(8) Аффинные и проективные преобразования

1. Аффинные отображения и преобразования

Далее считается, что Вы знакомы из курса аналитической геометрии с понятием аффинного пространства (советую просмотреть гл. 7 § 1 из [ВИН], на который я буду при необходимости ссылаться).

Опр1 Пусть S и S' — аффинные пространства, ассоциированные с в.п. V и V' над полем F. Аффинным отображением пр-ва S в пр-во S'

наз-ся отображение $f: S \to S'$, обл. св-вом

(1) $(p+x)f = pf + x\varphi \quad \forall p \in S, \ \forall x \in V$,

где φ – некоторое лин. отображение из V в V'.

Лин. отоб. φ наз-ся **дифференциалом** от-я f и обозн. df.

<u>Зам 1</u> из (1) $\Rightarrow (\overline{pq})\varphi = \overline{(pf)(qf)} \quad \forall p, q \in S \quad (2)$

поэтому df однозн. определен по f.

Если O и O' – начала отсчета в S и S', то, полагая $O = p$ в (1), получаем

(3) $\quad xf = x\varphi + b$, где $b = \overline{O'(Of)}$

— **векторная (векторизованная) форма** от-я f.

Обратно, если $\varphi \in \mathcal{L}(V, V')$ и $b \in S$, то от-е f, заданное в (3) аффинно, и $df = \varphi$.

Координатная форма: $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i$, $i = 1 \ldots m$ (4)

где $(a_{ij}) = [\varphi]$, $y = xf$ и $b = (b_1 \ldots b_m)$.

Предл 1 Композиция аффинных от-й — аффинное от-е.

Д-во: $f : S \to S'$ и $g : S' \to S''$ — аффин от-я.

Тогда $\forall p \in S$, $\forall x \in V$ имеем

$$(p+x)fg = (pf + x\,df)g = p(fg) + x(df)(dg) =$$

$$= p(fg) + x(d\,fg),$$ где посл. рав-во вытекает из опр-я композиции лин. отображений $\blacksquare$

Предл 2. Если $P = p + \vec{U}$ ($p \in S$, $\vec{U} \leq \vec{V}$) — плоскость в афф. пр-ве S и $f : S \to S'$ — афф. от-е, то $Pf = pf + \vec{U}df$ — плоскость пр-ва S', причем если f — инъективно, то $\dim Pf = \dim P$.

Заметим, что аффин. от-е биективно $\Leftrightarrow$ его дифференциал биективен (достаточно выбрать начала отсчета o и o' в S и S' так, чтобы $of = o'$). Поэтому конечномерные аффин. пространства (над одним и тем же полем) изоморфны (т.е. имеется биективное аффин. от-е из одного пр-ва в другое) $\Leftrightarrow$ их размерности равны.

Аффинное от-е пр-ва S в себя — аффинное преобразование пр-ва S. Мн-во $GA(S)$ всех биективных аффинных преобр-й пр-ва S образует группу (см. предл. 1)

Она наз-ся полной аффинной группой пр-ва S.

Если $H \leq GA(S)$, то H - аффинная группа.

Теорема 1 Пусть S - аффинное пр-во, ассоцир. с векторным пр-вом V над полем F.

1) От-е $d : GA(S) \to GL(V)$ - сюръективный гомоморфизм.

2) $K = \operatorname{Ker} d = \operatorname{Tran}(S) = \{ t_a : p \mapsto p+a \}$ - группа параллельных переносов пр-ва V.

3) $GA(S) = H \ltimes K$, где $H = \{ f \in GA(S) : of = o \}$ для некот. фикс. $o \in S$ и $H \simeq GL(V)$.

Док-во: 1) $d(fg) = df \cdot dg$ см. Д-во предл. 1

2) вытекает из опр-я

3) $d|_H$ — искомый изоморфизм из H на $GL(V)$, т.к. $\operatorname{Ker} d|_H = \operatorname{Ker} d \cap H = 1$ (подгруппа, сост. из тожд. пр-я)

$G = GA(S) = H \rightthreetimes K$ — полупрямое произведение своих подгрупп H и K в силу опр-я 5.8.1 из лекций (см. файл AN-22.pdf). Действительно, $K \trianglelefteq G$ в силу п. 2, $H \cap K = 1$ по доказанному, $G = HK$, т.к. в силу формулы (3) векторизированной формы $\forall f \in G$ $xf = x\varphi + b = \varphi t_b$, где $\varphi \in H$ и t_b — парал. перенос на вектор b $\boxtimes$

Как и положено в случае полупрямого произведения верна ф-ла: $f^{-1} t_a f = t_{(af)}$ (5)
(см. также предл 7.3.3 и [ВИН]).

