

4. Ряды подгрупп и теорема Жордана-Тейлзера.

Опр 1 Назовем **рядом** группу G (конечную)

цепочку вложенных групп в группу подгрупп:

$$(1) \quad 1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_{n-1} \leq G_n = G$$

число n наз-ся **длиной** ряда.

Если один ряд гр. G содержит все члены другого, то первый наз-ся **упрощением** второго.

Если $G_i \trianglelefteq G \quad \forall i = 0, \dots, n-1$, то ряд (1) наз-ся

нормальным. Если $G_i \leq G_{i+1} \quad \forall i = 0, \dots, n-1$, то

ряд наз-ся **субнормальным**. Фактор-группы G_{i+1}/G_i

$i = 0, \dots, n-1$, называют **факторами** (суб)нормального ряда (1). Непротивительный субнорм. ряд = **композиционный**.

Зам. Иными словами, субнорм. ряд (1) — **композиционный**,
 если все его факторы — **простые группы**, т.е. не
 имеют нетрив. собствен. нормальных подгрупп.

Примеры 1. Все факторы ряда

$$1 < \mathbb{Z}_p < \mathbb{Z}_{p^2} \dots < \mathbb{Z}_{p^{n-1}} < \mathbb{Z}_{p^n} = G$$

циклические порядка p ,

2. Группа верхнетр. $n \times n$ $G = T_n(F)$ обладает
 нормальным рядом

$$1 = \cup T_n^0(F) \leq \dots \leq \cup T_n^2(F) \leq \cup T_n^1(F) \leq T_n(F) = G$$

$$\text{где } \cup T_n^m(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & x \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & 1 & & x \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \right\}_m \in M_n(F).$$

Упр 1 Докажите, что гр. S_4 обладает свойством
нормального ряда с циклическими факторами,
но не имеет норм. ряда с этим свойством.

Напоминание: Вторая и третья т. о норм. рядах
(см. т. 9.4.2 и 9.4.3 из [ВЛМ]).

$$\text{II: } K \leq G, H \trianglelefteq G \Rightarrow K^H/H \cong K/H \cap K.$$

$$\text{III: } K \leq H \leq G \text{ и } K, H \trianglelefteq G \Rightarrow G/K / H/K \cong G/H.$$

Предл 1 (лемма Делекина) Пусть $A, B, C \leq G$
и $A \leq B$. Тогда $AC \cap B = A(C \cap B)$ и
 $CA \cap B = (C \cap B)A$.

Л-во: $x \in A \cap B \Rightarrow x = ac \in B$, где $a \in A, c \in C \Rightarrow$
 $c = a^{-1}x \in C \Rightarrow x \in A(C \cap B) \Rightarrow A \cap B \subseteq A(C \cap B)$.
 Обратно, $x \in A(C \cap B) \Rightarrow x = ac$, где $a \in A, c \in C \cap B$
 $\Rightarrow x \in A \cap B$. Второе равенство док-ся аналогично \square

Предл 2 Если $M \leq K \leq G$ и $H \leq G$, то $KH /_{MH} \cong K /_{M(H \cap K)}$.

Л-во: В силу второй леммы о гом-ках и включении
 $M \leq K$ имеем $KH /_{MH} = K(MH) /_{MH} \cong K /_{MH \cap K} =$
 $\stackrel{\text{предл 1}}{\cong} K /_{M(H \cap K)}$.

л. 1 Пусть G -группа с (суб)нормальным рядом (1)

① Если $H \leq G$, то пересекя H с подгруппами из (1),
 получаем (суб)нормальный ряд в H :

(2) $1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = H$, где $H_i = H \cap G_i, i=0..n$

и фактор H_{i+1}/H_i изоморфен подгруппе фактора G_{i+1}/G_i .

(2) Если $H \trianglelefteq G$, то взяв образы членов ряда (1) при канон. гом-зме $G \rightarrow \bar{G} = G/H$, получим

(суб)нормальный ряд в \bar{G} :

(3) $1 = \bar{G}_0 \leq \bar{G}_1 \leq \dots \leq \bar{G}_n = \bar{G}$, где $\bar{G}_i = G_i H / H, i=0..n$,

причем фактор \bar{G}_{i+1}/\bar{G}_i — гомоморфный образ фактора G_{i+1}/G_i .

