

3. Коммутант и разрешимые группы.

Напомним, что **коммутатором** элементов $x, y \in G$ наз-ся элемент $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Предл 1 Если $x, y, z \in G$, то

1) $[x, y]^{-1} = [y, x]$, 2) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$,

3) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$.

Δ -во: прямая проверка \square

Опр 1 Пусть $L, M \subseteq G$. **Взаимный коммутант**

L и M наз-ся **подгруппами** $[L, M] = \langle [x, y] \mid x \in L, y \in M \rangle$.

Подгруппа $G' = [G, G]$ наз-ся **коммутантом** группы G .

Зам. Коммутант гр. G порождается коммутаторами,
но не обязательно состоит только из них см. пример 3.29.
из [КМ].

Предл 2 Пусть $H, K \leq G$. Тогда

- 1) $[H, K] = [K, H]$, 2) $[H, K] \leq \langle H, K \rangle$,
- 3) H нормализует $K \Leftrightarrow [H, K] \leq K$,
- 4) если H абелева, $N \leq G$, то $[HN, HN] \leq N$.

Д-во: 1) вытекает из предл 1 п. 1. 2) из п. 2 того
же предл. 3) см. 3-е определ. норм. подгруппы
4) легко док-ся с помощью 3) и п. 2 предл 1 \square

Заметим также, что из определ. гомоморфизма

вытекает, что $[x^\varphi, y^\varphi] = [\underline{x}, \underline{y}]^\varphi \quad \forall x, y \in G$ и
 для любого гом-зема $\varphi: G \rightarrow G, x \mapsto \underline{x}$. Поэтому
 $[H^\varphi, K^\varphi] = [H, K]^\varphi \quad \forall H, K \leq G$ и $[G, G] = [\underline{G}, \underline{G}]$,
 если $\underline{G} = G^\varphi$. В частности, G' - характеристическая подгруппа.

Лемма 1.1 Пусть $K \trianglelefteq G$. Группы G/K абелевы $\Leftrightarrow G' \leq K$

Доказательство: \Rightarrow) Пусть $\pi: G \rightarrow \underline{G} = G/K$ - канон. гом-зем.

Тогда $[G, G]^\pi = [\underline{G}, \underline{G}] = \underline{1}$, т.е. \underline{G} абелева.

Поэтому $G' \leq \text{Ker } \pi = K$

\Leftarrow) Пусть $\underline{G} = G/G'$ и $\pi: G \rightarrow \underline{G}$ - канон. гом-зем.

Тогда $[\underline{G}, \underline{G}] = \underline{[G, G]} = \underline{1} \Rightarrow \underline{G} = G/G'$ абелева.

Т. 2 ① Группа A_n порождается циклами длины 3 при $n \geq 3$ и произведениями как незав. транспозиций при $n \geq 5$.

② Группа $A_n = \langle (123)^g \mid g \in A_n \rangle$ при $n \geq 5$.

③ $[S_n, S_n] = A_n$ при любом n .

④ $[A_n, A_n] = A_n$ при $n \geq 5$ +
$$\begin{cases} [A_n, A_n] = K_n \text{ и} \\ [A_n, A_n] = I \text{ при } n \leq 3 \end{cases}$$

Д-во: 1) Так S_n порожд. транспозициями при $n \geq 2$, то A_n порождается парами транспозиций (не обязательно незав). Поэтому ① вытекает из след. леммы-л. (i) $(ij)(jk) = (ikj)$, (ii) $(ij)(kl) = (jkl)(ijk)$ и (iii) $(ij)(jk) = ((ik)(lm))((kl)(lm))$, здесь ij, jk, l — разл. символы

(2) $\sigma \mapsto h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ i & j & k & l & m & \dots \end{pmatrix} \in S_n : (123)^h = (ijk)$
 Если $\text{sgn } h = 1$, то $g = h \in A_n$, если $\text{sgn } h = -1$, то
 $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i & j & k & m & l \end{pmatrix} \in A_n$ — искомого.

(3) При $n=1$ очевидно. При $n \geq 2$ $|S_n : A_n| = 2 \Rightarrow$
 S_n / A_n абелева $\Rightarrow [S_n, S_n] \leq A_n$. При $n=2$ $A_n = 1$.
 При $n=3$ S_3 неабелева $\Rightarrow [S_3, S_3] \neq 1 \Rightarrow$
 $[S_3, S_3] = A_3$. В частности, цикл $(123) \in A_3$
 порождается коммутаторами σ -ов из S_3 . Аналогично
 любой цикл (ijk) порождается 3 коммутаторами σ -ов из S $\langle i, j, k \rangle \subseteq S_n$ при $n \geq 3$.

(4) В A_4 есть ровно две нетрив. совещ. норм. подгр. K_4 (подгруппа Клейна). Т.к. A_4 абелева, а A_4/K_4 абелева, то $[A_4, A_4] = K_4$. В частности, все нетрив. незав. циклов (типа $(12)(34)$) из A_4 лежат в коммутанте. Поэтому любая нетрив. транзитивная перм. в A_n при $n \geq 4$. Но при $n \geq 5$ они порож. A_n по лемме 1. \square

Т.3 Пусть F -поле, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- (1) $SL_n(F)$ порождается транзитивными $t_{ij}(\alpha)$, $\alpha \in F$
- (2) $SL_n(F) = \langle t_{ij}(\alpha)^g \mid j=2, \dots, n, \alpha \in F, g \in SL_n(F) \rangle$.

