2. Конечно порожд. алгебры и лемма Нётер о нормализации

Здесь и далее A – комм. ассоц. алгебра с 1 над полем K. Напомним, что A конечно порожд., если A к. п. над K (как кольцо). Напомним также, что в силу т. Гильберта о базисе (т. 9.4.2 из AN-54) A – нётерово кольцо.

Предп., что A – алгебра без делителей нуля. Эл-ты $u_1, .., u_n$ алг. зависимы, если они алг. зав. над K и алг. независимы в противном случае.

Опр 1 Алг. нез. система эл-тов $\{u_1, \dots u_d\}$ наз-ся **базисом трансцендентности** алгебры A, если $\forall u \in A$ система $\{u_1, \dots u_d, u\}$ алг. зависима или, что равносильно, если алгебра A явл-ся алг. расширением подалгебры $K[u_1, \dots u_n]$.

Пример Мн-ны $x_1, \dots, x_n$ составляют базис трансцендентности алгебры мн-нов $K[x_1, \dots x_n]$.

Предл 1 Базис трансц. алг. A явл-ся также базисом трансцендентности её поля отношений $Q(A)$ (которое тоже рассм-ся как алгебра над K).

Д-во: Пусть $\{u_1, \dots u_d\}$ – б.т. алгебры A. Тогда

Эл-ты из $Q(A)$, алгебраич. над $K[u_1 .. u_d]$, — это эл-ты, алгебраич. над $K(u_1, .. u_d) = Q(K[u_1 .. u_d])$.

По т. 11.1.5 (из AN-71) их совокупность образует подполе M в $Q(A)$. Т.к. $A \subseteq M$, то $M = Q(A)$ ($Q(A)$ - это наим. поле, содерж. A) ∎

<u>Предл 2</u> Пусть $A = K[u_1 .. u_n]$. Тогда каждая максимальная алг. незав. подсистема системы $\{u_1 .. u_n\}$ — б.т. алгебры A.

<u>Д-во:</u> Р-м алг. зам. $\overline{M}$ подполя $M = K(u_1, .. u_d)$, где $\{u_1, .. u_d\}$ - макс. алг. нез. сист., в $L = Q(A)$. По условию $u_1, .. u_n \subseteq \overline{M} \Rightarrow \overline{M} = L \Rightarrow A \subseteq \overline{M}$ ∎

Следствие Каждая к.п. алгебра без делителей нуля имеет базис трансцендентности.

Предл 3 (лемма о замене). Пусть $\{u_1 .. u_d\}$ – б.т. алгебры A и $v \in A$ трансцендентен над $K[u_2, .. u_d]$. Тогда $\{v, u_2, .. u_d\}$ – б.т. алгебры A.

Упр 1 Д–ть предл. 3

Т. 1 Все базисы трансцендент. алгебры A (если они существ.) имеют одинаковую мощность.

Обозн: $\operatorname{tr.deg} A$ – степень трансцендентности,

Д–во: Использовать предл. 3. ∎

Т.2 (лемма Нётер о нормализации) В конечно порожд. алгебре $A = K[u_1, .. u_n]$ без делителей нуля над (бесконечным) полем K существует такой базис трансцендентности $\{v_1, .., v_d\}$, что алгебра A цела над $K[v_1, .., v_d]$.

Д-во: Д-ем т-му индукцией по n. Если $u_1, .. u_n$ алг. незав, то $\{u_1, .. u_n\}$ - искомый б.т. Пусть $f \in F[x_1 .. x_n]$: $f(u_1, .. u_n) = 0$ и $\deg f = m$.

1) Если f содержит x_n^m с ненул. коэф-м, то u_n цела над алгеброй $B = K[u_1, .. u_{n-1}]$. По пред. инд. в B есть б.т. $v_1, .. v_d$: B цела над $K[v_1, .. v_d]$. Тогда $\{v_1, .. v_d\}$ - искомый базис тран-сти и для A.

2) Пусть такого одночлена нет. Мы сведем этот случай к первому подходящей заменой:

(*) $x_i = y_i + a_i y_n$, $i = 1, \dots, n-1$ и $x_n = y_n$, $a_1, \dots, a_{n-1} \in K$.

Мн-н $g(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = f(y_1 + a_1 y_n, \dots, y_{n-1} + a_{n-1} y_n, y_n)$ имеет ту же степень m и содержит y_n^m с коэф-м, равным $g_0(0, \dots, 0, 1) = f_0(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)$, где f_0 и g_0 — старшие однородные состава. старшей степени f и g. Т.к. f_0 — ненулевой одн. мн-н, то он не может $\equiv 0$ при $x_n = 1$. Поэтому $\exists\, a_1 \dots a_{n-1} \in K : f_0(a_1 \dots a_{n-1}, 0) \neq 0 \Rightarrow$ при замене $v_i = u_i + a_i u_n$, $i = 1..n$, $v_n = u_n$ имеем $g(v_1, \dots v_n) = f(u_1 \dots u_n) \neq 0$ и g содержит y_n^m в качестве одночлена ∎

Т.3 Если кон. пор. алгебра A над (беск.) полем K явл-ся полем, то это конечное алгебр. расш. поля K.

Д-во: Согласно лемме Нётер, сущ-ет базис трансцендентности $\{v_1, \dots v_d\}$ алг. A; алгебра A цела над $B = K[v_1, \dots v_d]$. Д-ем, что B — поле. $\forall u \in B$ $\exists u^{-1} \in A$. Эл-т u^{-1} цел над B, т.е
$$u^{-m} + b_1 u^{-m+1} + \dots + b_{m-1} u^{-1} + b_m = 0 \text{ для } b_1, \dots b_m \in B.$$
Умножая на u^{m-1}, имеем
$$u^{-1} = -b_1 - \dots - b_{m-1} u^{m-2} + b_m u^{m-1} \in B.$$
Но $B = K[v_1, \dots v_d] \simeq K[x_1, \dots x_d]$ — алг. мн-в от d переменных. Т.к B - поле, то $d = 0 \Rightarrow B = K$ и A - алг. расширение поля K.

<u>Следствие</u> Если кон. пор. алгебра A над алг. замкнутым полем K яв-ся полем, то $A = K$.

<u>Упр 2</u> Алг. замк поле бесконечно. Д-ть!

Именно последнее следствие мы использовали в док-ве Т. Гильберта о нулях в алгебр. форме (см. предл. 9.4.5 из AN-5?)?