6 Линейные преобразования в. п.

1. Инвариантные подпространства и собств. в-ры

Зам. 1 Предполагается, что вы знакомы с §1 и 2 гл. 6 из [ВМ].

В целом изложение следует §3 гл. 6 из [ВМ], но след. опр-я и утв-я имеют след. редакцию:

Опр 2 Пусть φ — л. п. пр-ва V и U — φ-инв. подпр-во в V. Преобразование $\psi : U \to U$, действующее по правилу $u\psi = u\varphi$ $\forall u \in U$ наз-ся сужением пр-я φ на подпр-во U ($\psi = \varphi|_U$). Пр-е $\tau : V/U \to V/U$, действующее по правилу $(v+U)\tau = v\varphi + U$ $\forall v \in V$ наз-ся преобразованием фактор-пространства V/U,

индуцированным преобразованием φ (обозн. $\tau = \varphi_{V/U}$).

<u>Упр</u> $\varphi|_U$ и $\varphi_{V/U}$ линейны.

<u>Теорема 1</u> Пусть V - в.п. над полем F, $\dim V = n$, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, B - базис V из векторов $u_1, \dots u_r, v_{r+1}, \dots v_n$. Тогда

1) Если U - φ-инв. подпр-во пр-ва V с базисом A из $u_1, \dots u_r$, то

$$[\varphi]_B = \left(\begin{array}{c|c} [\varphi|_U]_A & 0 \\ \hline * & [\varphi_{V/U}]_C \end{array}\right),$$ где

C - базис V/U из в-ров $v_{r+1}+U, \dots v_n+U$, $[\varphi|_U]_A$ - м-ца сужения φ на U в базе A и $[\varphi_{V/U}]_C$ - м-ца пр-я $\varphi_{V/U}$, индуцированного φ, в базе C.

2) См п. 2 т. 6.3.1 из [ВА].

Д-во: Положим $\psi = \varphi|_U$ и $\tau = \varphi_{V/U}$. Пусть $[\varphi]_B = (\alpha_{ij})_{n\times n}$. Поскольку U – φ-инв, имеем

$\forall i = 1,\dots,r$ $u_i\varphi = \alpha_{i1}u_1 + \dots + \alpha_{ir}u_r + 0\cdot v_{r+1} + \dots + 0\cdot v_n$, т.е.

$u_i\psi = u_i\varphi = \alpha_{i1}u_1 + \dots + \alpha_{ir}u_r$. Кроме того,

$\forall i = r+1,\dots,n$ $v_i\varphi = \alpha_{i1}u_1 + \dots + \alpha_{ir}u_r + \alpha_{i,r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_{in}v_n$,

т.е. $(v_i + U)\tau = v_i\varphi + U = \alpha_{i,r+1}(v_{r+1} + U) + \dots + \alpha_{in}(v_n + U)$.

Отсюда по определению матрицы лин. пр-я вытекает справедливость п. 1 т. 1.

П. 2 вытекает из п. 1 по индукции $\blacksquare$

Предл 3 (см. предл 6.3.3 из [ВМ]) Пусть f_φ — хар. мн-н л.п. φ к.м. в.п. V над полем F. Тогда

1) Если U φ-инв. подпр-во пр-ва V, то хар. мн-ны $f_{\varphi|_U}$ и $f_{\varphi_{V/U}}$ делят мн-н f_φ.

2) см. п2 предл. 6.3.3 из [ВМ].

Д-во: Исп. т.1 — упражнение!