2. Подгруппы свободных групп

Пусть $H \leq G$. Зафиксируем в каждом правом см. классе по одному представителю (для удобства фиксируя 1 как представитель см.кл. H). Мн-во S всех таких представителей наз-ся **трансверсалью** (или **системой представителей**). Мы будем обозн. через $\overline{x}$ – элемент трансверсали, лежащий в классе Hx (т.е $x\overline{x}^{-1} \in H$) и называть ф-цию $x \to \overline{x}$ **выбирающей функцией**.

__Предл. 1__ (св-ва выб. ф-ции) 1) $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$, 2) $\overline{\overline{x}y} = \overline{xy}$

Д-во: из опр-я.

Т. 1 Пусть M — порожд. мн-во гр. G, $H \le G$, S — трансверсаль G по H, $u \mapsto \overline{u}$, $u \in G$, — ф-ция, выбирающая представителей из S. Тогда
$H = \langle \gamma(s, x) \mid s \in S, x \in M \rangle$, где $\gamma(s, x) = sx\,\overline{sx}^{-1}$.

Д-во: Детали см. д-во Т. 14.3.1 из [КМ].
Заметим, что $\gamma(s, x^{-1}) = \gamma(\overline{sx^{-1}}, x)^{-1}$. Поэтому достаточно записать эл-т $u = x_1 \dots x_n$, где $x_i \in M \cup M^{-1}$ через $\gamma(s_i, x_i)$. Легко проверить, что
$u = \gamma(1, x_1) \cdot \gamma(\overline{x_1}, x_2) \cdot \gamma(\overline{x_1 x_2}, x_3) \cdot \ldots \cdot \gamma(\overline{x_1 \dots x_{n-1}}, x_n)$, что и требовалось. ∎

Зам. Процесс переписывания u через $\gamma(s, x)$ наз-ся переписывающим процессом Райдемайстера — Шрайера.

Следствие Если G – к.п. и $|G:H|<\infty$, то H – к.п.

Д-во: число эл-тов в S и M конечно. $\blacksquare$

Опр 1 Мн-во S эл-тов свободной группы наз-ся **Шрайеровым**, если $\forall s\in S$ 1) s несократимо
2) S содержит все начальные отрезки слова s, т.е если $s=x_1^{\varepsilon_1}\ldots x_r^{\varepsilon_r}$, то слово $x_1^{\varepsilon_1}\ldots x_i^{\varepsilon_i}\in S$ $\forall i=1\ldots r$.

Т.2 (Нильсен – Шрайер) Пусть $F=F(X)$ – свободная группа над алфавитом X, $H\leq F$. Тогда существует по крайней мере одна Шрайерова трансверсаль S гр. F по H. Группа H свободно порождается мн-вом неединичных элементов из $M=\{\gamma(s,x)\mid s\in S, x\in X\}$

Д-во 1) Длиной см. класса назовём длину самого короткого слова в нём. Построим Шрайерову систему представителей индукцией по длине класса.

База: $\forall u \in H$ $\bar{u} = 1$.

Если $|Hu| = 1$, то $\bar{u}$ — любое слово длины 1.

Пусть для всех классов длины $< r$ представители выбраны, а Hu — класс длины r. Возьмём слово $y_1 \dots y_r \in Hu$ длины r, т.е. $y_i \in X \cup X^{-1}$.

Положим $\bar{u} = \overline{y_1 \dots y_{r-1}}\, y_r$. Упр 1 Проверьте, что построенная так трансверсаль Шрайерова.

2) Мн-во Y порождает H в силу т. 1. Остается показать, что эл-ты из Y свободно порождают H.

а) слово $\gamma(s,x)$ несократимо, а значит, и слово $\gamma(s,x^{-1})$ несократимо $\forall s\in S\ \forall x\in X$.

б) Если $x,y\in X\cup X^{-1}$, $s,t\in S$ и $\gamma(s,x)\cdot\gamma(t,y)\neq 1$, то процесс сокращений в w „заглохнет" не дойдя до x и y в записи $w=sx\,\overline{sx}^{-1}ty\,\overline{ty}^{-1}$

Детали д-ва а) и б) см. в д-ве т. 14.3.2 из [KM].

в) Пусть слово $u\in H$ несократимо в алфавите Y. Нам нужно док-ть, что $u\neq 1$ (как слово в алф. X). Но сокращения могут начаться только на стыках слов вида $\gamma(s,x)$ и в силу б) прекратятся не уничтожив слово $\gamma(s,x)$ полностью ∎

Следствие Пусть $F = F(X)$, $rk(F) = n$, $H \le F$ и $|F:H| = k$. Тогда $rk(H) = 1 + (n-1)k$.

Д-во: В мн-ве $M = \{\gamma(s,x) \mid s \in S,\ x \in X\}$ nk эл-тов. Нам надо понять какие из них единичны. Пусть $S_0 = S \setminus \{1\}$. Р-м от-е $\tau : S_0 \to Y$;

$$s^{\tau} = \begin{cases} s'x\,\overline{s'x}^{-1} & \text{при } s = s'x,\ x \in X \\ sx\,\overline{sx}^{-1} & \text{при } s = s'x^{-1},\ x \in X \end{cases}$$

Тогда τ — биекция между S_0 и единичными эл-ми из Y $\Rightarrow$ $\blacksquare$

Упр 2 Пусть $F = F(X)$; $H_1, H_2 \le F$ и $|F:H_1| = |F:H_2|$. Тогда $H_1 \simeq H_2$.

Пусть $F = F(X)$, $H \le F$. Из т. 2 мы знаем, что H свободно порожд. мн-вом Y. $\Rightarrow$ $\exists$ изоморфизм $\tau : H \to H^* = F(Y^*)$, где $y\tau = y^*$ $\forall y \in Y$ и H^* – свободная группа с базисом Y^*.

<u>Т. 3</u> Пусть $G = \langle X \mid R \rangle$ – представление группы G и $\varphi : F(X) \to G$ – соотв. гомоморфизм. Пусть $K \le G$ и H – её полный прообраз при гом-зме φ, а S – шрайерова трансверсаль F по H. Тогда $K = \langle Y^* \mid R^* \rangle$, где

$$R^* = \{(s^{-1} r s)\tau \mid s \in S, r \in R\}.$$

Д-во: Пусть $N = R^F$ — норм. замыкание R в F. Тогда $K \simeq H/N \simeq H^*/N\tau$. В силу предл. 10.1.2 (предл 2 из прошлой лекции) N состоит из конечных произведений эл-тов вида $f^{-1}r^{\varepsilon}f$, где $f \in F$, $r \in R$, $\varepsilon = \pm 1$. Пусть $f = sh$, где $s \in S$, $h \in H$. Тогда $(f^{-1}r^{\varepsilon}f)\tau = (h^{-1}s^{-1}r^{\varepsilon}sh)\tau = (h^{-1})\tau(s^{-1}r^{\varepsilon}s)\tau \cdot h\tau \Rightarrow N\tau = (R^*)^{H^*}$ ■

Опр 2 Если для кон. порожд. гр. G найдётся представление (генер. код) $G = \langle X \mid R \rangle$ такой, что $|R| < \infty$, то G наз-ся **конечно определенной** (или **конечно представленной**).

Следствие Подгруппа конечного индекса в конечно представленной группе конечно представл.

Упр 3 Δ - то следствие.