⑤ Начала теории групп

1. Определения и примеры.

Опр-я группы, подгруппы, порядка группы и элемента группы, изоморфизма групп (см. ②).

<u>Примеры</u>: 0) $\mathbb{Z} \le \mathbb{Q} \le \mathbb{R} \le \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}^* \le \mathbb{R}^* \le \mathbb{C}^*$

1) Пусть X - произв. мн-во. Подмн-во $G \subseteq S(X)$ (симметрической группе подстановок мн-ва X) - группа подстановок (или <u>преобразований</u>) мн-ва X, если 1) $\varphi\psi \in G$ $\forall \varphi, \psi \in G$ 2) $\varphi^{-1} \in G$ $\forall \varphi \in G$ и 3) $\varepsilon \in G$, ε - тожд. пр-е (или $G \neq \varnothing$).

2) E^2 – евклидова плоскость.

$\operatorname{Isom} E^2$ – движения евклидовой пл-ти (биекции, сохраняющие расстояния) – – группа преобразований E^2.

$\operatorname{Isom} E^3$ – группа движений (евкл трехм.) пр-ва.

ЗАМ Здесь E^2 – пл-ть, а не в.п. ей соотв.

3) V – в.п. над полем F $GL(V)$ – группа всех невырожд. лин. пр-й пр-ва V.

Если $\dim V = n$, то $GL(V) \simeq GL_n(F)$ – группа невыр. кв. $(n \times n)$-м-ц над полем F.

$GL(V)$, $GL_n(F)$ – общая (полная) линейная группа пр-ва V (или матриц...)

4) Зафикс. $a \in \bar{V}$. Пр-е $t_a : \bar{V} \to \bar{V}$ по правилу

$t_a : x \mapsto x + a$ — параллельный перенос на a.

Поскольку $t_a \cdot t_b = t_{a+b}$, $t_a^{-1} = t_{-a}$, $\varepsilon = t_0$,

Мн-во $\mathrm{Tran}\,\bar{V}$ всех паралл. переносов

— группа преобразований пр-ва $\bar{V}$.

(не лежит в $GL(\bar{V})$!)

В силу рав-ва $t_a \cdot t_b = t_{a+b}$ легко видеть, что

$\langle \mathrm{Tran}\,\bar{V}, \circ \rangle \simeq \langle \bar{V}, + \rangle$ — аддитивная группа в.п. $\bar{V}$.

$\mathrm{Tran}_2 = \mathrm{Tran}\,E^2$, $\mathrm{Tran}_3 = \mathrm{Tran}\,E^3$.

— группы паралл. переносов евкл. пл-ти и пр-ва соотв.

5) Пусть $f \in K[x_1, \dots x_n]$ — мн-н от n переменных
$\operatorname{Sym} f = \{\sigma \in S_n : f(x_{1\sigma}, \dots x_{n\sigma}) = f(x_1, \dots x_n)\}$
$\leq S_n$. В частности, f — симм. $\Leftrightarrow \operatorname{Sym} f = S_n$.

<u>Упр 1</u> Проверьте, что $\operatorname{Sym} f \leq S_n$. Найдите $\operatorname{Sym} f$ для $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$.

6) Пусть $V = K^n$ и $f \in K[x_1, \dots x_n]$
Подмн-во в $GL(V)$ л.п. сохраняющих мн-н f — подгруппа в $GL(V)$.
В частности, $O_n = GO(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in GL(\mathbb{R}^n) \mid (x_1\varphi)^2 + \dots + (x_n\varphi)^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2\}$ — группа ортогональных преобразований пр-ва $\mathbb{R}^n$.

Соотв. группа матриц $: GO_n(\mathbb{R}) =$
$= \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A' = A^{-1}\}$

Упр 2 Описать вид матриц из O_2 — ортог. пр-й E^2. Заметим, что сохранение $x_1^2 + x_2^2$ означает, что O^2 — мн. пр-я пр-ва E^2, сохраняющие расстояния между точками!

7) Пусть $H = \{h \in Isom_2 : Oh = O$ для некот фик. точки $O\}$

Тогда $H = O_2$ (см. [ВИН] пример 10 из 4.1).

Предл. 1 $Isom_2 = Tran_2 \cdot O_2$ (см. предл. 4.2.2 из [ВИН]).

9) $SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) : |A| = 1\} \le GL_n(F)$

— специальная линейная группа.

<u>Упр 3</u> Д-ть, что $SL_n(\mathbb{Z}) \le SL_n(\mathbb{R})$

$D_n(F) = \{D \in GL_n(F) \mid D$ — диагональная$\}$

— абелева подгруппа в $GL_n(F)$.

<u>Упр 4</u> $H = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \middle| \ a_1 \dots a_n \neq 0 \right\} \le GL_n(K)$.

строго верхнетреугольн.

---

8) Если F — фигура на E^2, то

$\mathrm{Sym}\, F = \{\varphi \in \mathrm{Isom}_2 : F\varphi = F\}$ — группа симметрий фигуры F.

D_{2n} — группа диэдра (симметрий прав. n-угольника).

2. Группы в алгебре, геометрии и физике

1) Галуа и решение ур-й в радикалах

$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ разрешимо в радикалах $\Leftrightarrow$ Группа Галуа этого (перестановок корней) этого ур-я **разрешима**.

Пример $x^4 - x^2 + 1 = 0$ имеет корни

$$\{\underset{1}{\alpha}, \underset{2}{-\alpha}, \underset{3}{\tfrac{1}{\alpha}}, \underset{4}{-\tfrac{1}{\alpha}}\} \Rightarrow Gal(f) = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

абелева $\Rightarrow$ разр.

2) и 3) см. [ВИН] гл. 4 § 2.