(12) Полилинейная алгебра

1. Тензорное произведение векторных пр-в

Опр 1 Пусть $V_1, \ldots V_p, U$ — в. п. над полем F

От-е $\varphi: V_1 \times \ldots \times V_p \to U$ наз-ся полилинейным (или p-линейным), если оно линейно по каждому из p аргументов (при фикс. остальных).

Мн-во всех таких от-й $\mathcal{L}(V_1, \ldots V_p; U)$ или $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots V_p; U)$ — вект. пр-во над F.

Ясно, что $\dim \mathrm{Hom}(V_1, \ldots V_p; U) = \dim V_1 \cdot \ldots \cdot \dim V_p \cdot \dim U$.

При $p=1$ мы получаем пр-во лин. от-й $\operatorname{Hom}(V, U)$.

При $U = F$ $\operatorname{Hom}(V_1, \dots V_p; F)$ — пр-во полилинейных ф-ций. В частности, $V^* = \operatorname{Hom}(V; F)$ — сопряжённое к V пр-во, т.е. пр-во линейных ф-ций см. §7.1 наших лекций (AN-31).

Среди всех полилинейных от-й пр-в $V_1, \dots V_p$ имеется в некотором точном смысле универсальное (см. ниже), его образ и есть тензорное произведение этих пр-в.

Для краткости мы сначала рассмотрим случай билинейных отображений $(p=2)$.

Далее, мы рассматриваем $\mathcal{B} = \mathrm{Hom}(V; W; U)$, где V, W, U — (к.м.) в. п. над полем F.

Предл 1. Пусть $\{e_i \mid i \in I\}$ и $\{f_j \mid j \in J\}$ — базисы в. п. V и W соот-но. След. св-ва $\varphi \in \mathcal{B}$ эк-ны:

1) $\{\varphi(e_i, f_j) \mid i \in I, j \in J\}$ — базис пр-ва U,

2) каждый $z \in U$ единств. образом предст. в виде $z = \sum_{i \in I} \varphi(e_i, y_i)$, где $y_i \in W$

3) каждый $z \in U$ единств. образом предст. в виде $z = \sum_{j \in J} \varphi(x_j, f_j)$, где $x_j \in V$.

Зам. В случае беск. мер. пр-в надо рассм-ть только суммы с кон. числом слагаемых $\neq 0$.

Д-во: $(1 \Leftrightarrow 2)$, поскольку $z = \sum_{i,j} z_{ij}\varphi(e_i, f_j)$

$\Leftrightarrow z = \sum_i \varphi(e_i, y_i)$, где $y_i = \sum_j z_{ij} f_j$.

$(1 \Leftrightarrow 3)$ док-ся аналогично $\blacksquare$

Следствие Св-во 1) от-я φ не зависит от выбора базисов в V и W.

Опр 2 Тензорным произведением в.п. V и W наз-ся в.п. $T = V \otimes W$ вместе с билин. от-ем

$$\otimes : V \times W \to T \text{ по правилу } (x, y) \mapsto x \otimes y,$$

удовл. след. условию: если $\{e_i \mid i \in I\}$ и $\{f_j \mid j \in J\}$ - базисы V и W, то $\{e_i \otimes f_j\}$ - базис пр-ва T.

Из опр. $\Rightarrow \dim T = \dim V \cdot \dim W$. Иногда $T = V \otimes_F W$.

Теорема 1. Тензорное произведение T пр-в V и W существует и единств. (с точностью до изоморфизма).

Д-во: Сущ. Возьмем в.п. T над тем же полем с базисом $\{t_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$ и определим билин. отоб-е $\otimes : V \times W \to T$ правилом $e_i \otimes f_j = t_{ij}$ (оно не зависит от выбора базисов в силу следствия из предл. 1).

Единств. Пусть $(T_1, \otimes_1)$ и $(T_2, \otimes_2)$ — два тензорных пр-я. Отоб-е базисов $\varphi : e_i \otimes_1 f_j \longmapsto e_i \otimes_2 f_j$ продолжается по линейности до изоморфизма $\varphi : T_1 \to T_2$ ∎

Пример: $\otimes: F[x] \times F[y] \longrightarrow F[x,y]$

по ф-ле $(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$.

