

5. Аффинные алгебры, многообразия и их идеалы

Опр 1 Пусть F — поле, **системой алгебраических уравнений** S с переменными x_1, \dots, x_n над полем F наз-ся набор $S = \{f_i = 0 \mid f_i \in F[x_1, \dots, x_n], i \in I\}$. Если $|I| < \infty$, то S — **конечная система**. Мно-во $X(S)$ — мно-во всех решений системы S . Системы S_1 и S_2 экв-нт ($S_1 \sim S_2$), если $X(S_1) = X(S_2)$.

Опр 2 Подмно-во $X \subseteq F^n$ наз-ся **(аффинным) алгебраическим многообразием** над полем F , если найдется система алгебр. ур-й (САУ) S' , для которой $X(S') = X$.

Изучение теории алгебраических многообразий — основная задача **алгебраической геометрии**.

Опр 3 Идеалом системы $S = \{f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \mid i \in I\}$ наз-ся идеал $I(S) = (f_i \mid i \in I)$ в кольце $k[x_1, \dots, x_n]$.

Предп 1 Если $f \in I(S)$, то $f(x) = 0 \quad \forall x \in X(S)$.

Л-во: $f \in I(S) \Leftrightarrow f = r_1 f_{i_1} + \dots + r_m f_{i_m}$ где некоторые $i_1, \dots, i_m \in I \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in X(S)$.

Предп 2 Пусть $\{f_1, \dots, f_m\}$ и $\{g_1, \dots, g_k\}$ где все $f_i, g_j \in I$. Тогда $S_1 = \{f_i = 0, i=1..m\} \sim S_2 = \{g_j = 0, j=1..k\}$.

Л-во: Вывод из предп. 1.

Т.1 (Глибжеа абазисе) Любая САУ эк-на канонической системе.

Л-во: По "анг" т-ме Глибжеа абазисе (г.9.4.2) издал $I(S)$ системы S имеет кан. базис $\{f_1, \dots, f_m\}$.
В силу предл. 2 $S' \sim \{f_1=0, \dots, f_m=0\}$.

Упр 1) Любая система из одного уравнения \sim системе из одного ур-я

- 2) Любая система над \mathbb{Q} эк-на системе из одного ур-я. Укаж. $\{f_1=0, \dots, f_m=0\} \sim \{f_1^2 + \dots + f_m^2 = 0\}$
- 3) Система $\{x_1=0, x_2=0\}$ над \mathbb{C} не эк-на никакой системе из одного уравнения.

Недостаток оцр-го идеала системы состоит в том, что у эквивалентных систем могут быть разные идеалы.

Пример $\{x=0\} \sim \{x^2=0\}$, но $(x^2) \neq (x)$.

Опр 4 Идеалом алг. мно.образия $X \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ наз-ся $\mathcal{I}(X) = \{f \in F[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in X\}$,

Предп 3 $S_1 \sim S_2 \Leftrightarrow \mathcal{I}(X(S_1)) = \mathcal{I}(X(S_2))$.

Δ -во: Так. $S_1 \sim S_2 \Leftrightarrow X(S_1) = X(S_2)$, то необх. очевидно

Δ -н достаточность. Пусть $\mathcal{I}(X(S_1)) = \mathcal{I}(X(S_2))$.

Так $S_i \subseteq \mathcal{I}(S_i) \subseteq \mathcal{I}(X(S_i))$ для $i=1,2$, но $\forall f \in S_1$:

б-н.ся $f \in \mathcal{I}(X(S_2)) \Rightarrow X(S_1) \subseteq X(S_2)$. Аналогично,

$$X(S_2) \subseteq X(S_1) \quad \square$$

Зам $J(X(S))$ — наименьший идеал, зад. лев-с $X(S)$.

В предл. примере $J(X(\{x^2=0\})) = (x) = J(X(\{x=0\}))$.

На вопрос как по идеалу $I(S)$ вывести лев-с
ли $f \in J(X(S))$ отвечает "ком. версия". Там была
о нулях.


Упр 5 Пусть A — комм. ассоц. кольцо с единицей,
 $I \trianglelefteq A$. Лев-во $r(I) = \{a \in A \mid a^s \in I \text{ для некоего } s \in \mathbb{N}\}$
наз-ся **радикалом** идеала I кольца A . Обозч. $r(I) = \sqrt{I}$.

Предл 4 1) $I \subseteq r(I)$ 2) $r(r(I)) = r(I)$ 3) $r(I) \trianglelefteq A$
А-во: Упр 2.

Пред 5 Пусть $I \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$. Тогда $X(I) = X(\sqrt{I})$.

Л-во $I \subseteq \sqrt{I} \Rightarrow X(\sqrt{I}) \subseteq X(I)$, пусть $x \in X(I)$.

Если $f(x) \neq 0$ глго $f \in \sqrt{I}$, то $f^s(x) = (f(x))^s \neq 0$

для любог $s \in \mathbb{N}$, то противоречит тому, что $f^s \in I$
для неког $s \in \mathbb{N}$ 

Опр 6 Идеал I наз-ся **радикальным**, если
 $\Gamma(I) = I$, (из пред 4 \Rightarrow радикал идеала —
радикальный идеал).

