Продолжение п. 7, в части 5.

(см. след. страницу):

Опр 5 Пусть гом-зма $\varphi: G \to S(\Omega)$ и $\varphi': G \to S(\Omega')$ задают действия G на мн-вах Ω и Ω' соотв-но.
Эти действия **эквивалентны**, если найдется биекция $\lambda: \Omega \to \Omega'$ такая, что $\forall \alpha \in \Omega$ $\forall g \in G$

$$(\alpha(g\varphi))\lambda = (\alpha\lambda)(g\varphi').$$

Из опр 5 сразу вытекает, что если $\varphi \sim \varphi'$, то
$\forall \alpha \in \Omega$ $\quad |\alpha(G\varphi)| = |(\alpha\lambda)(G\varphi')|$ и даже
$(G\varphi)_\alpha \simeq (G\varphi')_{(\alpha\lambda)}$.

Пример $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = 2$, $\Omega = \Omega' = \{1,2,3,4\}$.
$a\varphi = (12)(34) = a\varphi'$ $\quad b\varphi = (13)(24)$ $\quad b\varphi' = (12)$
Тогда $\varphi \not\sim \varphi'$, т.к. $|1 \cdot G\varphi| = 4$, но $|1 \cdot G\varphi'| = 2$.

Т.3 Пусть гом-зм $\varphi : G \to S(\Omega)$ задает транзитивное действие G на Ω. Пусть $\alpha \in \Omega$ и $H = G_\alpha$. Тогда действие φ эквивалентно действию G на $\Omega' = G/H$ правыми сдвигами.

Д-во: Т.к. G действ. на Ω транзитивно, то $\forall \beta \in \Omega$ $\exists x \in G : \beta = \alpha(x\varphi)$. Определим от-е $\lambda : \Omega \to \Omega'$ правилом $\alpha(x\varphi) \mapsto Hx$. Поскольку $\alpha(x\varphi) = \alpha(y\varphi) \Leftrightarrow$ $\alpha(x\varphi)(y\varphi)^{-1} = \alpha \Leftrightarrow \alpha(xy^{-1})\varphi = \alpha \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Hx = Hy$, от-е λ определено корректно и биективно. Наконец, $\forall x, g \in G$

$$(\alpha(x\varphi)\cdot(g\varphi))\lambda = H(xg) = (Hx)g = (\alpha(x\varphi))\lambda \cdot g(\varphi)$$ ■

8. Полупрямые произведения

Опр 1 Группа G есть полупрямое произведение своих подгрупп H и K (обозн: $G = H \rightthreetimes K$), если 1) $K \trianglelefteq G$, 2) $H \cap K = 1$, 3) $G = HK$.

Зам 1. В д-ве 2-ой т. о гом-змах мы видели, что если $K, H \leq G$ и $K \trianglelefteq G$, то $HK = KH \leq G$.

Зам. 2 П.п. 2, 3 опр 1 равносильны тому, что $\forall g \in G \ \exists!\ h \in H$ и $k \in K$: $g = hk$.

В частности, если $|G| < \infty$ и $G = H \rightthreetimes K$, то $|G| = |H| \cdot |K|$.

Зам. 3 Прямое произведение двух подгрупп — частный случай полупрямого.

<u>Примеры</u>: 1) $S_3 = \langle (12) \rangle \rightthreetimes \langle (123) \rangle$ и вообще,

$$S_n = \langle (12) \rangle \rightthreetimes A_n.$$

2) $GL_n(K) = H \rightthreetimes SL_n(K)$, где $H = \{ \mathrm{diag}(\lambda, 1, \ldots 1) \mid \lambda \in K^* \}$.

3) $\mathrm{Isom}_2 = O_2 \rightthreetimes \mathrm{Tran}_2$ и $\mathrm{Isom}_3 = O_3 \rightthreetimes \mathrm{Tran}_3$.

Вообще $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = GO(\mathbb{R}^n) \rightthreetimes \mathrm{Tran}(\mathbb{R}^n)$.

НАРЯДУ с „внутренним" определением $\rightthreetimes$, как и в случае с прямыми произведениями возможно и „внешнее" определение. Напомним (см. §9.6 из [ВМ]), что группа H действует на группе K автоморфизмами, если задан гомоморфизм $\varphi: K \to \mathrm{Aut}(H)$.

Теорема 1 Пусть H, K — группы и гомоморфизм $\varphi: H \to Aut(K)$ задает действие H на K автоморфизмами.

Мн-во $G = H \times K$ с операцией, заданной правилом

$$(h_1, k_1)\cdot(h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1^{h_2\varphi} k_2), \qquad (*)$$

где $h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$ и $k_1^{h_2\varphi}$ — образ k_1 под действием $h_2\varphi \in Aut(K)$, образует группу. Причем

$$H' = \{(h,1) \mid h \in H\} \le G, \quad K' = \{(1,k) \mid k \in K\} \trianglelefteq G,$$

$H' \cap K' = 1$ и $G = H'K'$, т.е. G есть полупрямое произведение своих подгрупп H' и K' (см. опр. 1).

Опр 2 Группа G из предл 1 наз-ся полупрямое произведение гр. H и K (относительно φ) и обозн. $G = H \ltimes_\varphi K$ или просто $H \ltimes K$.

Д-во: Очевидно, что $(1,1)$ — нейтр. элемент гр. G.

Т.к. $(1,1) = (h,k)\left(h^{-1}, (k^{-1})^{(h^{-1})\varphi}\right)$, то у каждого эл-та из G есть обратный. Проверка ассоциативности сводится к громоздкой прямой выкладке.

Чтв я $H', K' \leq G$, $H' \cap K' = 1$ и $G = H'K'$.

Проверим, что $K' \trianglelefteq G$. Поскольку $G = H' \cdot K'$, это вытекает из след. цепочки рав-в:

$$(h^{-1}, 1)(1,k)(h,1) = (h^{-1}, k)(h,1) = (1, k^{h\varphi}) \quad \blacksquare$$

Зам. Иной путь д-ть эту т-му: см. Isaacs, Finite Groups, Theorem 3.2.

Обратно, если G есть полупрямое произведение своих подгрупп H и K, причем $K \trianglelefteq G$, то $G = H \underset{\varphi}{\rightthreetimes} K$, где $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ по правилу $h \mapsto \varphi_h$ и $k\varphi_h = h^{-1}kh$, т.е каждый эл-т из H отправляется в сопряжение эл-тов группы K (как подгруппы гр. G) этим эл-том.

<u>Упр 1</u> Покажите, что ни группу $\mathbb{Z}_4$, ни группу Q_8 нельзя представить в виде полупрямого произведения своих подгрупп, хотя собств. норм. подгруппы там имеются.

Упр 2 Пусть $H = \langle a \rangle$, $K = \langle b \rangle$ — цикл. группы порядков m и n соотв-но.

1) Д-те, что если $\text{НОД}(\varphi(n), m) = 1$, то любое полупрямое произведение $H \leftthreetimes K$ есть прямое произведение этих групп.

2) Если m и n — простые числа, причём $m \mid n-1$, то с точностью до изоморфизма существует ДВА возможных полупрямых произведения $H \leftthreetimes K$, одно из которых абелева группа.