

#### 4. Нётеровы кольца

Всюду в этом параграфе  $A$  — комм. асс. кольцо с 1.

Предп 1 След. эквив-ты эквив-нтны:

- (1) Каждой идеал  $I$  кольца  $A$  конечно порожден;
- (2) не сущ. бесконечной строг. возрастающей цепи идеалов  $I_1 \subsetneq \dots \subset I_n \subsetneq \dots$  ( $I_n \neq I_{n+1}$ ) кольца  $A$ .

Д-во:  $(1 \Rightarrow 2)$   $I = \bigcup I_n \leq A \Rightarrow I = (x_1, \dots, x_m)$ .

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, m \exists k_i: x_i \in I_{k_i}$ . Если  $N = \max k_i \Rightarrow$

$I \leq I_N \Rightarrow I_N = I_{N+1} \Rightarrow$  цепочка идеалов не бесконечна

$(2 \Rightarrow 1)$  Если  $\exists I \nsubseteq A: I$  не порожден конечным числом, то  $\exists$  бесконечная  $x_1, x_2, \dots \in I: (x_1) \neq (x_1, x_2) \neq \dots$   $\blacksquare$

Опр 1 Кольцо  $A$  наз-ся **кётеровым**, если оно удовн  
любой из двух условий в предл. 1.

Предл 2 Если  $A$  кетерово,  $I \trianglelefteq A$ , то  $A/I$  кетерово  
Д. Во: Проверка  $\bar{J}$  идеала  $\bar{J}$  кольца  $\bar{A} = A/I$  —  
идеала кольца  $A$ . Так  $A$  кетерово, то  $J = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$   
 $\Rightarrow \bar{J} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle$ , где  $\bar{x}_i = x_i + I$  — образы  
эл-тов  $x_1, \dots, x_n$  при канон. гом. зме из  $A$  в  $A/I$   $\square$

Т. 1 Пусть  $M$  — к.и. модуль над кетеровым кольцом  $A$ .  
Если  $N$  — подмодуль модуля  $M$ , то  $N$  конечно порожд.  
Д. Во: см Т. 1 из § 9.4 [Вик].

Зам Если  $M$ -своб.  $U$ -модуль над  $A$  (т.е.  $M=A$ ),  
то  $U$ -м-е т.д. это просто  $\text{Sur}(+)$  геттеров  $A$ -модуля  $A$ .

Т.2 (Гильберта о базисе идеала). Если  $A$  неле-  
пово, то  $A[x]$  тоже нелепово.

Дво: Пусть  $I \trianglelefteq A[x]$ . Мно-во  $A[x]_n$  ли-ков  
из  $A[x]$  степени не выше  $n$  — это к.и.  $A$ -модуль  
с базисом  $\{1, x, \dots, x^n\}$ . Положим  $I_n = I \cap A_n$ .

В силу т.1  $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n$  — к.и.  $A$ -модуль.

Очевидно, что  $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ .

Пусть  $I_n = \{a_n \in A \mid f(x) = a_n x^n + \dots \in I_n\}$ . Легко  
проверить, что  $I_n \subseteq I_{n+1}$  и  $I_n \trianglelefteq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Т.е.  $A$  нетерово  $\exists m \in \mathbb{N} : I_n = I_m \forall n \geq m$ .

Поэтому  $\forall f \in I_n$  ( $n \geq m$ )  $\exists g \in I_m : f - x^{n-m}g \in I_{n-1}$ .

След.  $I = \langle I_m \rangle$  (как идеал кольца  $A[x]$ ).

Но  $I_m$  порождается элементами  $1, x, \dots, x^m$

как  $A$ -модуль  $\Rightarrow I$  порождается этими же элементами как  $A[x]$ -модуль, т.е. как идеал кольца  $A[x]$ .

Следствие 1 Если  $A$  нетерово, то  $A[x_1, \dots, x_n]$  тоже  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Зам. Таким образом, хотя  $F[x_1, \dots, x_n]$  при  $n \geq 1$  уже не является кольцом га. идеалов, но оно будет по крайней мере нетеровым!

Пусть  $A$  — подкольцо кольца  $B$ . Говорят, что  $B$  **порождается** эл-ми  $u_1, \dots, u_n \in B$  **над**  $A$ , если каждый  $b$  из  $B$  можно записать как лн-н от  $u_1, \dots, u_n$  с коэф-ми из  $A$ , иными словами,

$\exists$  эпиморфизм  $f: A[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\text{нр}} B$ , где  $x_i \rightarrow u_i$ .

В силу 7. о тождествах  $B \cong A[x_1, \dots, x_n] / \ker f$ .

Обозн:  $B = A[u_1, \dots, u_n]$  (это не значит, что  $u_1, \dots, u_n$  независимы!)

Следствие 2 Кольцо конечно порожденное над нетеровым кольцом само нетерово.

