# 5. Сопряженные и нормальные преобразования

Пусть $V$ – в.п. со скалярным пр-ем над $\mathbb{R}$ (евкл) или $\mathbb{C}$ (унит) и $e_1, \ldots, e_n$ – ОНБ этого пр-ва. Зафиксируем $x \in V$. Ф-ция $\alpha_x(y) = (x, y)$ линейна, если $F = \mathbb{R}$, и полулинейна (т.е. $\alpha_x(y_1 + y_2) = \alpha_x(y_1 + y_2)$ и $\alpha_x(\lambda y) = \lambda \alpha_x(y)$), если $F = \mathbb{C}$.

Отображение $x \mapsto \alpha_x$ явл-ся изоморфизмом в.п. $V$ и $V^*$, определение которого не зависит от выбора ОНБ в $V$, т.к. $\alpha_x(e_i) = (x, e_i) = x_i$ – $i$-я коор-та вектора $x$ в базисе $e_1 \ldots e_n$. Этот изоморфизм наз-ют каноническим. С помощью него

можно отождествить $V$ с $V^*$. Поскольку $\alpha_{e_i}(e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij} = \varepsilon_i(e_j)$, при этом отождествлении базис $e_1 \ldots e_n$ отождеств. с сопряженным ему базисом. Теперь теорема 7.1.5 (т.е. теорема 5 из § 1 этой главы, см. файл AN-31) показывает, что для любого линейного преобразования существует сопряженное к нему (см. опр. 7.2.2 из [BM]) и матрица, сопряженного преобразования в ОНБ, сопряжена матрице исходного преобразования (см. опр. 7.21 из [BM]), т.е верны п. 1 и 2 из теоремы 7.21 из [BM] о сопряженном преобразовании.

Технически док-во проведено только в случае евкл. пр-ва (т.к. ф-ция предполагалась линейной, а не полулинейной). <u>Упр 1</u> Проверить случай $F = \mathbb{C}$.

Обратите внимание, что $[\varphi^*] = [\varphi]^* = \overline{[\varphi]}'$ только в ОНБ.

Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Ф-ция $\alpha_\varphi(x, y) = (x\varphi, y)$ билинейна, если $F = \mathbb{R}$, и полуторалинейна, если $F = \mathbb{C}$. Причем в ОНБ м-ца $A$ этой ф-ции совпадает с м-цей $[\varphi]$ л.п. $\varphi$ пр-ва $V$, т.к. $xA\overline{y}' = \alpha_\varphi(x, y) = (x\varphi, y) = x[\varphi]\overline{y}'$.

Опр-е и осн. свойства нормального преобразования см. опр. 7.23 и т-ма 7.22 из [ВМ].

Теоремы 7.2.3 и 7.2.4 из [ВМ] о каноническом виде нормального преобразования в унитарном и евклидовом пространстве — основной технический инструмент всей этой главы, поэтому изучить их формулировки и доказательства следует особенно тщательно. В частности, практические задания из листка Problems 41 призваны прежде всего проиллюстрировать эти док-ва. Отметим также, что идея комплексификации пространства (переход от евкл. пр-ва к унитарному) и овеществления (обратный переход), которые используются в док-ве

Теоремы 7.2.4 имеют независимое значение, см. стр. 222–223 из [ВИН]. В связи с этим упомянем следующую теорему — аналог теоремы Жордана в произвольном (без скалярного произведения) к.м. вект. пространстве.

<u>Теорема 5</u> Пусть $V$ — к.м. в.п. над $\mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Существует базис пр-ва $V$, в котором $[\varphi] =$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_k & & & \\ & & & B_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & B_s \end{pmatrix}, \text{ где } A_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ — клетка Жордана,}$$

соотв. вещ. хар. корню $\lambda$,

$$
B_j = \begin{pmatrix}
\alpha & \beta & 1 & 0 & & & & & & \\
-\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & \mathbf{0} & & \\
 & & \alpha & \beta & 1 & 0 & & & & \\
 & & -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & & \\
 & & & & & & \alpha & \beta & 1 & 0 \\
 & \mathbf{0} & & & & & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & \alpha & \beta \\
 & & & & & & & & -\beta & \alpha
\end{pmatrix}
$$

— Обобщенная клетка Жордана, соотв. паре компл. сопр. характ. корней $\alpha \pm i\beta$ преобр-я $\varphi$.

<u>Упр</u> Доказать Теорему 5, используя т-му Жордана, т-му о жордановом раскладе — это т. 67.3 из [ВМ] и предл 4 и т-му 2 из гл. 6 §2 (стр. 222-223) из [ВИН].