3. Полуторалинейные функции

[см. также [ВИН], стр. 210-212]

Понятия билинейной и квадратичной ф-ции, введенные нами в § 2, позволяют определить эти ф-ции над произвольным полем ($\operatorname{char} \neq 2$), в том числе над полем $\mathbb{C}$ компл. чисел.

Однако, стандартная билинейная ф-ция $\alpha(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ над $V = \mathbb{C}^n$ имеет „неприятное" св-во $q(ix) = \alpha(ix, ix) =$
$= -x_1 x_1 - \ldots - x_n x_n = -\alpha(x, x) = -q(x)$, а значит, на V квадр. ф-ция $q(x)$ не явл-ся положительно определенной. Мы обойдем эту трудность так:

Опр 1 Пусть K — поле с автоморфизмом порядка 2 $x \mapsto \bar{x}$ (мы назовем его, как и в случае с $\mathbb{C}$, сопряжением). Пусть V — в.п. над K. Ф-ция $\alpha: V \times V \to K$ наз-ся полуторалинейной, если она линейна по первому аргументу и антилинейна по второму, т.е.:

$$\alpha(x, y_1 + y_2) = \alpha(x, y_1) + \alpha(x, y_2)$$

$$\alpha(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\, \alpha(x, y)$$

Замечание В [ВИН] наоборот антилин. по первому аргументу, но нам удобнее по второму (также и в [КЗ]).

Если $\{e_1, \dots e_n\}$ – базис пр-ва V, то $\alpha(x, y)$ определяется числами $a_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$

$$(*) \quad \alpha(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i \overline{y_j} = (x_1, \dots x_n)\, A \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix} = x A \overline{y}'$$

Матрица $A = (a_{ij})$ – матрица ф-ции $\alpha(x,y)$.

При переходе к другому базису $\begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ она преобразуется по правилу $B = TAT^*$, где $T^* = \overline{T}'$ (здесь $\overline{T}' = (\overline{t}_{ji})$)

Определение ядра и невырожденной ф-ции аналогично билинейной ф-ции.

Опр 2 Полуторалинейная ф-ция $\alpha(x,y)$ наз-ся **эрмитовой** (соотв. **косоэрмитовой**), если $\alpha(y,x) = \overline{\alpha(x,y)}$ (соотв. $\alpha(y,x) = -\overline{\alpha(x,y)}$).

Ф-ция эрмитова (соотв. косоэрмитова) $\Leftrightarrow$ её м-ца A удовл. условию: $A^* = A$ (соотв. $A^* = -A$). Такие м-цы называют **эрмитовыми** (соотв. **косоэрмитовыми**).

Опр 3 Пусть $\alpha(x,y)$ — эрмитова полуторалинейная ф-ция. Ф-ция $q(x) = \alpha(x,x)$ — **эрмитова квадратичная ф-ция**.

Пусть $K = \mathbb{C}$. Легко заметить, что указанный в начале недостаток обычной квадр. ф-ции пропадает для эрмитовой. Действительно, если $\alpha(x, y) = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}$, то

$$q(x) = \alpha(x, x) = \overline{\alpha(x, x)} = |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \in \mathbb{R}_+$$

$\forall x \neq 0$, т.е. $\alpha(x, y)$ и $q(x)$ положительно определены!

Заметим (см [ВИН]), что $\alpha(x, y)$, по-прежнему, однозначно восстанавливается по $q(x)$.

На самом деле у $\alpha(x, y)$ и $q(x)$ просто одна и та же матрица!

Пусть $\alpha(x,y)$ – эрмитова полуторалинейная ф-ция.
Также как и в случае симм. билин. ф-ции
опр-ся ортогональность и ортогон. дополнение
и $V = U \oplus U^{\perp} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \alpha|_U = 0$ (аналог предл. 3.2 из гл. 5 [Вин]).

Поэтому всякая эрмитова полуторалинейная
ф-ция и соотв. эрмитова квадр. ф-ция приводятся
к нормальному виду:

$$\alpha(x,y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_k\bar{y}_k - x_{k+1}\bar{y}_{k+1} - \ldots - x_r\bar{y}_r$$

$$q(x) = |x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \ldots - |x_r|^2$$

Здесь r – ранг ф-ции, k и $(r-k)$ –
положительный и отриц. индексы инерции.

Эти параметры не зависят от способа приведения ф-ции к нормальному виду.

Т.к $\det A^* = \det \bar{A}' = \overline{\det A}$, то определитель комплексной эрмитовой м-цы лежит в $\mathbb{R}$.

Если все угловые миноры отличны от нуля, то снова работает метод Якоби, а если все они положительны, то и соотв. ф-ция положительно определена (аналог критерия Сильвестра).

Таким образом, в компл. пространствах именно эрмитова полуторалинейная ф-ция — „настоящий" аналог симметр. билинейной ф-ции на вещест. пр-ве!