6. Группы подстановок

В дальнейшем, Ω — мн-во, запись $G \leq Sym(\Omega)$ означает, что гр. G — группа подстановок мн-ва Ω, а запись $G \curvearrowright \Omega$, что гр. G действует на мн-ве Ω, т.е. задан гомоморфизм $\sigma : G \to Sym(\Omega)$.

<u>Опр 1</u> Пусть $G \leq Sym(\Omega)$, $G' \leq Sym(\Omega')$. Группы (подстановок) G и G' наз-ся **подстановочно изоморфными** (или **подобными**), если сущ-ют биекция $\mu : \Omega \to \Omega'$ и (групповой) изоморфизм $\varphi : G \to G'$ такие, что

(1) $(\alpha^x)\mu = (\alpha\mu)^{x\varphi}$ $\forall \alpha \in \Omega$, $\forall x \in G$.

Иными словами, группы подстановок G и G' „одинаковые" с точностью до переобозначения символов.

<u>Зам.1</u> Подстановочный изоморфизм и изоморфизм групп не одно и то же (это морфизмы в разных категориях!).

<u>Пример</u> $G = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq S_4$ и $G' = \{e, (12), (34), (12)(34)\} \leq S_4$. Тогда $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \simeq G'$ (как абстрактные группы), но G и G' не подобны друг другу (как группы подстановок), т.к. $\forall \alpha \in \Omega$ $\exists x \in G$: $\alpha^x = 1$, но $(\alpha\mu)^{x\varphi} = 1$ только, если $\alpha\mu \in \{1, 3\}$ (G транзитивна, а G' — нет!)

Напомним (см опр 5 из AN-22), что если группа G действует на Ω и Ω', т.е. заданы гом-змы $\sigma: G \to Sym(\Omega)$ и $\sigma': G \to Sym(\Omega')$, то эти действия эквивалентны, если $\exists$ биекция $\lambda: \Omega \to \Omega'$ такая, что

$$(2) \qquad (\alpha^{x\sigma})\lambda = (\alpha\lambda)^{x\sigma'} \quad \forall \alpha \in \Omega \ \forall x \in G.$$

Упр 1 а) Если σ и σ' — эквивалентные действия G на Ω и Ω', то группы $G\sigma$ и $G\sigma'$ подстановочно изоморфны

б)** Обратное неверно.

в) $G \overset{\sigma}{\curvearrowright} \Omega$ и $G \overset{\sigma'}{\curvearrowright} \Omega$, то $\underset{\text{экв-ны}}{\sigma \sim \sigma'}$, если $\exists c \in Sym(\Omega)$: $x\sigma' = c^{-1} x \sigma c$.

Напомним, что гр. $G \le Sym(\Omega)$ транзитивна (соотв-но G действует на Ω транзитивно), если $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ $\exists x \in G : \alpha^x = \beta$.

<u>Т.1</u> Пусть $G \le Sym(\Omega)$ транзитивна. Тогда

а) стабилизаторы G_α и G_β сопряжены в G $\forall \alpha, \beta \in \Omega$;

б) G подобна группе правых сдвигов на эл-ты G на мн-ве $\Omega' = G/G_\alpha$ правых смежных классов по (любому) стабилизатору точки α.

<u>Д-во:</u> а) Т.к. G транз. $\Rightarrow \exists x : \alpha^x = \beta \Rightarrow (G_\alpha)^x = G_\beta$ (проверьте!)

б) вытекает из Т.3 в AN-22 и утв-я упр (а) здесь $\boxed{}$

Т.2 Пусть $G \le Sym(\Omega)$ и $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$ — разбиение Ω на орбиты группы G. Тогда G подобна подгруппе прямого произведения $\prod\limits_{i\in I} G^{\Omega_i}$, где $\forall i \in I$ $G^{\Omega_i} = \{x^{\Omega_i} \mid x \in G\}$ и $x^{\Omega_i} \in Sym(\Omega_i)$, действующая по правилу $\alpha^{x^{\Omega_i}} = \alpha^x$ $\forall \alpha \in \Omega_i$ и $\forall x \in G$. В частности, G^{Ω_i} транз. гр $\forall i \in I$.

