7. Пространства со скалярным произведением и их преобразования

1. Линейные функции и сопряженное пространство

Осн. определения и утв-я и их нумерация — гл. 5 § 2 из [ВИН],

Замечания: Формой m-ой степени (или m-формой) называют однородный (все одночлены которого имеют одинаковую степень m по совокупности переменных) мн-н от n переменных.

В силу (2) (здесь и далее §2 из гл. 5 [ВИН])
$\alpha(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \Rightarrow \alpha(x)$ — форма первой степени (линейная форма).
В частности, систему линейных уравнений можно понимать как набор условий на значения линейных форм (функций), см. в частности, теорему 4 в [ВИН].

Теорема 1 устанавливает канонический изоморфизм $x \mapsto f_x$ между V и V^{**}.

После отождествления V и V^{**} формула $f_x(\alpha) = \alpha(x)$ превращается в ф-лу

$$\alpha(x) = x(\alpha), \qquad (*)$$

которая выражает так называемый принцип двойственности.

Этот принцип лежит в основе дуализма „частица – волна" в квантовой механике.

Пусть $e_1, \dots e_n$ и $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ — двойственные базисы пр-в V и V^*. Если $x \in V$, $\alpha \in V^*$ и $[x]$, $[\alpha]$ — строки коор-т x и α в этих базисах, то $\alpha(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = [\alpha][x]^T$ в силу рав-ва (см [ВИН]):

$$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Аналогично, $x(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i = [x][\alpha]^T = \alpha(x)$

Важно: это верно только в сопряженных базисах!

Теорема 5 Пусть V, U – кн. в.п. над полем F.

Если $\varphi : V \to U$ – линейное отображение из V в U, то существует и единственно лин. от-е $\varphi^* : U^* \to V^*$ такое, что $\forall x \in V$ и $\forall \alpha \in U^*$ выполняется

$$(**) \qquad \alpha(x\varphi) = (\alpha\varphi^*)(x).$$

Если $A = [\varphi]$ – м-ца φ в базисах $e_1, \ldots e_n$ и $f_1, \ldots f_m$ пр-в V и U соотв-но, то м-ца $[\varphi^*] = A^T$ в сопряженных им базисах $\chi_1, \ldots \chi_m$ и $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ пр-в U^* и V^*.

Д-во: Единственность: Пред, что $\varphi_1^*, \varphi_2^* \in \mathcal{L}(U^*, V^*)$ обладают свойством (**). Тогда $\forall \alpha \in U^*$ $\forall x \in V$

$(\alpha\varphi_1^*)(x) = \alpha(x\varphi) = (\alpha\varphi_2^*)(x)$. Т.к. это верно

$\forall x \in V$, то $\alpha\varphi_1^* = \alpha\varphi_2^*$. Т.к. это верно $\forall \alpha \in U^*$

$\varphi_1^* = \varphi_2^*$, что и требовалось.

Существование: В выбранных нами базисах

$\alpha(x\varphi) = [\alpha][x\varphi]^T = [\alpha]([x][\varphi])^T = [\alpha](A^T[x]^T) = ([\alpha]A^T)[x]^T$. Рассмотрим от-е $\varphi^*: U^* \to V^*$,

для которого в базисах $x_1, \ldots x_m$ и $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_m$ выполняется

$[\alpha\varphi^*] = [\alpha]A^T$. Мы знаем, что заданное

Таким образом от-е линейно и $[\varphi^*] = A^T$.

Кроме того, $(\alpha\varphi^*)(x) = [\alpha\varphi^*][x]^T = ([\alpha]A^T)[x]^T =$

$= \alpha(x\varphi)$, что и требовалось ∎

Опр 4 Линейное отображение φ^*, опред. в т. 5, называется **сопряженным** к от-ю φ.

Теорема 6 (св-ва сопр. отображений) Для подходящих лин. отображений и скаляров вып. след утв-я:

1) $(\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*$; 2) $(\alpha\varphi)^* = \alpha\varphi^*$;

3) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$; 4) $\varepsilon^* = \varepsilon$; 5) $0^* = 0$;

6) $\varphi^{**} = \varphi$ (при каноническом отожд. V и V^{**}),

Д-во: Из свойств транспонирования м-ц (Упр!)