2. Группы Ли и их касательные пр-ва

<u>Опр1</u> Группа Ли G — группа, снабженная структурой дифф. многообразия так, что отображения

$$\mu: G \times G \to G \quad (x, y) \mapsto xy$$

$$\tau: G \to G \quad x \mapsto x^{-1}$$

дифференцируемы (гладкие), т.е. коорд-ты произведения и обратного эл-та — дифф. (гладкие) ф-ции от коорд-т сомножителей и исходного эл-та.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ - поле.

См. подробнее в гл. 2 § 1 из [ВИН]

Примеры 1) $\langle \mathbb{R}^n, + \rangle$, $\langle \mathbb{C}^n, + \rangle$
n^2-мерное n^2-мерное.

2) $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{C}^*, \cdot \rangle$
$\quad \cong \quad\quad\quad\quad \cong$
$GL_1(\mathbb{R}) \quad\quad GL_1(\mathbb{C})$.

Опр 2 Линейная группа Ли — это любая подгруппа в $GL_n(\mathbb{K})$, явл. диф. многообразием в $M_n(\mathbb{K})$.

Предл 1 Следующие группы являются линейными группами Ли: 1) $GL_n(\mathbb{K})$ $\dim G = n^2$
2) $SL_n(\mathbb{K})$ $\dim G = n^2 - 1$

3) $O_n = GO_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = E\}$

$U_n = GU_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = E\}$

$\dim O_n = n\frac{(n-1)}{2}$; $\dim_{\mathbb{R}} U_n = n^2$.

Д-во: Если $C = AB$, то $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ — гладкие ф-е и $F = A^{-1}$, то $f_{ij} = A_{ji}\frac{1}{|A|}$ — тоже.

О размерностях 1) $GL_n(\mathbb{K})$ — дополнение в $M_n(\mathbb{K})$ замкн. мн-ва, задаваемого ур-ем $\det X = 0 \Rightarrow \dim G = n^2$.

2) $\det X = 1$ — одно ур-е и $\frac{\partial(\det X)}{\partial x_{11}}(E) = 1$.

Зам. Достаточно проверять только в 1, т.к. в ост. точках условие (1) и (2) вып-ся автоматически за счет сдвига на эл-т из G.

3) O_n задается соотн-ями $f_{ij}(X) = \sum_k x_{ik} x_{jk} = \delta_{ij}$ в кол-ве $m = \frac{n(n+1)}{2}$. Минор порядка m $\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_{rs}}\right)$, отв. переменным x_{rs}, ${}_{r \leq s}$ в точке E отличен от нуля, $\Rightarrow \dim G = n - m = \frac{n(n-1)}{2}$

U_n над $\mathbb{R}$ задается $m = n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$ соотн-ями и имеется ненулевой минор якобиевой м-цы того же порядка $\Rightarrow$ $\blacksquare$

<u>Упр. 1</u> Д-ть, что $B_n(\mathbb{K}) = \left\{ A \in GL_n(\mathbb{K}) \,\middle|\, \begin{matrix} A - \text{верхн.} \\ \text{треуг.} \end{matrix} \right\}$ — группа Ли размерности $\frac{n(n+1)}{2}$,

<u>Указ.</u>: $B_n(\mathbb{K}) \subseteq T_n(\mathbb{K})$ — пр-во верх. треуг. м-ц.

$\Gamma : (\alpha\ \beta) \to G \subseteq M_n(\mathbb{K})$ — кривая в группе G.

$\Gamma_t : t \to A_t = (a_{ij}(t))$ — в матричной форме.

$\Gamma_t' = \dfrac{d\Gamma_t}{dt} = (a_{ij}'(t))$ — касательный в-р в точке Γ_t,

Если $A_t = (a_{ik}(t))$ и $B_t = (b_{kj}(t))$ — две кривые в G, то их пр-е $C_t = A_t \cdot B_t$, определяется так:

$\circledast$ $C_t = (c_{ij}(t))$ и $c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) b_{kj}(t)$, $t \in (\alpha\beta)$.

<u>Т.1</u> Пусть $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ — группа Ли. Тогда

a) если $A_t, B_t : (\alpha, \beta) \to G$ — две диф (гладкие) кривые в G, то $C_t = A_t \cdot B_t$ — тоже диф (гладкая)

и $\frac{dC_t}{dt} = (A_t \cdot B_t)' = A_t' B_t + A_t B_t'$.

б) Пусть $T = T(G)$ – мн-во всех векторов A_0', касательных к кривым A_t в G (в окр. т. $t=0$), для которых $A_0 = E$. Тогда T – подпр-во в $M_n(\mathbb{C})$.

Док-во а) Продиф. $(*)$

б) Пусть $A_0', B_0' \in T$. Тогда $(AB)_0 = A_0 B_0 = E$,

из а) $\Rightarrow (AB)_0' = A_0' B_0 + A_0 B_0' = A_0' E + E B_0' = A_0' + B_0'$

$\Rightarrow T$ – аддит. группа.