Д-во: Отоб-е $x \mapsto (x^{\Omega_1}, x^{\Omega_2}, \dots, x^{\Omega_t})$ — искомое вложение ∎

Упр 2 Д-ть т-му 2 полностью.

Опр 2 Группа $G \le Sym(\Omega)$ наз-ся k-кратно транзитивной, если $\forall$ упоряд. k-ок различных

эл-тов из Ω $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ $\exists\, x \in G$:
$(\alpha_1^x, \dots, \alpha_k^x) = (\beta_1, \dots, \beta_k)$.

<u>Зам</u> $\alpha_i \neq \alpha_j$ и $\beta_i \neq \beta_j$ $\forall\, i, j \in \{1, \dots, k\}$!

<u>Предл 1</u> Группа S_n n-кратно транзитивна, а группа A_n $(n-2)$-кратно транзитивна $\forall\, n \geq 3$.

Очевидно, что G – k-кратно-транз $\Rightarrow$ G – m-кратно транз. $\forall\, m \leq k$.

<u>Предл 2</u> Группа $PSL_n(F) \simeq SL_n(F) / Z(SL_n(F))$, $n \geq 2$
– проективная специальная линейная группа
2-транзитивна на точках $(n-1)$-мерного проектив.

ного пр-ва, т.е на одномерных подпр-вах в F^n.

<u>Д-во:</u> $\forall$ 2 пар (v_1, v_2) и (w_1, w_2) л.н. в-ров и F^n найдется м-ца $T \in GL_n(F)$: $v_i^{x} = w_i$, $i=1,2$.

полагая $\tilde{T} = \frac{1}{\det T} T$, имеем $v_i^{x} = w_i'$, где w_i' лежит в том же одномерном подпр-ве с w_i, $i=1,2$.

Поэтому x — образ $\tilde{T}$ в $PSL_n(F)$ — искомый элемент (см. файл AN-43 о группе проективных преобразований) $\blacksquare$

Смысл т. 2 в том, что группу подстановок G можно рассматривать как подгруппу в прямом произведении транзитивных групп.

А можно ли „упростить" транзитивную группу?

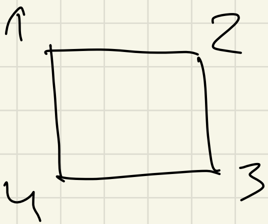
<u>Опр 3</u> Пусть $G \leq Sym(\Omega)$ транзитивна.

Разбиение $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$ называется разбиением на блоки, а $\Sigma = \{\Delta_i, i \in I\}$ – системой блоков (или системой импритивности), если $\forall x \in G$ $\forall i \in I$ $\Delta_i^x = \Delta_j$ для некоторого $j \in I$.

<u>Примеры</u> 0) $\{\{\alpha\} \mid \alpha \in \Omega\}$ и $\{\Omega\}$ — системы блоков, они наз-ся тривиальными.

<u>Опр 4</u> Транзитивная группа $G \leq Sym(\Omega)$, $|\Omega| \geq 3$, наз-ся импримитивной, если имеется нетрив. разбиение на блоки, и примитивной в противном случае.

Пример 1) $G \leq Sym(\Omega)$ - группа симметрий квадрата, т.е. $G = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432), (13), (24)\}$.



Система блоков $\Delta_1 = \{1, 3\}$ и $\Delta_2 = \{2, 4\}$.

Предл 3 Пусть $G \leq Sym(\Omega)$ транзитивна, $\Sigma = \{\Delta_i \mid i \in I\}$ система блоков и $\Delta \in \Sigma$. Тогда

а) $G_{\{\Delta\}} = \{x \in G \mid \Delta^x = \Delta\} \leq G$ и $|\Sigma| = |G : G_{\{\Delta\}}|$;

б) $|\Delta| = |G_{\{\Delta\}} : G_\alpha|$, где $\alpha \in \Delta$. В частности, $|\Delta_i| = |\Delta_j|$ $\forall i, j \in I$.

