2. Билинейные и квадратичные функции

Осн. определения и утв-я и их нумерация взяты из гл. 5 § 3 из [ВИН]

<u>Замечания</u>: В силу (9) для кв. ф-ции

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \Rightarrow q(x) \text{ — квадратичная}$$

(т.е. 2-ой степени) форма от перем. $x_1 \ldots x_n$.

(сравни с замечанием в AN-31.pdf).

Таким образом, кв. ф-ция — это <u>от-е</u> из $V^2 \to K$ (см. опр 4), а кв. форма — <u>многочлен</u> из $K[x_1 - x_n]$.

В определениях 2 и 5 (если билинейная ф-ция α не симметрична или кососимметрична) логичнее говорить о правом ядре и правом ортогональном дополнении (сравни с форм. зад. 37.26, 37.12 и 37.16 в дом. задании), т.к. можно определить еще и левые ядро и дополнение, поменяв местами x и y. Однако в основном интересующем нас случае, когда α симметрична или кососимметрична, - это не важно, т.к. в этом случае левое = правое.

Пусть $q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$.

Очевидно, что $q(x)$ – кв. форма. Как выглядит „стандартная" м-ца этой формы?

Ведь $q(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2x_1 + 2x_2^2 = x_1^2 + 7x_1x_2 - 4x_2x_1 + 2x_2^2$ ...

Ответ: м-ца должна быть м-цей поляризации этой формы, т.е. симметричной билинейной формы, т.е. симметрической м-цей $\Rightarrow q(x) = xAx' = (x_1, x_2)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix}$ – стандартная м-ца кв. формы $q(x)$.

Практическое отыскание ортогонального базиса и соотв. диагонального вида билинейной функции или ассоциированной с ней кв. формы (существование которых вытекает из теоремы 1) объясняется так называемым методом Лагранжа (см. гл. 8, § 2 из [ВМ] или § 4.6 из [Кос 2]), а также файл AG-3.pdf.

Формы (билинейную или квадратичную) называют эквивалентными, если они соответствуют одной и той же функции (но в разных базах)

Таким образом, формы эквивалентны, если их матрицы A и B связаны соотношением $B = TAT'$ для некот. невырожденной м-цы T (м-цы перехода от одного базиса к другому). Или (над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$) что то же самое, они имеют одну и ту же сигнатуру.

Симплектический базис для кососимметрической билинейной функции, существование которого гарантируется теоремой 6, можно также найти с помощью алгоритма Лагранжа (см., § 4.9 (стр. 56-57) из [Ко2].