$\Delta$ -во: применить След. 1 и предл. 2  $\square$

Эл-т  $a$  кольца  $A$  наз-ся **нильпотентным**, если  $a^m = 0$  для нек-г.  $m \in \mathbb{N}$ .

Препл 3  $\text{rad}(A) = \{a \in A \mid a \text{ нильп.}\} \trianglelefteq A$ .

Опр 2  $\text{rad}(A)$  - **нильпотентный радикал** кольца  $A$

Зам Иногда говорят про усло радикала, но бывает и группе!

Опр 3 Идеал  $I$  кольца  $A$  наз-ся **простым**, если  $I \neq A$  и  $A/I$  не имеет делителей нуля.

Пример Если  $A$  - PID, то  $I = (u)$  - простой  $\Leftrightarrow u$  - простой эл-т.

Напомним (см §5 в файле AN8 из 1 семестра),  
 что идеал  $I$  максимален, если  $I \neq A$  и  
 $I = J \forall$  идеала  $J$  кольца  $A: I \subseteq J$ , причём  
 (это +.1 в указании §, см. также пример 2 из §9.5  
 в [ВУИ])  $I$  макс в  $A \Leftrightarrow A/I$  - поле.

Пример 4 Если  $I$  - макс. идеал в  $A$ , то  $I$  простой.

Д-во: В поле нет главной нуля!

Т.3 Нуль потенциальный радикал комб. кольца  
 совпадает с пересечением всех простых идеалов

Д-во: Т.к. нульв. эл-т  $AB$  - сд главной нуля,

то  $\text{rad}(A) \subseteq \bigcap_{I \text{ - простой}} I$  | Зам. условие нетеровости в Т.3  
 можно опустить! См упр. 7  
 из Д.З. Problem 51.

Предположим, что  $a$  не инволютивен. Тогда  
 можно построить кольцо  $A' = A[a^{-1}]$  "дробей"  
 вида  $\left[\frac{b}{a^n}\right]$ , где  $b \in A$  и  $n \in \mathbb{N}$ , факторизуя  
 мк-во  $A \times \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  пер. вида  $(b, a^n)$   
 по отношению  $(b_1, a^{n_1}) \sim (b_2, a^{n_2}) \Leftrightarrow b_1 a^{n_2} = b_2 a^{n_1}$

и определяя на фактор мк-ве операции

$$\left[\frac{b_1}{a^{n_1}}\right] + \left[\frac{b_2}{a^{n_2}}\right] = \left[\frac{b_1 a^{n_2} + b_2 a^{n_1}}{a^{n_1+n_2}}\right] \text{ и } \left[\frac{b_1}{a^{n_1}}\right] \left[\frac{b_2}{a^{n_2}}\right] = \left[\frac{b_1 b_2}{a^{n_1+n_2}}\right]$$

аналогично определению поля частных целост. кольца

В силу следствия 2 из гл. 2  $A'$  нётерово. Поэтому  
 в  $A'$  есть нек-л. макс. идеал  $I'$ . Так как обратим в  
 в  $A'$ , то  $a \notin I'$ .



Положим  $I = I' \cap A$ . По второй т. о мин-мах  
 $A/I \cong A+I'/I' \leq A'/I'$ . Так.  $A'/I'$  — поле,  
то в  $A/I$  нет элементов нуля  $\Rightarrow I$  — идеал  
идеал в  $A$ , который не содержит  $a$   $\square$

Используя ту же идею, мы докажем еще  
одну важную теорему.

Пусть  $A$  — алгебра над полем  $K$  (по определе-  
нию, ассоц. комм. и с 1). Алгебра  $A$  кон. поро-  
ждена, если она конечно порождена (как кольцо)  
над  $K$ . Нам покажется след. утверждение,  
которое мы докажем позже в гл. 11:

Презл 5 Если к.п. алгебра  $A$  над алг. зам. полем  $K$  сама явл-ся полем, то  $A = K$ .

Т. 4 (Т. Гильберта о нулях в алгебр. форме)

Пусть  $A$  — к.п. алгебра над алг. зам. полем  $K$ .  
Тогда  $\forall$  ненулев. эл-та  $a \in A$  существует гом-зм  
 $\varphi: A \rightarrow K$ , для которого  $a\varphi \neq 0$ .

Д-во: Как и при г-вет. 3 строим идеалу  
(и идею алгебры)  $A' = A[a^{-1}]$ . Выберем в  $A'$   
макс. идеал  $I'$ . (он не содержит  $a$ , т.к.  $a$  обратим в  $A'$ ).  
Получим  $A'/I'$  — к.п. алгебра над  $K \xRightarrow{\text{презл 5}} A'/I' = K$ .

Свойство  $A/I \leq A'/I'$ . Если  $\pi: A' \rightarrow A'/I' = K$   
— канон. гом.зм, то искомый гом.зм  $\varphi = \pi|_A$  