Легко проверить след. ф-лу:

$$(*) [t_{ik}(\alpha), t_{kj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta) \text{ при разл. } i, j, k.$$

В силу её достаточно проверить для $n \geq 3$.
Пусть $n=2$. У нас

$$[t_{12}(\alpha), \text{diag}(\beta_1, \beta_2)] = t_{12}\left(\alpha\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} - 1\right)\right).$$

При $|F| > 2$ можно взять $\beta_1 \neq \beta_2$ и все показано в (3).

При $|F| > 3$ можно взять $\beta_1 \neq \beta_2$ и $\beta_1\beta_2 = 1$, что завершает доказ-во (4) ~~и~~

Упр 1 Вычислить коммутаторы $GL_2(2) = SL_2(2)$
и $SL_2(3)$.

Опр 2 Положим $G = G^{(0)}$, $G^{(1)} = G'$. Группы $G^{(k)} = (G^{(k-1)})'$ при $k \geq 2$ наз-ся **k -ым коммутантом** группы G .

Пример $G = S_4$, $G^{(1)} = A_4$, $G^{(2)} = K_4$, $G^{(3)} = 1$.

$G = S_n$, $G^{(1)} = A_n = G^{(2)} = G^{(3)} = \dots = G^{(\infty)} = A_n$ при $n \geq 5$.

Опр 3 Группа G наз-ся **разрешимой**, если $\exists m \in \mathbb{N} : G^{(m)} = 1$.

Л. 4 Группа разрешима тогда и только тогда когда выполняется одно из экв-ных утв-².

(1) $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_k = 1$, $G_i \trianglelefteq G$ и G_{i-1}/G_i абелева $\forall i=1, \dots, k$

(2) $G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_t = 1$, $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$ и G_{i-1}/G_i абелева $\forall i=1, \dots, t$.

Лемма 1. Пусть $(G^{(i)})^\varphi = (G^\varphi)^{(i)}$ для любого i и φ ,
 то $G^{(i)} \trianglelefteq G \quad \forall i=1 \dots m$. В силу $5.1 \quad G^{(i-1)} / G^{(i)}$
 абелева. Поэтому из разрешимости $G \Rightarrow (1)$.

Очевидно, что из (1) \Rightarrow (2). Пусть, наоборот,
 в G есть под (2). Тогда снова в силу
 п. 1 $G^{(1)} = G' \leq G_1$. Далее $G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}] \leq$
 $[G_1, G_1] \leq G_2$ и т.д. Таким образом,

$$G^{(i)} \leq G_i \quad \forall i=1 \dots t \Rightarrow G^{(t)} = 1 \quad \square$$

Следствие Пусть $K \trianglelefteq G$. Группа G разрешима
 $\Leftrightarrow K$ и G/K разрешимы. Упр 2 Д-ль следствия

Упр 3 Доказать, что группы невырожденных трех-
зольных матриц над произвольным полем разделима.

Напомним, что для группы G её **центр**

$$Z(G) = \{ z \in G \mid zg = gz \ \forall g \in G \}.$$

— это всегда нормальная абелева подгруппа в гр. G ,

Опр 4 Положим $Z_0 = Z_0(G) = 1$, $Z_1 = Z_1(G) = Z(G)$

и $Z_k(G)$ — полный прообраз в G группы

$Z(G/Z_{k-1}(G))$ при $k \geq 2$. Ряд нормальных подгрупп

$$1 = Z_0 \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_k \leq \dots$$

наз-ся **верхним** центральным рядом гр. G .

Группа G наз-ся **нильпотентной**, если $\exists n \in \mathbb{N}$: $Z_n(G) = G$.

Пред 3 Нильпотентная группа разрешима.

Δ во: Выходит из определения и п. 2 Теоремы 4.

Упр 4 Привести пример неильпотентной разр. группы.

Т. 5 (1) Если G — конечная p -группа и $K \leq G$, то $Z(G) \cap K \neq 1$. В частности, $Z(G) \neq 1$

(2) Конечная p -группа нильпотентна и, в частности, разрешима

Δ во: Группа G действует сопряжением на группе K . По т. 9.6.1 из [ВЛМ] группа людей порядка 0; это действие делит порядок $G \Rightarrow |O_i| = p^{k_i}$, где $k_i \geq 0$. Мн-во K есть объединение

непересекающихся орбит O_1, \dots, O_t . Поэтому
 $p^k = |K| = p^{k_1} + \dots + p^{k_t}$. Так Δ перестановочна с модулем
 m -ом из \mathbb{F} числит в K , то $|O_1| = 1$, если $1 \in O_1$.
 Но тогда среди остальных орбит должны быть и
 группы орбит размера 1. Если x элемент из
 такой орбит, то $x \in Z(\mathbb{F}) \cap K$ и все показано.

(2) Поскольку $\mathbb{F}/\mathbb{Z}_k(\mathbb{F})$ снова p -группа $\forall k$,
 то инвариант \mathbb{F} вытекает из (1) \square

Упр 4 Δ — то инвариантная группа верхних
 центральных n -у из поля.