Если $\lambda \in \mathbb{K}$ и $A_0' \in T$, то для кривой $B_t = A_{\lambda t}$ в окр. $t=0$ имеем $B_0 = A_0 = E$ и $B_0' = \lambda A_0'$, т.к. $B_0' \in T \Rightarrow \lambda A_0' \in T$.

Опр3 $T = T(G)$ — касательное пр-во к группе G в точке E.

Зам. Если $T_g(G)$ — мн-во, касат. в-ров в точке g, то $T_g(G) = T \cdot g$ (за счет сдвига на $g \in G$).

Примеры $G = GL_n(\mathbb{R})$

т.к. $\det E = 1$, то $\exists$ шар S_ε рад. $\varepsilon > 0$ с центром в E : $\det A \neq 0$ $\forall A$ из S_ε, т.е. $A \in G$.

$\forall B \in M_n(\mathbb{R})$ определим кривую $B_t = tB + E$

Тогда $B_0 = E$ и $B_0' = B$ и при малых t $B_t \in G \Rightarrow$

$T(G) = M_n(\mathbb{R})$. Аналогично $T(GL_n(\mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \dim T(G) = n^2$ имеет разм. $2n^2$ над $\mathbb{R}$.

$G = SL_n(\mathbb{R})$ выберем A из окр. E и такую, что $\det A = 1$. Возьмём произв. матрицу $B \in M_n(\mathbb{R})$; $\operatorname{tr} B = 0$ и определим кривую $B_t = \exp(tB)$.

Тогда $B_0 = E$ и $B_t' = B\exp(tB) \Rightarrow B_0' = B$ и $\det(B_t) = \exp(\operatorname{tr}(tB)) = 1 \Rightarrow T(G)$ — подпр-во разм. $n^2 - 1$ матриц с нулевым следом.

Г гл. строение, если $\Phi(x_{ij}) = \Phi$ — матр. ф-ция

$$d\Phi = \sum_{i,j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{ij}} dx_{ij}, \text{ то}$$

$$d(\Phi + \Psi) = d\Phi + d\Psi \quad \text{и} \quad d(\Phi\Psi) = (d\Phi)\Psi + \Phi(d\Psi)$$

$$\Rightarrow \forall g \in GL_n(\mathbb{R}) \ \det g = 1 \xrightarrow[\text{зна?}]{} d(\det g) = \operatorname{tr}(dg) = 0!$$

<u>Упр 2</u> Исп. ф-лу $d(\Phi\Psi) = (d\Phi)\Psi + \Phi(d\Psi)$,
д-те, что $d(\Phi^{-1}) = -\Phi^{-1}(d\Phi)\Phi^{-1}$.

<u>Упр 3</u> Докажите, что мн-во кососим. м-ц из $M_n(\mathbb{R})$ является касательным пространством для $G = O_n$ в точке E.

<u>Т 2</u> Группа Ли $G \leq GL_n(\mathbb{K})$ замкнута в $GL_n(\mathbb{K})$.

[См. д-во пред 1 из [ВИН, там же]].

Подмн-во топол. пр-ва **связно**, если его нельзя представить в виде объединения двух непересек., собств. замкн. подмн-в.

Отношение „лежать в одном связном подмн-ве“ — отношение эквивалентности. Классы этого отношения — **связные компоненты** топ. пр-ва.

Если M — диф. мн-е, то каждая его точка лежит в некот. связной компоненте.

Для группы Ли G связную комп., сод. единицу, обозн. G^0.

Т.3 G_0 — норм. подгруппа гр. Ли G и остальные связные компоненты — смежные классы по G_0.

Д-во: Умн-е на $g \in G$ – гомеоморфизм $\Rightarrow$ переставляет связные компоненты $\Rightarrow$ $G^0 g = g G^0$ (т.к. $g \in G^0 g \cap g G^0$). В частности, если $g \in G^0$, то $G^0 = g G^0 = G^0 g \Rightarrow G^0$ замкнута отн-но умножения.

Инверсия $i: g \mapsto g^{-1}$ тоже гомеоморфизм $\Rightarrow (G^0)^{-1}$ – связн. ком., но $e \in G^0 \Rightarrow e = e^{-1} \in (G_0^{-1})$ $\Rightarrow (G^0)^{-1} = G_0$. $\Rightarrow$ G_0 – подгруппа гр. G.

Нормальность G^0 вытекает из рав-ва $G_0 g = g G_0$ ~~∎~~

Предл 2 а) Группы $SL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, U_n, SO_n, SU_n связны.

б) группы $GL_n(\mathbb{R})$ и $O_n(\mathbb{R})$ имеют по две связные компоненты, причем $G^0 = GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ и $G^0 = SO_n(\mathbb{R})$ соотв.

Д-во: Упр 3 (см. также [ВИН])

Т. 4 Связная группа Ли порождается любой своей окрестностью единицы.

Д-во: см. [ВИН, там же].