Т. 2 (Гидеберг о нулях в "геом" форме)

Для любой системы алг. ур-й S над алг. замк. полем F
 $J(X(S)) = \Gamma(I(S))$.

Другими словами, если ли-ли $f \in F[x_1, \dots, x_n]$

вып-сво $f(x) = 0 \quad \forall x \in X(S) \Leftrightarrow \exists S \in \mathcal{N}$

$f^S \in I(S)$, где S - САУ над алг. зам. полем F .

Л-во: Если $f^S \in I(S)$, то $\forall x \in X(S) \quad f^S(x) = (f(x))^S = 0$

Тогда теперь $f(x) = 0 \quad \forall x \in X(S)$, но $f^S \in I \quad \forall S \in \mathcal{N}$.

Рассмотрим алгебру $A = F[x_1, \dots, x_n] / I(S)$ и

канон. гом-зм $\pi: F[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$. Тогда если

$\pi(x_i) = x_i, i = 1, \dots, n$, то ясно $A = F[x_1, \dots, x_n]$ -

- алгебра к.п. над алг. замк. полем F . Тогда

$a = \pi(f)$. Если предположение о f означало, что

a не инволютен в A . А значит, по л. 9.4.4

т.е. т. Г. о нулях д. алг. форме", \exists ком-зм $\varphi: A \rightarrow F$,
при котором $\varphi(a) \neq 0$.

По этому ком-зму мы можем взять $x \in X(S)$,
для которого $f(x) \neq 0$, прихотся к противоречию.

$\forall x \in F^n$ можно определить ком-зм $\psi_x: F[x_1, \dots, x_n] \rightarrow F$
правилом $\psi_x(g) = g(x) \quad \forall g \in F[x_1, \dots, x_n]$,
Обратно, если $\psi: F[x_1, \dots, x_n] \rightarrow F$ - ком-зм, то
 $\exists x \in F^n: \psi = \psi_x$, достаточно взять
 $x = (\psi(x_1), \dots, \psi(x_n))$. Таким образом, имеется
биекция между F^n и мн-вом ком-мов из $F[x_1, \dots, x_n]$
в F . (Проверьте!)

Если $x \in X(S)$, то $\psi_x(I(S)) = 0 \Rightarrow$

$\forall g \in f + I$ имеем $\psi_x(g) = \psi_x(f)$. Поэтому

оп-е $\psi_x : A = F[x_1, \dots, x_n] / I(S) \rightarrow F$ по

правому $\psi_x(\pi(g)) = \psi_x(g)$, $g \in F[x_1, \dots, x_n]$,

корректно определено $\forall x \in X(S)$ и вл-ся зам-мом

из A в F . При этом $\psi_x(x_i) = \psi(x_i)$ - i -я коор. т. x .

Обратно, если $\varphi : A \rightarrow F$ - зам. м, то найдётся

$x \in X(S)$ такой, что $\varphi = \psi_x$. Достаточно

выбрать $x = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$.

Поскольку $\exists \varphi : A \rightarrow F : \varphi(a) \neq 0$, где $f = \pi(g)$
 $\exists x \in X(S) : \varphi = \psi_x \Rightarrow \psi_x(g) \neq 0 \Rightarrow \psi_x(f) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \neq 0$ для $x \in X(S)$, противоречие. \blacksquare

Следствие СЛУ S над алг. зам. полем F несоблюдает

т.е. $X(S) = \emptyset \Leftrightarrow 1 \in I(S)$.

Л-во: Если $1 \in I(S)$, то ур-е $1 = 0$ можно решить в $S \Rightarrow X(S) = \emptyset$.

Таким образом $X(S) = \emptyset \Rightarrow J(X(S)) = F[x_1, \dots, x_n]$,

т.е. $J(X(S))$ — наиб. идеал, для которого f из которого

$\forall x \in X(S) f(x) = 0$. Поэтому $1 \in J(X(S)) = r(I(S))$

$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} : 1^s \in I(S)$, т.е. $1 = 1^s \in I(S)$ \blacksquare

Из этого следствия называют т. Гейзенберга
о нулях в слабой форме.

Упр 3 а) Показать, что 7. Гильберта не верно над \mathbb{R}

б) Если $f, f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[x]$ и $f = 0 \forall x \in \mathbb{C}^n$;

$f_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$, то $\exists r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}[x]$:

$$f = r_1 f_1 + \dots + r_m f_m.$$

Следствие 2 $\text{CAY } S_1 \sim S_2 \Leftrightarrow \Gamma(I(S_1)) = \Gamma(I(S_2))$.

Зам Позволяет устанавливать \sim систем, не имеющих их
реалистич.

О соответствии между алгебр. многообразиями
в F^n и n -порождёнными алгебрами без
изл. элементов см. [ВЧН] стр. 393-394.