2. Движения евклидова аффинного пр-ва

Далее, мы считаем, что $\mathcal{S}$ – евкл. аффинное пр-во (см. опр. 7.1.4 из [ВИН]), т.е. на ассоц. с S вект. пр-ве V задано скалярное произведение, превращающее его в евкл. пр-во. Для удобства мы далее считаем, что поле $F = \mathbb{R}$ – это поле действ. чисел. Стандартное n-мерное евкл. пр-во мы будем обозн. $S = \mathbb{E}^n$.

Пр-во $\mathcal{S}$ является метрическим пр-вом отн-но ф-ции расстояния $\rho(p,q) = |\overline{pq}|$.

Два n-мерных евкл. афф. пр-ва изоморфны (т.к. изом. $\mathbb{E}^n$).

Опр 1 Движением (или изометрией) евкл. афф. пр-ва S наз-ся (произв.) преобразование пр-ва S, сохраняющее расстояние между точками, т.е от-е $f : S \to S$ такое, что $\rho(pf, qf) = \rho(p, q)$ $\forall p, q \in S$.

Теорема 1 Преобразование f пр-ва S явл-ся движением $\Longleftrightarrow$ f – афф. преобразование пр-ва S, дифференциал которого лежит в $GO(V)$ (т.е явл-ся ортогональным оператором в ассоц. с S евкл. пр-ве V).

Зам. Подчеркнём, что в опр. 1 не предполагается, что f – аффин. пр-е.

Д-во: $\Leftarrow$) Т.к. паралл. перенос и аффин. преобр. с неподвижной точкой, дифф-л которого ортогон. оператор, сохраняют метрику, то достаточность очевидна.

$\Rightarrow$) Пусть f — движение. Зафикс. некот. точку $O \in S$. Если $f(O) = O'$, то композиция $f\,t_{\overline{OO'}}$ движения f и паралл. переноса $t_{\overline{OO'}}$ на в-р $\overline{OO'}$ — снова движение, поэтому можно сразу считать, что $f(O) = O'$.

Р-м преобразование φ евкл. пр-ва V, ассоц. с пр-вом S, действ. по правилу $x\varphi = \overline{O(O+x)f}$ $\forall x \in V$,

Тогда $xf = (0+x)f = 0 + x\varphi \quad \forall x \in V \qquad (*)$

В силу $(*)$ теорема будет доказана, если мы покажем, что φ - ортогональный оператор евкл. пр-ва V, ассоц. с S.

<u>Упр 1</u> Д-те этот факт, действуя по схеме:

1) $0\varphi = 0$ и $|x\varphi - y\varphi| = |x-y| \quad \forall x, y \in V$

<u>Указ</u>: если $p = 0+x$ и $q = 0+y$, то $|x-y| = \rho(p,q) = \rho(pf, qf) = |x\varphi - y\varphi|$.

2) $(x\varphi, y\varphi) = (x, y)$

<u>Указ</u>: Исп. рав-во $(x-y, x-y) = (x\varphi - y\varphi, x\varphi - y\varphi)$.

3) От-е φ <u>линейно</u>. Указ. Если $z = x+y$, то $|z-x-y| = 0 \Rightarrow 0 = (z-x-y, z-x-y) \dots$ ∎

Зам 2 Еще раз подчеркну, что линейность φ надо доказывать (см. Зам. 1).

Зам 3 Если возникают затруднения, то можно „подсмотреть" док-во т-мы 4.3.3 из [КоС 2].

Следствие Множество Isom S всех движений евкл. аффин. пр-ве S отн-но операции композиции образует подгруппу группы полной аффинной группы $GA(S)$. Более того, взятие диф-ла $d: \mathrm{Isom}\, S \to GL(V)$ — гом-зм, образ которого — это группа $GO(V)$ — общая ортогон. группа пр-ва V, $\mathrm{Isom}\, S = O \rtimes K$, где $O = \{f \in \mathrm{Isom}\, S : of = o$ для некот. фикс. точки $o \in S\}$ и $O \simeq GO(V)$, а

$K = \mathrm{Ker}\, d = \mathrm{Tran}\, \mathcal{S}$ — группа паралл. переносов пр-ва $\mathcal{S}$.

Д-во: теорема 1 этого пункта + т. 1 из первого пункта ~~[illegible]~~

Группа $\mathrm{Isom}\, \mathcal{S}$ называется **полной группой движений (изометрий)** пр-ва $\mathcal{S}$. $\boxed{\mathrm{Isom}_+ S \le \mathrm{Isom}\, S \text{ стр 278 из [ВЧН]}}$.

Из след. 1 и теоремы о полярном разложении сразу вытекает след. характеризация произвольного аффин. преобразования пр-ва $\mathbb{E}^n$.

Следствие 2 Пусть $f \in GA(\mathbb{E}^n)$. Тогда $f = hgt$, где t — паралл. перенос, g — движение, оставл. на месте некот. точку $o \in \mathbb{E}^n$ и h — аффин. преобразование,

Явл. композицией и растяжений (сжатий) вдоль взаимно перпенд. осей, пересекающихся в точке O. (См. также т. 4.3.10 из [Кос2].)

Также как группа $GO(V)$ орт. операторов n-мерного евкл. пр-ва V порождается отражениями отн-но $(n-1)$-мерных плоскостей (см. зад 1 из § 3 гл. 6 [ВИН]), так и группа $\mathrm{Isom}\,\mathbb{E}^n$ евкл. афф. пр-ва $\mathbb{E}^n$ порождается отражениями Γ_H отн-но гиперплоскостей H (см опр-я на стр. 279). Док-ть этот факт — задача из дом. задания (problems46.pdf).

Замечательную характеризацию произв. движения некоторой инвариантной плоскостью дает след.

<u>Теорема 2</u> $\forall f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)$ однозначно опр.-на пл-ть $P = p_0 + U$ из $S = \mathbb{E}^n$ со след. свойствами:

1) $Pf = P$, причем $f|_P$ — паралл. перенос

2) df не имеет ненулевых неподв. векторов в орт. дополнении $U^{\perp}$.

Д-во этой теоремы, а также её приложения для описания движений в маломерных ($n = 1, 2, 3$) пр-вах, см стр. 280-281 из [ВИН].

Вспомнить определение группы симметрий фигуры, как подгрупп гр. $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)$.

Дополнительные возможности:

1) Прочитать § 7.2 из [ВИН] о выпуклых мн-вах (в частности, изучить основную теорему линейного программирования - т-ма 6 из этого параграфа) и
и изучить опр-е прав. многогранника по [ВИН]
Опр. 7.3.3 и его приложения для подсчета числа симметрий прав. многогранников.

2) Псевдоевкл. аффин. пр-ва и группы их преобразований - см. окончание § 7.3 из [ВИН] и (гораздо подробнее) § 4.4 из [КОС2].