3. Проективные преобразования

Далее считается, что Вы знакомы с определением и базовыми свойствами n-мерного проективного пространства PV (ассоциированного с $(n+1)$-мерным вект. пр-вом V) над произвольным полем F, аффинной карты S этого пр-ва и их базовыми свойствами (достаточно в объеме начала §5 из гл. 7 из [ВИН], см. стр. 297–302). Мы будем в основном следовать этому §5 и в дальнейшем изложении.

__Упр 1__ Отметьте неточность в изложении [ВИН] понятия аффинной карты.

Опр 1 Пусть V – в.п. над полем F и PV – соотв. проективное пространство. Преобразование $\hat{\varphi}$ пр-ва PV, индуцированное действием $\varphi \in GL(V)$ точках пр-ва PV как одномерных подпр-в пр-ва V, наз-ся **проективным преобразованием** пр-ва PV.

Мн-во всех таких пр-й образует группу $PGL(V)$ отн-но композиции, которая называется **полной проективной группой** пр-ва PV.

Предл 1 Если P – плоскость пр-ва PV и $\hat{\varphi} \in PGL(V)$, то $P\hat{\varphi}$ – снова пл-сть в PV и $\dim(P\hat{\varphi}) = \dim P$.

Д-во. Вытекает из св-в $\varphi \in GL(V)$ ∎

Теорема 1 Пусть V – $(n+1)$-мерное в.п. над полем F, PV – соотв. n-мерное проективное пр-во. Тогда

1) От-е $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$, где $\varphi \in GL(V)$, – это сюръектив-ный гом-зм из $GL(V)$ в $PGL(V)$.

2) Ядро Z этого гом-зма – это группа скалярных операторов λE $(\lambda \in F^*)$.

3) $PGL(V) \simeq GL(V)/Z$ – фактор-группа общей линейной группы по подгруппе скалярных преобразований.

Δ-во: см лемму 1 и рядом стр. 302 [ВИН].

Несложно вычислить, что если $\hat{\varphi} \in PGL(V)$

$x = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ $y = x\varphi = (y_0 : \ldots : y_n)$ —

однородные коор-ты точек x и y в базисе $e_0, \ldots e_n$ пр-ва V, то $y_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$

для некот. $\lambda \in F^*$ и $[\varphi] = (a_{ij}) \in M_{n+1}(F)$.

Ф-лу для неоднородных коор-т см. в [ВИН],

Предл 2 Пусть S — не проходящая через нуль гиперплоскость аффин пространства ассоциир. с в.п. V. Тогда $\forall f \in GA(S)$ сущ-ет единств. проективное пр-е $\hat{\varphi} \in PGL(V)$, образ которого на

карте $\hat{S}$ совпадает с f.

Д-во: см. лемму 2 из §7.5 в [ВиН].

Следствие В обозн. предл. 2, $GA(S) \leq PGL(V)$.

Геометрия, определяемая полной группой проективных преобразований наз-ся проективной геометрией. Следующая теорема отражает „богатство" соотв. группы даже по сравнению с группой аффинных преобр-й.

Система из $n+2$ точек n-мерного пр-ва PV наз-ся системой точек общего положения, если никакие $n+1$ не лежат ни в одной гиперплоскости.

<u>Теорема 2</u> Группа $PGL(V)$ действует точно и регулярно на мн-ве всех систем точек общего положения проективного пр-ва PV.

<u>Д-во:</u> Это переформулировка т-мы 7.5.3 из [ВИН]. Сравни также с Теоремой 2 из § 8.1 лекций (см. AN-41.pdf).

<u>Упр 2</u> Пусть F – поле кон. порядка q и V – $(n+1)$-мер. векторное пр-во над F. Найти $|PV|$ и $|PGL(V)|$.

<u>Указ.</u> восп. определением PV и Теоремой 2.

Напомним, что $SL(V) = \{\varphi \in GL(V) : \det\varphi = 1\}$ — общая специальная линейная группа.

Её образ $PSL(V) = \{\hat{\varphi} \in PGL(V) : \det\varphi = 1\}$ в $PGL(V)$ — нормальная подгруппа. Она называется **проективная специальная линейная группа.**

<u>Упр 3</u> В обозн. упр. 2 найти $|PSL(V)|$.

Как следует из т. 2 любую тройку точек проективной прямой можно перевести проективными преобразованиями в любые другие

три точки этой прямой (сравни с Предл 4 из § 8.1 лекций для аффинной геометрии).

Понятие двойного отношения четырех точек на одной прямой в проективной плоскости см. § 7.5 (стр. 304-305) из [ВИН].

Более детальное изложение этой темы можно посмотреть § 5.3 из [Кос2].