


6. Факториальные кольца

Всюду в этой лекции A -улыство кольцо, т.е. комм. ассоц. кольцо с 1 и без делителей нуля.

Если $a, b \in A$, то $b \mid a \Leftrightarrow (a) \subset (b)$,
 $a \sim b \Leftrightarrow (a) = (b)$.

Напомним также, что ненуль. необр. эл. $p \in A$ прост, если p нельзя представить в виде $p = ab$, где $a \sim b$ необратимы.

Т.1 Если A нётерово, то каждый необр. ненулевой эл. A раскл. в произведение простых.

Д-во: Пусть это не так и $a_0 \in A$ необр. эл-т,
который нельзя разложить в пр-е простых.
кажем это так: типа **плохой**. Т.к a_0 плохой,
то он не прост, а значит, $\exists a_1, b_1 \in A : a_0 = a_1 b_1$,
где оба множителя необратимы и по крайней
мере один, скажем a_1 , снова плохой эл-т.
Заметим, что $(a_0) \subset (a_1)$, т.к. b_1 необратим.
Далее, так a_1 плохой, найдётся плохой a_2
и обратимый b_2 такие, что $a_1 = a_2 b_2$ и т.д.
Получаем беск. строг. возр. посл-во идеалов
 $(a_0) \subset (a_1) \subset (a_2) \subset \dots$, что противоречит лемме
Нётерова о кольце A 

Рассмотрим теперь вопрос единственности
такого разложения. Аукенз док-во единст.
в евкл. кольце показывает, что верно
след. утв-е:

Т. 2 Если в кольце A задан идеал,
порожденный любым простым элементом,
прост, то любой м.т. не более чем один
по своему раскл. в ур-е простых.

Зам. Если a не простой, то $a = pq \Rightarrow$
 $p \in (a)$ и $q \in (a)$ — значит много в $A/(a)$
 $\Rightarrow (a)$ не простой идеал.

Впр 1 (Учелостное!) кольцо A наз-ся **факториальным**,
если канонич. его кнобр. не нил. эл-т может
единств. образом (с точн. до перестановки
составителей и ассоциированности) быть
разложен в произведение простых эл-тов из A .

Мы уже знаем, что

евклидов $R \subset PID \subseteq$ факториальные

Т. 3 (св-ва факт. колец) Пусть A - факториальное
кольцо. Тогда

- 1) $\forall a, b \in A \exists \text{НОД}(a, b)$ и $\text{НОК}(a, b)$
- 2) Если эл-т α нелю частных Q колец A -лорен
или-на $f(x) \in A[x]$ со ст. коэф. 1, то $\alpha \in A$.

Лемма 1: 1) $a = \prod p_i^{k_i}$ $b = \prod p_i^{l_i}$ ($k_i, l_i \geq 0$) \Rightarrow
 $\text{НОД}(a, b) = \prod p_i^{\min\{k_i, l_i\}}$ и $\text{НОК}(a, b) = \prod p_i^{\max\{k_i, l_i\}}$.

2) Аналогично г-вы т. 3.6.1 из [ВЧК] и его следствия для кольца \mathbb{Z} и его поля частных \mathbb{Q} .

Опр 2 Целое кольцо A , для которого выполнены свойства из л. 2 т. 3 наз-ся **нормальным** (или **улывающимся**).

Опр 3 Для факториального кольца A назовем $f(x) \in A[x]$ **примитивным**, если НОД всех его коэф-тов равен 1 (аналогично кольцу \mathbb{Z} см. § 3 из [ВЧК]).

Т. 4 Если кольцо A факториально, то $A[x]$ тоже

Д-во: Пусть \mathbb{Q} -поле отбросив кольцо A .

Заметим, что $\forall f \in \mathbb{Q}[x] \exists \lambda \in \mathbb{Q}^*$ и неприводимый мн-н f_1 из $A[x] : f = \lambda f_1$.

Лемма (Гаусса) Произведение прим. мн-нов из $A[x]$ снова прим. многочлен

Д-во: аналогично г-ву для $\mathbb{Z}[x]$, см. например, в г-ве Т. 5-6. 1 из [ВМ]

Следствие Если f из $A[x]$ неразл. в $\mathbb{Q}[x]$, то f неразл. и в $A[x]$. (см. г-во там же)

Вернемся к \mathbb{Q} -ВСТ-мн. Пусть $f \in A[x]$.

Т.к. $\mathbb{Q}[x]$ — кольцо ра. идеалов, то $\mathbb{Q}[x]$ факторизуемо $\Rightarrow \exists \lambda = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, $a, b \in A$ и $(a, b) = 1$,

и p_1, \dots, p_s — простые и неразл. мн-ки из

$A[x]$ такие, что $f = \lambda p_1 \dots p_s$. Тогда $b f = a p_1 \dots p_s$

Если p — простой м-т из A : $p \mid b$, то в силу леммы Гаусса $p \mid a$, противоречие с $(a, b) = 1$

$\Rightarrow f = a p_1 \dots p_s$. Неразл. прим. мн-ки из $A[x]$ — простые м-ты $A[x]$. Кроме того, A также факториально $\Rightarrow \exists$ простые м-ты $q_1, \dots, q_t \in A$:

$a = q_1 \dots q_t$. Разложение $f = q_1 \dots q_t p_1(x) \dots p_s(x)$
— искомоe. И-но, $p_1(x) \dots p_s(x)$ — неразл. эл-ты
в $\mathbb{Q}[x] \Rightarrow$ суп не единственн. образом,
а $q_1 \dots q_t$ — простые эл-ты в кольце A — тоже \square

Средство Для этого восп F кольцо ин-тов
 $F[x_1 \dots x_n]$ — факториально. эти кольца не PID!

Еще суп ин-тов $\mathbb{Z}[x]$ — факториально.

Презл. 1 Если ин-н $f \in F[x_1 \dots x_n]$, где
поле F бескон., огранич. в мн-ве во всех
точках непрерывности:

$$\ell := a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0, \quad (*)$$

то $\ell \mid f$.

Д-во: Сделав замену переменных, можем

считать, что $\ell := x_1$. Тогда из условия на f
 \Rightarrow все слагаемые f содержат $x_1 \Rightarrow \ell \mid f$ \square

Пример Определитель Вандермонда $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$
 однороден (см. определение). Далее, сделаем
 замену переменных и старые коэф-ты.

Вопрос, который мы рассмотрим теперь
 такой. Пусть A — квадратное кольцо,

а $I = (p)$ — идеал, порожденный простым n -тем. Верно и, что A/I факториально.

Пусть $A = F[x, y, z] / (xy - z^2) = F[u, v, w]$,
где $\pi(x) = u$, $\pi(y) = v$ и $\pi(z) = w$ при каноническом возм-стве $\pi: F[x, y, z] \rightarrow A$.

Тогда A — целостное нетерово кольцо, но не факториальное, так. $w^2 = uv$, а u, v, w — простые эл-ты этого кольца.