Фигура Φ – любое подм-во в аффин. пр-ве S. Фигура Φ инвариантна отн-но $H \le GA(S)$, если $\Phi h = \Phi$ $\forall h \in H$. В этом смысле H „определяет" свою геометрию на S, т.к. изучает фигуры с точностью до H-инвариантности. В частности, сама $GA(S)$ определяет аффинную геометрию. Чтобы сформулировать основное свойство этой геометрии напомним, что

Группа G действует на мн-ве Ω *точно*, если ядро действия тривиально, *транзитивно*, если $\Omega G = \Omega$, i.e. $\forall\, \alpha, \beta \in \Omega\ \exists\, g \in G : \alpha g = \beta$, и *регулярно*, если G транзитивна и стабилизатор G_α некоторой (а значит и любой) точки $\alpha \in \Omega$ тривиален.

Теорема 2 Группа $GA(S)$ n-мерного афф. пр-ва S действует точно и регулярно на мн-ве всех аффинно независимых систем точек мощности $n+1$.

Д-во: Это переформулировка Т. 7.3.1 из [ВИН].

Упр Пусть S — n-мерное афф. пр-во над конечным полем порядка q. Найдите $|GA(S)|$.

Указ: Если G действует точно и регулярно на Ω, то $|G| = |\Omega|$ (докажите и воспользуйтесь!)

В книгах под редакцией Кострикина [К3] и [КоС2] исп. также след. терминология

Конфигурация — набор плоскостей $P_1, \dots P_k$ в афф. пространстве S. Конфиг. $\{P_1, \dots P_k\}$ и $\{Q_1, \dots Q_k\}$ конгруэнтны (эквивалентны), если $\exists\, g \in GA(S)$: $\forall i = 1 \dots k$ $\quad P_i g = Q_i$.

На этом языке утв-е зад. 4 из § 3 гл. 7 [ВИН] звучит так:

<u>Предл 3</u> Конфигурации $\{P_1, P_2\}$ и $\{Q_1, Q_2\}$ в к.м. афф. пр-ве S конгруэнтны $\Longleftrightarrow$ $\dim P_i = \dim Q_i$, $i=1,2$; $\dim\langle P_1 \cup P_2\rangle = \dim\langle Q_1 \cup Q_2\rangle$ и пересечения $P_1 \cap P_2$ и $Q_1 \cap Q_2$ пусты или непусты одновременно.

<u>Зам</u> Если U_i и W_i – подпр-ва, ассоц. с P_i и Q_i соотв-но, $i=1,2$, то условие $\dim\langle P_1 \cup P_2\rangle = \dim\langle Q_1 \cup Q_2\rangle \Longleftrightarrow \dim(U_1+U_2) = \dim(W_1+W_2)$ $\Longleftrightarrow$ (с учетом др. условий) $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(W_1 \cap W_2)$.

Указ. к док-ву см. в файле AG-11.pdf.

Если точки p_1, p_2, p_3 лежат на прямой ℓ в афф. пр-ве $\mathring{S}$ и ($p_2 \neq p_3$), то число c из соотношения $\overline{p_1 p_3} = c\,\overline{p_2 p_3}$ называют **отношением** тройки p_1, p_2, p_3 (пишут $c = (p_1, p_2, p_3)$), причем, если $p_2 = p_3$, то полагают $(p_1, p_2, p_3) = \infty$ и (p_1, p_2, p_3) не определено при $p_1 = p_2 = p_3$)

<u>Предл 4</u> Если тройка точек p_1, p_2, p_3 лежит на прямой ℓ и аффин. преобразование f пр-ва $\mathring{S}$ выбрано так, что ℓf снова прямая, то

(6) $(p_1, p_2, p_3) = (p_1 f, p_2 f, p_3 f)$.

В частности, (6) верно $\forall f \in GA(\mathring{S})$.

$\boxed{\text{Упр. Д-те предл. 4}}$