Л-ВО: Соотношения $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$ и $\bar{G}_i \trianglelefteq \bar{G}_{i+1}$ для суб-норм. рядов и $H_i \trianglelefteq H, \bar{G}_i \trianglelefteq \bar{G}$ для норм. рядов легко проверяются $\forall i=0..n-1$. Используя т-м 2 о гом-змах и предл 2 имеем

$$H_{i+1}/H_i = H_{i+1}/H \cap G_i = H_{i+1}/H_{i+1} \cap G_i \cong H_{i+1}G_i/G_i \leq G_{i+1}/G_i$$

$$\overline{G_{i+1}/G_i} \cong G_{i+1}H/G_iH \xrightarrow{\text{пр. 12}} G_{i+1}/G_i(G_{i+1} \cap H) \xrightarrow{\text{III}} G_{i+1}/G_i/G_i(G_{i+1} \cap H)/G_i$$

что и требовалось доказать \square

Очевидно, что каждая конечная группа обладает некоторым композиционным рядом. Как связать два таких ряда?

Пр 2 Два (суб)норм. ряда наз-ся **изоморфич.**, если они имеют одинаковое число факторов и между их факторами суш-т такое взаимно однознач. соотв-е, при которых соотв. факторы изоморфич.

Пример Пусть $0 < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_4 < \mathbb{Z}_{12}$ и $0 < \mathbb{Z}_3 < \mathbb{Z}_6 < \mathbb{Z}_{12}$
изоморфны, т.к. $\mathbb{Z}_2/\mathbb{0} \simeq \mathbb{Z}_6/\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_3/\mathbb{0}$.

Т. 2 (Шрайер) В категории группические категории
два (суб)нормальных ряда обладают изоморфными
(суб)нормальными уплотнениями.

Л-во. Пусть в G заданы два (суб)норм. ряда

$$(4) \quad 1 = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$$

$$(5) \quad 1 = B_0 \leq B_1 \leq \dots \leq B_n = G$$

Уплотнения категорий промежутков $A_i \leq A_{i+1}$ первого
ряда вставляя, и готовя. при помощи второго ряда
и наоборот, промежутки $B_j \leq B_{j+1}$. По лемме

$$A_i = C_{i0} \leq C_{i1} \leq \dots \leq C_{in} = A_{i+1}, \text{ где } C_{ij} = (A_{i+1} \cap B_j) A_i \quad \text{и}$$

$$B_j = D_{j0} \leq D_{j1} \leq \dots \leq D_{jm} = B_{j+1}, \text{ где } D_{ji} = (B_{j+1} \cap A_i) B_j.$$

Очевидно, что C_{ij} и D_{ji} нормальны, если A_i и B_j были нормальны. Кроме того, оба уплотнения имеют т.н. факторов. Осталось проверить, что $\forall i, j$ выполняется

$$C_{i,j+1}/C_{ij} \simeq D_{j,i+1}/D_{ji}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} C_{i,j+1}/C_{ij} &= (A_{i+1} \cap B_{j+1}) A_i / (A_{i+1} \cap B_j) A_i \stackrel{\text{прел. 2}}{\simeq} \\ &\simeq (A_{i+1} \cap B_{j+1}) / (A_{i+1} \cap B_j) \underbrace{(A_i \cap B_{j+1})}_{= A_i \cap (A_{i+1} \cap B_{j+1})}. \end{aligned}$$

Аналогично, $D_{j,i+1} / D_{ji} = (B_{j+1} \cap A_{i+1}) B_j / (B_{j+1} \cap A_i) B_j$
 $\approx (B_{j+1} \cap A_{i+1}) / (B_{j+1} \cap A_i) (B_j \cap A_{i+1}) \approx C_{i,j+1} / C_{ij} \quad \square$

Из Т.2 сразу вытекает

Т.3 (теорема Моргана-Тёлогера) любые два композиционных ряда группы изоморфны.

Замечание Напомним, что мы рассматривали только ряды с конечным числом подгрупп. Ясно, что в каждой конечной группе композиц. ряд всегда есть. С др. стороны, несомненно перефразируя 1-во Т.1,2,3 мы скажем, что любой счетный ряд вида:

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n \trianglelefteq \dots \quad G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

Упр 2 Сделайте это!

Теорему Ж.-Г. иногда сравнивают с осн. т-мой арифметики. Дей-но, касаясь конечная группа имеет композиционный ряд, члены которого - простые группы, причём различные композ. ряды изоморфны в смысле указ. выше определения, но есть и важная разница.

Неизоморфные группы могут иметь изоморфные композиционные ряды.

Пример. $S_3 \supseteq A_3 \supseteq 1$ и $\mathbb{Z}_6 \supseteq \mathbb{Z}_3 \supseteq 0$.