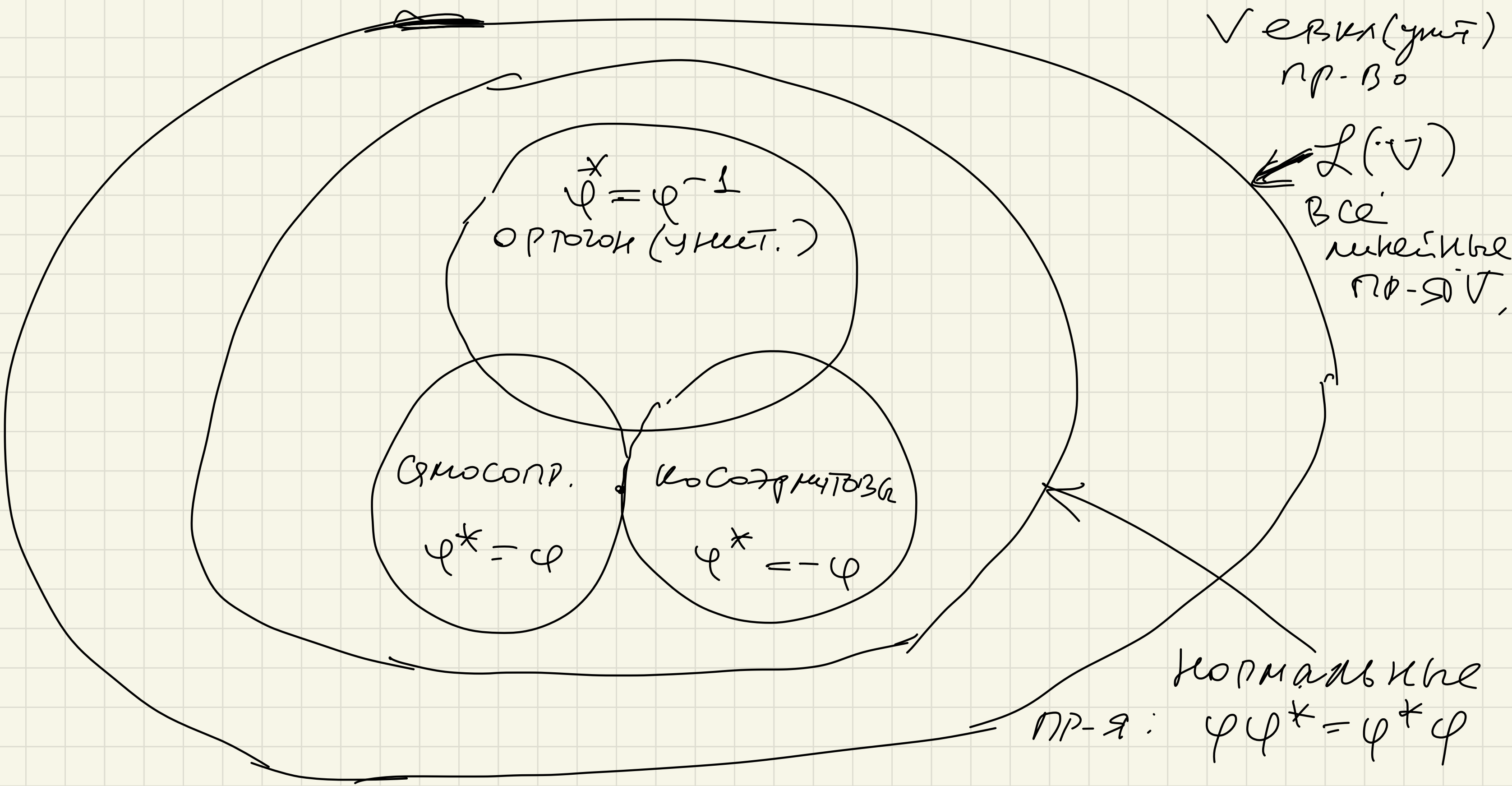
# 7. Самосопряженные преобразования

Осн. опр-я и утв. и их нумерация гл. 7 §4 из [ВМ]. Отметим, что самосопряженные и косоэрмитовы преобразования тоже относятся к классу нормальных преобразований. Важное достоинство самосопр. пр-й (причем не важно в евкл. или унитарном пр-ве) состоит в том, что их спектр всегда лежит в поле $\mathbb{R}$. Аналогично спектр любого косоэрмитова пр-я (что в евкл., что в унит. пр-ве) состоит из чисто мнимых чисел, т.е $\subseteq i\mathbb{R}$.