в) если $G_\alpha \leq K \leq G$, то $\exists$ система блоков Σ : $K = G_{\{\Delta\}}$, где $\alpha \in \Delta \in \Sigma$.

г) G примитивна $\iff$ G_α максимальна в G.

Лемма $\Delta \subseteq \Sigma$ — блок (некоторой системы блоков Σ)

$\Leftrightarrow \Delta \cap \Delta^x = \Delta$ или $\varnothing$ $\forall x \in G$.

Д-во: $\Rightarrow$) из опр. Σ, $\Leftarrow$) $\Sigma = \{\Delta^x \mid x \in G\}$ — система блоков $\blacksquare$

Д-во предл 3: а) б) Упр 3.

в) Пусть $H = G_\alpha$. По т 1. б) можно считать, что $\Omega = G/H$.

Тогда $K = \bigcup_{x \in K} Hx = \Delta \subseteq \Omega$. Имеем $\Delta \cap \Delta^x =$

$= K \cap Kx = K$ или $\varnothing$ по т. Лагранжа $\Rightarrow \Delta$ - блок.

системы блоков $\Sigma = \{Kx \mid x \in G\}$.

г) Если $G_\alpha = H < K < G$, то Σ из п. в) - нетрив система блоков $\Rightarrow G$ импримитивна.

Если G импримитивна, то $G_\alpha < G_{\{\Delta\}} < G$ $\blacksquare$

Предл 4 Пусть $G \le Sym(\Omega)$ транзитивна, $H \trianglelefteq G$. Тогда орбиты H — система блоков гр. G. В частности, если G примитивна, а $H \ne 1$, то H транзитивна.

Д-во: Пусть $\Delta = \alpha^H = \{\alpha^h \mid h \in H\}$. Т.к. $\alpha^{hx} = \alpha^{xh'}$ $\forall x \in G$, то $\Delta^x = \{\alpha^{x} \mid h' \in H\}$ — снова орбита гр. H. Если G — примитивна, а H нетривиальна, то система блоков, состоящая из орбит гр. H может состоять только из одного эл-та — всего Ω ■

Предл 5 Если гр G k-кратно транзитивна при $k \geq 2$, то G примитивна.

Д-во: Если G импримитивна, то достаточно взять α_1, α_2 из одного блока, а β_1 и β_2 из разных ■

<u>Опр5</u> Пусть K — группа, $H \leq Sym(\Sigma)$. Мн-во $B = Fun(\Sigma, K) = \{f : \Sigma \to K\}$ всех ф-ций из Σ в K — группа отн-но операции $(f \cdot g)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$ $\forall f, g \in B$ и $\alpha \in \Sigma$. Группа H действует на B автоморфизмами по правилу $f^y(\alpha) = f(\alpha^{y^{-1}})$ $\forall f \in B, y \in H, \alpha \in \Sigma$. (Подстановочным) сплетением $K \wr H$ группы K посредством гр. H наз-ся полупрямое произведение $H \ltimes B$, где умножение имеет вид:

$$xf \cdot yg = xy \cdot f^y g,$$ где $x, y \in H$, $f, g \in B$.

Если $\Sigma = H$ и H действует (на себе) <u>левыми</u> сдвигами, то сплетение наз-ся регулярным или стандартным. Группа B — база сплетения.

Зам. Если $|\Sigma| = n$, то $|K \wr H| = |K|^n \cdot |H|$.

Дей-но, $|Fun(\Sigma, K)| = |K|^n$. В этом случае $B = K^n$ — декартово пр-е гр K и операция может быть записана так:

$$(x; g_1, \ldots, g_n)(y; h_1, \ldots, h_n) = (xy; g_{i_1} \cdot h_1, \ldots, g_{i_n} \cdot h_n),$$

где $y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & & i_n \end{pmatrix}$.

