8. Сингулярные числа, полярное и сингулярные разложения

Основные определения, утверждения и их нумерация, см. § 7.5 из [BM].

Зам. В последнем предложении д-ва т. 7.5.1 должно быть: Имеем $(a\psi, b\psi) = (a, b\psi\psi^*) = (a, b\psi^2) = (a, b\varphi\varphi^*) = (a\varphi, b\varphi)$ $\forall a, b \in V \Rightarrow$ φ и ψ изометричны.

Сингулярные числа, открытые в конце XIX века независимо Е. Бельтрами и К. Жорданом, особое

значение их теория приобрела с развитием компьютерной техники, т.к. сингулярные числа (в отличие от обычных характеристических корней) устойчивы относительно малых изменений элементов матриц, что позволяет контролировать накопление ошибок округления, возникающих при решении задач на компьютере.

Эта тема лежит за пределами нашего курса, но упр. 7.5.2 из [ВМ] позволяет понять, о чем идёт речь. В случае, если φ нормально, особой разницы между хар. корнями и синг. числами нет, как видно из т. 7.5.2.

Отметим также след. полезный факт:

<u>Упр</u> Сингулярные числа операторов φ и φ^* совпадают. (хотя $\varphi\varphi^*$ и не равно в общем случае $\varphi^*\varphi$).

Теорема 7.5.3 и 7.5.4 о полярном и сингулярном разложении тесно связаны между собой, так существует способ сначала док-ть т-му о сингул. разложении и вывести из неё т-му о полярном разложении.

<u>Упр</u> Что из себя представляет теорема о полярном разложении в одномерном унитарном пространстве?

Напомним (см., напр., опр. 4 в § 5 гл. 6 из [ВИН]), что нормой лин. оператора φ в евкл (унитарном) пр-ве V наз-ся число

$$\|\varphi\| = \max_{0\neq x\in V} \frac{|x\varphi|}{|x|} = \max_{|x|=1} |x\varphi| .$$

Оказывается, наиб. синг. число σ_1 и есть норма соотв. оператора φ, а именно

<u>Т.5</u> Пусть $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$ сингул. числа лин. оператора φ евкл. (унит.) пр-ва V. Тогда $\forall\, x\in V : |x|=1$ имеем $\sigma_m \leq |x\varphi| \leq \sigma_1$. Более

того, найдутся собств. в-ры a и b пр-я $\varphi\varphi^*$, которые имеют длину 1 и $a\varphi = \sigma_m a$, $b\varphi = \sigma_1 b$.

<u>Д-во:</u> Рассмотрим квадратичную ф-цию,

$$q(x) = (x\varphi, x\varphi) = (x\varphi\varphi^*, x),$$

ассоциированную с самосопр. оператором $\varphi\varphi^*$. В силу предл. 2 из §3 гл. 6 из [ВИН] локальные экстремумы этой ф-ции на сфере $S = \{x : |x| = 1\}$ достигаются на собств. в-рах пр-я $\varphi\varphi^*$ и каждый экстремум равен соотв. собственному значению, т.е. сингулярному числу пр-я φ. $\blacksquare$

Последнее замечание: на самом деле в отличие от собств. чисел (характ. корней) сингулярные числа можно определить даже для произв. лин. отображения φ из одного евкл. (унит.) пр-ва V в другое W (не обязательно одной размерности). Действительно, если $A \in M_{m \times n}(F)$, то $B = A \cdot A^* = A \cdot \bar{A}^T \in M_{m \times m}(F)$, как и м-ца $A^* A = \bar{A}^T \cdot A \in M_{n \times n}(F)$ квадратные!

Понятие сингулярного числа для произв.

ми. отображения позволяет решать множество практических задач, включая задачу об однозначном задании взаимного расположения двух подпр. в евкл. (унит.) пр-ва серией подход. углов. Подробнее об этом см. в метод. пособии. В.И. Шевцов, В.А. Чуркин „Линейные преобразования евклидовых пространств" (файл можно скачать со страницы нашей кафедры на сайте НГУ – раздел „методические пособия".

Этот параграф последний в части 7 наших лекций, поэтому еще несколько соображений. Теория линейных операторов в пространствах со скалярным произведением исключительно плодотворна. В силу ограниченности времени мы не остановились подробно на многих её приложениях. Ниже собраны интересные разделы и ссылки на книги из списка литературы (см. файл с программой на 1 и 2 семестр на моей страничке):

1) ортогональные многочлены (гл. 3 § 5 из [Кос2]).

2) псевдоевклидовы пространства и преобразования Лоренца (гл. 7 § 7-8 из [Ш.Р]).

3) унитарные пространства и квантовая механика (начиная с § 6 в книге [Кос М.]).
