

2. Кольца главных идеалов

Вспомогат. б) Кольцо целостности, евл. делим. Вспомогат. в) таких колец, простых д-т, единств. в разл. простых. (см. АНБ, АНБ и § 3.5 из [ВИН]);

б) идеал кольца, факторкольцо, факторкольцо по левым идеалам — поле (АНБ и § 9.2 из [ВИН])

Опр 1 Пусть A и B — кольца (алгебры над полем K)

от. е $\varphi: A \rightarrow B$ — **гомоморфизм** колец (алгебр), если

$$(x+y)\varphi = x\varphi + y\varphi \quad (xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi) \quad \forall x, y \in A$$

(и где алгебра $(\alpha x)\varphi = \alpha(x\varphi) \quad \forall \alpha \in K \text{ и } \forall x \in A$).

Из орг-я угла \Rightarrow Если $I \trianglelefteq A$, то орг-е

$\pi: A \rightarrow A/I$ по правилу $a\pi = a + I$ — гом-зм,
он (как и в случае групп) наз-ся **каноническим**.

Т. 1 (о гом-зме) Пусть $\varphi: A \rightarrow B$ — гом-зм колец.

Тогда 1) $\text{Im } \varphi = \{a\varphi \mid a \in A\} \leq B$ (подкольцо в B)

2) $\text{Ker } \varphi = \{a \in A \mid a\varphi = 0\} \leq A$ (идеал в A)

3) Орг-е $\psi: A/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ по правилу
 $(a + \text{Ker } \varphi)\psi = a\varphi$ — изоморфизм.

Д-во: см. Т. 1 в § 9.2 из [Вик].

Пример $A = K[x]$, $B = K$ и φ — функ. з-т из K .

От-ет $\varphi: A \rightarrow B$ по правилу $f(x) \mapsto f(\varphi)$ — гом-зм.

$\text{Im } \varphi = K$, $\text{Ker } \varphi = (x - \varphi)K[x]$ — все мн-во,
делящееся на $x - \varphi$. Поэтому $K[x] / \text{Ker } \varphi \cong K$.

(сравн с теоремой Безу). Другие примеры
см. [ВУИ] после т. 9.2.1.

Чтобы опр-ть факторалгебру A/I алгебры A
от идеала I гом. Требуется, чтобы $\alpha I \subseteq I \quad \forall \alpha \in K$.

Опр-е гомоморфизма и теорема о гом-змах
легко распространяется на алгебры.

Опр 2 Кольцо (алгебра) A раскл. в **прямую сумму**

своих колец (подалгебр) A_1, \dots, A_k , если

- 1) идеалы группы A — прямая сумма аб. групп A_1, \dots, A_k
(в.н. A есть прямая сумма колец A_1, \dots, A_k в составе алгебры)
- 2) $A_i \cdot A_j = 0$ при $i \neq j$ (что равносильно тому, что A_1, \dots, A_k — идеалы).

Опр 2' (внешнее) Прямая сумма колец (алгебр)

A_1, \dots, A_k — это прямая сумма $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$

их аддитивных групп (в.н. в составе алгебры)

с покомпонентной операцией умножения:

$$(x_1, \dots, x_k) (y_1, \dots, y_k) = (x_1 y_1, \dots, x_k y_k).$$

Преп 1 Опр-я 2 и 2' эквив-ны в том смысле, что

$$A \simeq A_1 \oplus \dots \oplus A_k, \text{ где } A \text{ из опр 2.}$$

Л-во: такое как и в случае групп....

Преп 2 Если A_1, \dots, A_k а) асоц, б)

комм, в) с единицей, то и $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ тоже.

Зад 1 Если A_1, \dots, A_k все гл. идеалы, верно
ли это для $A_1 \oplus \dots \oplus A_k$?

Зад 2 Дока-ти, что $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l \Leftrightarrow (k, l) = 1$
и $n = kl$.

Далее, A - комм. ассоц. кольцо с 1 .

Предп. 3 Пусть $S \subseteq A$. лн-во $(S) =$
 $= \{ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \mid x_1, \dots, x_n \in S, a_1, \dots, a_n \in A \} \trianglelefteq A$,
при этом (S) - наим. идеал, содержащий S .

Опр 3 $I = (S)$ - идеал, порожденный
лн-вом S .

Зад 3 Дока-ть предп. 3

Опр 4 Идеал (u) , порожденный одним эл-том
и кольцо A наз-ся главным.

Опр 5 Угловитое кольцо, в котором все
угловые элементы, наз-ся **колыом ПЛАНКА**
углов (Principle Integral Domain = PID).

Примеры 1) F -поле 2) \mathbb{Z} , но не \mathbb{Z}_n в случае
составн
т.к там есть делители.

3) Конечное евкл. колыо — PID
(см. пример 3 из АН 8 или Т. 9. 2. 2 из [Вик]).

4) Существование неевкл. PID: например,
 $A = \{a + b\sqrt{-19} \mid a, b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\}$ — подкольцо в \mathbb{C}
— неевклидово колыо малых углов.

Т.2 В кольце н. идеалов A $\forall x, y \in A$ существует их наиб. общий делитель d и он может быть представлен в виде $d = ax + by$, где $a, b \in A$.

Л-во: л- и мн-во $I = \{ax + by \mid a, b \in A\}$.

В силу лемм. 3 — это идеал, порож. x и y .
т.к. A — PID, то $\exists u \in A : I = (u)$.

Этот u — наибольший ~~делитель~~

Мы будем часто обозн. $I = (x, y) \equiv (d)$.

Т-ма о св-х и единств. разл. тоже сохр. для PID
(но не теорема о главных идеалах!).

Т. 3 Пусть n — ненулевой делитель кольца главных идеалов A . Фактор-кольцо $A/(n)$ является полем $\Leftrightarrow n$ — простой делитель кольца A .

1-во. см. зам-во Т. 2 из АН 8 (аналог. зам-е для левых колец) или Т. 9.2.4 из [ВУН],

Т. 4 Пусть mn — взаимно простые делители кольца главных идеалов A . Тогда

$$A/(mn) \cong A/(m) \oplus A/(n).$$

А-во: см Т. 9.2.5 из [ВУН] $\left| \begin{array}{l} \text{ЧКЗ. } \varphi: A \rightarrow A/(m) + A/(n) \\ a \mapsto (a + (m), a + (n)) \\ \text{и Т. 1 о ком. группах.} \end{array} \right.$

Примеры 1) $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l \Leftrightarrow n = kl$ и $(k, l) = 1$,

2) $f(x) = (x - c_1) \cdot \dots \cdot (x - c_n)$, где c_1, \dots, c_n — различные.

$$\Rightarrow K[x]/(f) \simeq K[x]/(x - c_1) \oplus \dots \oplus K[x]/(x - c_n) \simeq$$

$$\simeq K \oplus \dots \oplus K = K^n.$$