Пример Пусть $K \simeq H = S_2$, если $K = \langle a \rangle$, $H = \{e, (12)\}$, то $B = K \times K = \{(1,1), (1,a), (a,1), (a,a)\}$.

$K \wr H = H \ltimes B = \{(e; 1,1), (e; 1,a), (e; a,1), (e; a,a), ((12); 1,1), ((12); 1,a), ((1,2); a,1), ((1,2); a,a)\}$.

Найдем g^2 для $g=((12);1,a)$. Имеем

$((12);1,a)((1,2);1,a)=(e;a\cdot 1,1\cdot a)=(e;a,a)$

$g^2\cdot g^2=(e;a,a)\cdot(e;a,a)=(e;a\cdot a,a\cdot a)=(e;1,1)$.

<u>Упр 4</u> Д-те, что $S_2\wr S_2\cong D_8$.

<u>Т. 3</u> (теорема Калужнина-Краснера об изоморфном вложении Фробениуса). Пусть $K\trianglelefteq G$ и $H=G/K$.
Тогда существует изоморфное вложение $\varphi: G\to K\wr H$ гр G в регулярное сплетение $K\wr H$, при котором $K\varphi=G\varphi\cap B$, где $B=Fun(H,K)$ - база сплетения.

<u>Д-во:</u> См. т. 6.2.8 из [KM] и док-во далее

Д-во: Пусть $\psi: G \to H = G/K$ — кан. гом-зм, $x \mapsto \overline{x} = x^\psi$.

$s: H \to G$ — выбирающая (представители пр. см. классов) ф-ция, $u \mapsto s_u$, $\forall u \in H$. Для любого $x \in G$ опр-м эл-т f_x баз. сплетения $B = Fun(H, K)$:

$$f_x(u) = s_{\overline{x}u}^{-1}\, x\, s_u, \quad u \in H. \qquad (*)$$

Искомое вложение $\varphi: G \to K \wr H$ опр-ся так:

$$x^\varphi := \overline{x} \cdot f_x. \qquad (**)$$

Заметим, что сплетение $K \wr H$ — регулярное $\Rightarrow$ H действует на себе левыми сдвигами, т.е. $u^v = v^{-1} \cdot u$ $\forall u, v \in H$. Поэтому в нашем случае при сопряжении

$$f_x^v(u) = f_x(u^{v^{-1}}) = f_x(v \cdot u). \qquad (***)$$

Д-см, что $\varphi: G \to K \wr H$ — гом-зм. Имеем,

$x^\varphi \cdot y^\varphi = \bar{x} f_x \cdot \bar{y} f_y = \bar{x}\bar{y} \cdot f_x^{\bar{y}} \cdot f_y \underset{?}{=} (xy)^\varphi = \overline{xy} f_{xy}$,

т.е нужно показать, что $\forall u \in H$ $f_{xy}(u) = f_x^{\bar{y}}(u) \cdot f_y(u)$.

Перепишем ф-лу $(*)$ так $S_{\bar{z}u} \cdot f_z(u) = z \cdot S_u$, $z \in G$, $u \in H$.

Имеем $S_{\overline{xy}u} f_{xy}(u) = xy \cdot S_u = x \cdot S_{\bar{y}u} \cdot f_y(u) =$

$= S_{\bar{x}\bar{y}u} \cdot f_x(\bar{y}u) \cdot f_y(u) \underset{(***)}{=} S_{\overline{xy}u} \cdot f_x^{\bar{y}}(u) f_y(u)$,

что и требовалось. Кроме того, если $x^\varphi = 1$, то

$\bar{x} = \bar{1}$ и $f_x = id_H \Rightarrow \ker\varphi = 1$. Последнее, если

$x \in K$, то $x^\varphi = \bar{x} f_x = f_x \in B$, т.е $K\varphi = G\varphi \cap B$ ∎

<u>Упр 5</u> Используя вложение Фробениуса, вложите группы $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ в $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$ и сравните результаты.