Для того, чтобы не потеряться среди всех этих названий полезно иметь такую картинку:



Теория самосопряженных преобразований имеет очевидное применение в теории билиней-ных (полуторалинейных) функций, в частности, квадратичных (эрмитовых квадратичных) ф-ций, поскольку матрица такой ф-ции симметрическая (эрмитова).

Теорема 4 Пусть $f(x)$ — веществ. (эрмитова) квадр. форма с матрицей $A$. Существует ортогональная (унитарная) м-ца $Q$ такая, что замена $x = yQ$ приводит $f(x)$ к диагональному виду $g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, $(*)$ где $\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$ — спектр матрицы $A$.

Д-во: см. док-во теоремы 8.2.4 в [ВМ]

Зам. Теорема 8.2.4 из [ВМ], как и её док-во говорит только о случае вещ. форм, но док-во дословно (с заменами слов (квадр. → эрмитовы квадр., ортогон. → унитарная) переносится на случай компл. эрмитовой формы.

Таким образом, ранг формы = число ненулевых хар корней её матрицы, а полож. (отриц.) индекс инерции = число полож. (отриц.) корней.

Форма $g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ из Т. 4 — канонический вид кв. формы $f(x)$.

Процесс приведения формы $f(x)$ к каноничес-
кому виду с помощью ортогональной замены
называют приведением формы к главным осям.

Соотвествие между симметрическими (эрмитовыми) матрицами и квадр. (эрмитовыми квадр.) формами дает и соотвествие между положительно опред. матрицами и положительно опред. формами.

В частности, критерий Сильвестра, который мы установили для форм, конечно, годится и в случае матрицы самосопр. преобразования, см., например,

следствие из т. 8.3.1 (стр. 84) из [ВМ].

Ещё одно следствие этой связи:

Теорема 5 Пусть $f(x)$, $g(x)$ — вещ. (эрмитовы) квадр. формы и $f(x)$ положительно определена. Тогда существует невырожденная м-ца $T$ из $M_n(\mathbb{R})$ (из $M_n(\mathbb{C})$) такая, что после замены $x = zT$, форма $f(x)$ переходит к нормальному виду $f(x) \underset{T}{\sim} z_1^2 + \ldots + z_n^2$ и форма $g(x)$ переходит к диагональному виду $\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2$.

[См. ф-ку и док-во т. 8.3.2 из [ВМ].

Зам 1 форма $g(x) \underset{T}{\sim} \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2$ ← это не обязательно канонический вид $g(x)$, см. внимательно док-во.

Зам 2 В общем случае ответ на вопрос о приведении двух форм одним преобразованием к диаг. виду решается отрицательно. См. зад. 5 и 6 из Problems 43 или упр 8.3.2 и 8.3.3 из [BM].

Полезно помнить, что $\forall \varphi \in \mathcal{L}(V)$ $\varphi + \varphi^*$ и $\varphi\varphi^*$ — самосопр. преобразования (см. упр 7.4.3), в частности, это позволяет находить кан. вид и соотв. ОНБ для ортогон. пр-й без перехода в $\mathbb{C}$ (см. AG-9)

Док-во теоремы 7.4.2 о канон. виде матрицы косоэрмитова преобразования проводится по той же схеме, что и д-во т. 7.4.1 о матрице самосопр. пр-я, поэтому его док-во оставлено в качестве упражнения.

Полезно сравнить т. 7.4.2 с т-мой 6 из §3 гл.5 [ВИН] о симплект. базисе кососим. бил. ф-ции. Следует только помнить, что в случае теоремы из [ВИН] соотв базис не обязан быть ортонормир-ванным (алгоритм Лагранжа не сохраняет расстояния!).