$\{x^i \mid i = 0..\infty\}$ - базис $F[x]$ и $\{y^j \mid j = 0..\infty\}$ - базис $F[y]$

При этом $\{x^i \otimes y^j = x^i y^j \mid i,j = 0..\infty\}$ - базис $F[x,y]$

по опр 2 $F[x,y] = F[x] \otimes F[y]$.

Аналогично, $F[x_1..x_m; y_1...y_n] = F[x_1..x_m] \otimes F[y_1..y_n]$.

Предл 2 $\forall \varphi \in \mathcal{B} = Hom(V, W; U)$ сущ-ет единств. лин. от-е $\psi: T = V \otimes W \longrightarrow U$ такое, что

$(*)$ $\varphi(x,y) = \psi(x \otimes y)$ $\forall x \in V, y \in W$.

Д-во: Достаточно задать ψ на базисных векторах пр-ва T, полагая $\psi(e_i \otimes f_j) = \varphi(e_i, f_j)$ и проверить необх. св-ва

В силу опр 2 каждый $z \in V \otimes W$ единств. образом записывается $z = \sum_{i,j} z_{ij}(e_i \otimes f_j)$, $z_{ij} \in F$ $(**)$

Эл-ты z_{ij} – координаты z отн-но выбранных базисов. Если V и W – к.м. пр-ва, то z задается м-цей (z_{ij}).

Эл-т $z \in V \otimes W$ наз-ся разложимым (иногда говорят простой тензор), если $\exists x \in V$ и $y \in W$:

$(***)$ $z = x \otimes y$.

Упр 1 Если $\dim V, \dim W > 1$, то не всякий эл-т $z \in V \otimes W$ разложим. Почему?

Упр 2 Если $z = x \otimes y$ разложим, то это представл. единств. с точностью до замены $x \to \lambda x$, $y \to \lambda^{-1} y$, $\lambda \in F^*$.

Важное применение тензорного умножения — операция расширения основного поля:

Пусть L — расширение поля F и V — в.п. над F,

$V_L = L \otimes_F V$ — это в.п. над F.

С др. стороны, его можно расс-ть как в.п. над L, полагая $\alpha(\lambda \otimes v) = \alpha\lambda \otimes v$, где $\alpha, \lambda \in L$, $v \in V$. Можно считать, что $V \leq V_L$, отождествл. $v \in V$ с $1 \otimes v$ из V_L.

Если $\{e_i \mid i \in I\}$ — базис V (над F), то $\{1 \otimes e_i \mid i \in I\}$ базис V_L (над L), но (в этом весь смысл) там есть и другие базисы, в которых работать

удобнее (напр., над алг. замк. полем).

С др. стороны, если $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ — базис L над F, то каждый $v \in V_L$ однозначно представляется в виде $\sum_j \alpha_j v_j$, где $v_j \in V$. Например, $\forall z \in V_{\mathbb{C}}$ имеем $z = x + iy$, где $x, y \in V_{\mathbb{R}}$.

<u>Предл 3</u> Пусть V, W, X — в. п. над F. Тогда

а) $V \otimes W \simeq W \otimes V$,

б) $(V \otimes W) \otimes X \simeq V \otimes (W \otimes X)$

<u>Д-во</u>: Упр 3. <u>Зам.</u> Изоморфны, но не <u>РАВНЫ</u>!

Отождествляя при помощи изоморфизма из предл. 3 $(V \otimes W) \otimes X$ и $V \otimes (W \otimes X)$, мы можем опр-ть тензорное пр-е $V \otimes W \otimes X$ пр-в V, W, X. По индукции это распространяется на любое конечное число пр-в $V_1, \dots V_p$.

<u>Предл. 4</u> Тензорные пр-я вида $e_{1i_1} \otimes \dots \otimes e_{pi_p}$, где e_{ki_k} - базис. вектор пр-ва V_k, $k = 1 \dots p$, образуют базис пр-ва $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$.

