4. Евклидовы и унитарные пространства

Осн. источник § 7.1 из [ВМ], но с учётом наших знаний о билинейных и полуторалинейных ф-циях. Всюду далее поле $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

<u>Опр 1</u> Пусть V – в.п. над полем F. Будем говорить, что V снабжено **скалярным произведением**, если на нем зафиксирована положительно определенная билинейная (при $F = \mathbb{R}$) или полуторалинейная (при $F = \mathbb{C}$) ф-ция, которая в дальнейшем наз-ся **скалярным произведением** на V.

<u>Обозн</u>: $f(a, b) = (a, b)$, где f – соотв. ф-ция.

Зам. Опр 7.1.1 из [ВМ] можно воспринимать теперь как перечисление элем. св-в скалярного произведения, вытекающих из соотв. опр-ний. То же относится к св-вам из упр 7.1.1.

Опр 2 Векторное пр-во V над полем F, снабженное скалярным произведением наз-ся **евклидовым**, если $F = \mathbb{R}$, и **унитарным**, если $F = \mathbb{C}$

Зам. Унитарное пр-во = эрмитово пр-во (ВИН).

Арифм пр-во строк F^n снабжено **стандартным** скалярным произведением: $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} = a b^*$, где $b^* = \overline{b}' =$ столбец из эл-тов, сопряженных в $\mathbb{C}$ к $\beta_1, \dots \beta_n$.

Опр 3 Матрица $G(a_1, \dots a_m) = ((a_i, a_j))_{m \times m}$ наз-ся **матрицей Грама** набора в-ров $a_1, \dots a_m$ евкл. (или унит.) пр-ва (иными словами, в м-це $G(a_1, \dots a_m)$ на месте (i, j) стоит скалярное произведение (a_i, a_j)).

Теорема 1 Для любого набора в-ров $a_1, \dots a_m$ евкл (унит.) пр-ва $\det G(a_1, \dots a_m) \geq 0$, причём равенство имеет место $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots a_m$ — л.з.

Д-во: Если $\exists \lambda_1, \dots \lambda_m \in F : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0$, то $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i, a_j) = 0 \ \forall j \Rightarrow$ из л.з. $a_1, \dots a_m$ вытекает л.з. строк м-цы Грама.

Пусть теперь $a_1, \dots a_m$ – л.н. набор. Пусть $U = \langle a_1 \dots a_m \rangle$.
Если скалярное произведение на V задано ф-цией f, то $f|_U$ – снова скалярное произведение но уже на U, причем $G(a_1 \dots a_m)$ – матрица этой функции. В силу критерия Сильвестра $\det G(a_1 \dots a_m) > 0$ $\blacksquare$

<u>Следствие</u> (неравенство Коши-Буняковского)
Если V – евкл. (унит) пр-во, то $\forall\, a, b \in V$ выполняется $(a,b)(b,a) \leq (a,a)(b,b)$, причём рав-во имеет место $\Leftrightarrow$ a и b лин. зависимы.

<u>Д-во</u>: $\det G(a, b) = \begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{vmatrix}$ $\blacksquare$

Зам., что $(b,a) = \overline{(a,b)} \Rightarrow (a,b)\cdot(b,a) \in \mathbb{R}$.

Иногда это нер-во записывают так: $|(a,b)| \le |a||b|$,
где $|(a,b)|$ — модуль компл.(или вещ.) числа, а
$|a|$ и $|b|$ — длины (нормы) соотв. в-ров, т.е.
$|a| = \sqrt{(a,a)}$.

Теорема 2 (см. Теорема 7.1.1 из [ВМ])
(Об ортонормированном базисе к.м. евкл (унит) пр-ва).

Д-во 1) вытекает из т. 1 об опр-ле м-цы Грама
2) вытекает из т. 2 §2, т.е из т. 5.3.2 из [ВИН]
3) и 4) см. соотв. д-во в [ВМ]

Далее, ортонормированный базис = ОНБ

Зам В ОНБ (и только в нём) $(a,b) = [a][b]^* = [a]\overline{[b]}'$
в силу п. 4 Теоремы 2.

Опр 3 (опр 7.1.7 из [ВМ]) Евкл. (унит) пр-ва U и V изоморфны, если существует изоморфизм φ в.п. U и V, который „сохраняет" скалярное пр-е, т.е $(a\varphi, b\varphi) = (a, b)$ $\forall a, b \in U$.

Следствие (т. 2 о базисе) Каждое n-мерное евкл. (унит) пр-во изоморфно $\mathbb{R}^n$ (соот. $\mathbb{C}^n$) со станд. скалярным произведением. В частности, к.м. евкл. (унит.) пр-ва изоморфны $\Leftrightarrow$ их размерности совпадают.

Ортог. дополнение и его св-ва, ортог. проекция, расстояния, углы, объемы (см. § 7.1 из [ВМ] и § 5.4 из [ВиН])

Замечание. Длина в-ра в евкл. (унит) пр-ве явл-ся нормой в смысле опр 6.5.1 из [ВИН]. (в частности, нер-во треугольника выводится из нер-ва Коши-Буняковского). Поэтому евкл. (унит) пр-во — нормированное.

Каждое нормированное пр-во снабжено естеств. метрикой $\rho(x,y) = |x-y|$ и поэтому явл-ся метрическим пространством в смысле след. определения:

Опр 4 Мн-во M и заданная на нём ф-ция $\rho: M^2 \to \mathbb{R}$ наз-ся **метрическим пространством**, если

1) $\rho(x,y) > 0$ при $x \neq y$ и $\rho(x,x) = 0$ $\forall x, y \in M$
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ $\forall x, y \in M$
3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

Ф-ция ρ наз-ся **расстоянием** или **метрикой**.

Конечно, на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ можно задать массу метрик, которые не индуцируются подходящим скалярным произведением.