# 6. Ортогональные и унитарные преобразования

Основные опр-я и утв-я и их нумерация — гл. 7 § 3 из [ВМ]. Отметим, что п. 5 теоремы 7.3.1. об эквивалентных опр-ях орт. (унит.) пр-ий означает, что имеется биекция между всеми ОНБ евкл. (унит.) пр-ва $V$ и всеми ортогональными (унит.) операторами на пр-ве $V$ (сравни с аналог. биекцией между всеми базисами произв. пр-ва и всеми линейными операторами). Кроме того, это означает, что строки (и столбцы) ортогональной и унитарной

матрицы образуют ОНБ в соотв. арифм. пр-ве со стандартным скалярным произведением.

Ортогон. (унит.) преобразования нормальны, т.к. $\varphi\varphi^* = \varphi\varphi^{-1} = \mathcal{E} = \varphi^{-1}\varphi = \varphi^*\varphi$, поэтому теорема о канон. виде этих преобразований вытекает из соотв. т. 7.2.3 и 7.2.4 из [ВМ] для нормальных преобразований.

Отметим следствия т. 7.3.3 в случае 2-х и 3-х мерного евкл пространства (см. упр 7.3.2 и 7.3.3).

На самом деле т. Эйлера утверждает, что в 3-х мерном пространстве каждое ортогональное

преобразование, сохраняющее ориентацию пространства, является поворотом отн-но некоторой прямой (см. также стр. 232 в [ВИН]).

Очень важным ортогональным (унитарным) преобразованием явл-ся отражение отн-но $(n-1)$-мерного подпространства (его называют гиперплоскостью). Такое отражение однозначно определяется ненулевым вектором, ортогональным к гиперплоскости.

Если $w$ – такой вектор, то соотв. отражение записывается ф-лой: $x \cdot \tau_w = x - 2\dfrac{(x,w)}{(w,w)}w \quad \forall x \in V$.

Действительно, $w \cdot \tau_w = w - 2\frac{(w,w)}{(w,w)} w = -w$

и $u\,\tau_w = u$ $\forall u \in \langle w \rangle^\perp$ (это ортогон. дополнение)

$\Rightarrow$ в базисе из $e_1 = \frac{w}{|w|}$ и ОНБ $\langle w \rangle^\perp$ м-ца A

$$[\tau_w] = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

что и требовалось.

В частности, $\forall\, x, y \in V$ : $|x| = |y|$ найдется отражение (заданное вектором $w = x - y$), которое переводит $x$ в $y$.

Наконец, как показано в примере 6.3.4 из [ВИН] любой поворот в 2-х мерном евкл. пр-ве есть композиция двух отражений.

Выведите отсюда и из т. 7.3.3 из [ВК] тот факт, что группа всех ортон. преобразований $GO(V)$ $n$-мерного евк. пр-ва порождается отражениями отн-но гиперплоскостей (т.е. подпр. в размерности $n-1$) — это обязат. задача 5 из 9.3 (Problems 42).

---

Ортогональные (унитарные) преобразования, как сохраняющие скалярное произведение, образуют важнейший класс преобразований евклидова (унитарного пр-ва).