Пусть $G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$. Если $\Delta \in \Sigma$ – блок, то $G_{(\Delta)} = \{x \in G : \alpha^x = \alpha \ \forall \alpha \in \Delta\}$

Имеем $G_{(\Delta)} \trianglelefteq G_{\{\Delta\}}$. Положим $G^{\Delta} = G_{\{\Delta\}} / G_{(\Delta)}$.

Иными словами G^{Δ} – образ $G_{\{\Delta\}}$ при гомоморфизме в $\mathrm{Sym}(\Delta)$ по правилу $x \mapsto x^{\Delta}$, где $\alpha^{x^{\Delta}} = \alpha^{x}$ $\forall \alpha \in \Delta$ $\forall x \in G$, а $G_{(\Delta)}$ – это ядро это гом-зма.

Группа G действует на Σ, т.е. задан гом-зм $\sigma : G \to \mathrm{Sym}(\Sigma)$. Обозначим через G^{Σ} – образ σ а через $G_{\Sigma} = \mathrm{Ker}\,\sigma$. Тогда $G_{\Sigma} = \bigcap_{\Delta \in \Sigma} G_{\{\Delta\}}$ и согласно т-ме о гом-змах $G^{\Sigma} \cong G / G_{\Sigma}$.

Теперь несложно док-ть след. базовую теорему.

T. 4 Пусть $G \le Sym(\Omega)$ транзитивна, Δ — блок системы блоков Σ. Тогда G изоморфна подгруппе подстановочного сплетения $K \wr H$ групп $K = G^{\Delta} \le Sym(\Delta)$ и $H = G^{\Sigma} \le Sym(\Sigma)$.

Д-во: Пусть $\Sigma = \{\delta = \Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n\}$. Для $x \in G$ положим $\overline{x} = x^{\sigma}$, где $\sigma : G \to Sym(\Sigma)$.

Т.к. G транз, то $\forall i = 1..n$ $\exists g_i \in G : \Delta^{g_i} = \Delta_i$.

Зафикс. некот. и подстановки g_i из G с этим св-м.

Тогда $\forall \alpha \in \Omega$ $\exists \delta \in \Sigma : \alpha = \delta^{g_i}$ и $\forall x \in G$ $\forall i \in \Sigma$ $\exists x_i \in G^{\Delta} : \delta^{g_i x} = \delta^{x_i g_{i^{\overline{x}}}}$. Пусть $f_x : \Sigma \to G^{\Delta}$ по правилу $f_x(i) = x_i$. Тогда

подстановочное вложение задаётся след. отображениями: $\mu: \Omega \to \Sigma \times \Delta$, $\alpha \mapsto (i, \delta)$, где $\alpha = \delta^{g_i}$ и $\varphi: G \to G^\Delta \wr G^\Sigma$, $x \mapsto (\bar{x}, f_x)$.

Д-но, $(\alpha^x)\mu = \left((\delta^{g_i})^x\right)\mu = (\delta^{x_i g_{i^{\bar{x}}}})\mu$
$= (i^{\bar{x}}, \delta^{x_i})$. С др. стороны, $(\alpha^\mu)^{x\varphi} = (i, \delta)^{(\bar{x}, f_x)}$
$= (i^{\bar{x}}, \delta^{f_x(i)}) = (i^{\bar{x}}, \delta^{x_i})$ ■

__Упр 6__ Проверьте, что φ — инъективный гом-зм из G в $G^\Delta \wr G^\Sigma$.

__Упр 7__ Проведите соотв. вложения в примере группы симметрий квадрата, где $\Delta = \Delta_1 = \{1, 3\}$, $\Delta_2 = \{2, 4\}$ и $\Sigma = \{\Delta_1, \Delta_2\}$.