то мн-во S, состав. из проекторов на $\bar{U}$, следует рассматривать как вещ. аффин. пр-во $\blacksquare$

__Следствие__ Каждое вещ. или компл. лин. представление компактной топологической группы вполне приводимо.

__Пример__ Поскольку n-мерный тор $\mathbb{T}^n$ — абелева и компактная группа, всякое её (непрерывное) комплексное лин. пр-е есть сумма одномерных представлений, т.е. оно записывается диагональными матрицами.