<u>Д-во:</u> Индукция по числу p ∎

Обобщая предл. 2 мы получаем след.

осн. принцип тензорной алгебры:

Т. 2 Для любого p-линейного от-я $\varphi: V_1 \times \ldots \times V_p \to U$ существует единств. лин. от-е $\psi: V_1 \otimes \ldots \otimes V_p \to U$:

$$(****) \quad \varphi(x_1, \ldots, x_p) = \psi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)$$

Изоморфизм $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots V_p; U) \simeq \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_p; U)$, определенный в Т. 2 НАЗ-СЯ каноническим.

Пример Пусть сначала $\alpha \in V^*$, $\beta \in W^*$. Определим билинейную функц. $\alpha \otimes \beta : V \times W \to F$ правилом

$$(\alpha \otimes \beta)(x, y) = \alpha(x) \beta(y)$$

Тогда $\otimes : V \times W \to \mathrm{Hom}(V, W; F)$ — билин. от-е

При этом, если $\{\varepsilon_i \mid i \in I\}$ и $\{\theta_j \mid j \in J\}$ — базисы V^* и W^*, то $(\varepsilon_i \otimes \theta_j)(x, y) = x_i y_j$, где x_i, y_j — соотв. коор-ты

векторов x и y. Так как всякая билин. ф-ция f на $V \times W$ однозн. предст. в виде $f(x,y) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i y_j$, то $\{\varepsilon_i \otimes \theta_j \mid i \in I, j \in J\}$ - базис в $Hom(V, W; F) \Rightarrow$

$$Hom(V, W; F) \simeq V^* \otimes W^*.$$

Аналогично,

$$Hom(V_1, \dots V_p; F) \simeq V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*, \quad (\ast\ast\ast\ast\ast)$$

здесь изоморфизм задается ф-лой:

$$(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p)(x_1 \dots x_p) = \alpha_1(x_1) \dots \alpha_p(x_p),$$

где $\alpha_i \in V_i^*$ и $x_i \in V_i$, $i = 1 \dots p$.

Из $(\ast\ast\ast\ast\ast)$ и $(\ast\ast\ast\ast) \Rightarrow$

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_p)^* = V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*.$$

Упр 4 Пусть $\alpha \in V^*$ и $y \in W$. Проверьте, что $\alpha \otimes y : V \to W$ по правилу $(\alpha \otimes y)(x) = \alpha(x) y$, $x \in V$, — линейное от-е. Поэтому $\otimes : V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ — билинейное от-е. Д-те, что

$$V^* \times W \simeq \mathrm{Hom}(V, W) \qquad (\ast\ast\ast\ast\ast\ast)$$

Упр 5 Покажите, что

$$V_1^* \otimes \ldots \otimes V_p^* \otimes U \simeq \mathrm{Hom}(V_1, \ldots V_p; U).$$

Опр 3 Пусть $A \in \mathcal{L}(V)$, $B \in \mathcal{L}(W)$ — лин. операторы в V и W над F. Лин. оператор $A \otimes B$ на $V \otimes W$, заданный правилом

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By \quad \forall x \in V,\ y \in W,$$

наз-ся тензорным произведением операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

<u>Предл 5</u> 1) Опр 3 корректно

2) Если $A = (a_{ij}) = [\mathcal{A}]$ в базисе $\{e_i \mid i = 1..n\}$

$B = (b_{ij}) = [\mathcal{B}]$ в базисе $\{f_j \mid j = 1..m\}$, то

в базисе $\{e_i \otimes f_j\}$ оператор $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ имеет м-цу

$$[\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}] = \begin{pmatrix} a_{11} B & \cdots & a_{1n} B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} B & \cdots & a_{nn} B \end{pmatrix}.$$

Эта м-ца наз-ся тензорным произведением м-ц A и B и обозн. $A \otimes B$.

<u>Упр 6</u> Если $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ и $\mu_1 \ldots \mu_m$ — хар корни $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (с учетом кр-сти), то $\lambda_i \mu_j$ — хар. корни $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.