9 Коммутативная алгебра

1. Абелевы группы

Опр1 Пусть K - класс групп. Говорят, что группа $F = \langle x_i \mid i \in I \rangle$ из K - свободная группа в классе K со свободным порождающим мн-вом $\{x_i \mid i \in I\}$, если для любой группы $G \in K$ с порождающим мн-вом $\{a_i \mid i \in I\}$ отображение $x_i \to a_i$ индуцирует гомоморфизм из F в G.

Мощность мн-ва I наз-ся рангом (или степенью свободы) группы F.

ЗАМ. Не в каждом классе групп есть свободные!

Далее все группы абелевы. Поэтому форма записи <u>аддитивная</u>.

<u>Предл 1</u> Пусть фактор группа G/H абелевой гр. G есть прямая сумма бескон. цикл. групп

$$G/H = \sum_{i \in I} (A_i/H), \text{ где } A_i = \langle a_i, H \rangle$$

Тогда $G = H \oplus A$, где $A = \langle a_i \mid i \in I \rangle$.

<u>Д-во:</u> См. лемма 7.1.1 в [КМ].

<u>Т. 1</u> Группа G есть свободная абелева группа $\iff$ G ~~—~~ прямая сумма бесконечных цикл. групп, т.е $G \simeq \bigoplus_{i \in I} G_i$ и $G_i \simeq \mathbb{Z}$ для всех $i \in I$.

Д-во: Т. 7.1.2 из [КМ].

Напомним, что группа G (не обязательно абелева) наз-ся **конечно порожденной**, если она обладает конечным порождающим мн-вом. Далее мы ограничимся к.п. абелевыми группами.

Опр 2 Подмн-во $X = \{x_i \mid i \in I\}$ наз-ся **базой** к.п. абелевой группы G, если каждый элемент из G единств. образом представляется в виде $g = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

Предл. 2 (о приведении целоч матриц)

См. предл. 9.1.1 из [Вин]

Т. 2 (о базисе своб. аб. группы) Пусть F — своб. абелева группа конечного ранга n. Тогда

1) F обл. базисом из n элементов

2) В каждом базисе F n элементов

3) Если $x_1, \dots x_n$ — базис F, то $F = \langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_n \rangle$.

Д-во: 1) Вытекает из т. 1

2) Вытекает из предл. 2

3) Вытекает из определения базиса и опр-я прямой суммы (произведения) групп (Теорема 9.5.1 из [ВМ]) ∎

Упр. 1 G — к.п. абелева гр. Тогда G свободна $\Longleftrightarrow$ G обл. кон. базисом

Т.3 (о свободе) Пусть F – своб. абелева группа ранга n, а H – подгруппа гр F. Тогда H – свободная группа ранга $m \le n$. Более того, найдутся базисы $x_1, \dots, x_n$ группы F и $y_1, \dots, y_m$ группы H, для которых $y_i = d_i x_i$, $d_i \mid d_{i+1}$, где $i = 1 \dots m$.

Д-во: См. д-ва т. 9.1.3 и 9.1.5 из [ВИН].

ЗАМ. В отличии от к.п. вект пр-в вполне возм. ситуация, когда $H < F$ и $\operatorname{rk} F = \operatorname{rk} H$.
Например, $2\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$, но $\operatorname{rk} \mathbb{Z} = \operatorname{rk} 2\mathbb{Z} = 1$.

Напомним, что если $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s} \in \mathbb{N}$, то $\mathbb{Z}_n$ раскл. в прямую сумму своих примарных цикл. подгрупп $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}$.
(т. 9.5.2 из [ВМ]).

__Т. 4__ Каждая конечно пороожд. абелева группа G раскл. в прямую сумму примарных и бесконечных циклических подгрупп, причем набор порядков этих подгрупп определен однозначно.

__Зам.__ Этот набор называют типом к.п. абелевой группы.

__Д-во:__ см., напр., т. 9.1.6 из [ВиН].