


3. Тензорная алгебра

Всюду в этом выражении A - алгебра с 1
(но не обязательно ассоц. или комм.) над полем F ,
 V - в.н. разм-ся n над полем F ,

Предл 1 Если $*$ - умножение в A , то

$\varphi: A^p \rightarrow A$ по правилу $\varphi(a_1 \dots a_p) = a_1 * \dots * a_p$
- p -линейная операция, а значит, существует
единств. лн. от-л $\psi: \underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_p \rightarrow A$ такое, что
 $\psi(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) = a_1 * \dots * a_p$.

Следствие Задав на в.н. A структуру F -алгебры
- это то же самое, что задать на A тензор γ типа $(2,1)$
(структурный тензор), где $e_i * e_j = \gamma_{ij}^k e_k$, $\{e_i\}$ - базис в.н. A .

Δ-30: Применить лемма 1 при $\phi = 2$ и вспомнить,
что $\text{Hom}(A \otimes A, A) \cong A \otimes A^* \otimes A^*$ 

Опр 1 Пусть V_i , $i = 0, 1, \dots$, — вектор-пространства над полем F .

Прямой суммой $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$ этих пространств наз-ся

линейная комбинация векторов (x_0, x_1, \dots) ,
где $x_i \in V_i$ и лишь конечное число x_i отлич от 0.

Прел 2 $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$ — вектор-пространство над полем F , причем

если $\{e_j, j \in \mathbb{J}\}$ — базис V_j , то $\bigcup_{i=0}^{\infty} \{e_{ij}, j \in \mathbb{J}\}$ — базис $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$.

Как мы помним, что из определ-я тензорного произ-я \Rightarrow

$$T_{\mathcal{Q}}^P(V) \otimes T_{\mathcal{S}}^r(V) \subseteq T_{\mathcal{Q} \cup \mathcal{S}}^{P+r}(V). \quad (*)$$

Также $T^p(V) = T_0^p(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p \text{ раз}}$ — p -контравариантных тензоров над V .

Препл 3 В.н. $T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V)$ над F является алгеброй относительно операции тензорного произведения. Л-во вытекает из $(*)$.

Опр 2 $T(V)$ — **тензорная алгебра** кр-ва V ,

аналогично, $T_*(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T_q(V)$ — **алгебра пополнения** кр-ва V . В ней для $\alpha \in T_i(V)$, $\beta \in T_j(V)$

$(\alpha \otimes \beta)(x_1 \dots x_{i+j}) = \alpha(x_1 \dots x_i) \beta(x_{i+1} \dots x_{i+j})$ $(**)$
 ϕ -н $(**)$ определяет тензорное произведение.

Т.к. $\dim V = n < \infty$, то $T_q(V) = T^q(V^*) \Rightarrow$
 $T_*(V) = T(V^*)$ — тензорная алгебра над V^* .

Упр 1 Алгебра $T(V)$ ассоциативная алгебра с 1
(не коммутативная),

Ключевое св-во тензорной алгебры — её
универсальность

Т. 1 Пусть V (в.в.) в.и. над F , A — произвольная
ассоц. (с 1) алгебра над F . Тогда каждое
л.н. от-е $\varphi: V \rightarrow A$ единственным образом продолжается
до пом.з.м. алгебры $\psi: T(V) \rightarrow A$, т.е. $\psi \circ i = \varphi$, где
 i — естеств. вложение V в $T(V)$.

Следствие Если $\varphi: V \rightarrow A$ сюръективно, то
 $A = \varphi(T(V))$.

Неформально, "любая к.м. ассоц. алгебра с 1 — гомоморфный образ тензорной алгебры некоторого пр-ва V " (можно взять $V=A$).

1-ВО Теорема: По лнн. от-ю $\varphi: V \rightarrow A$

однозначно строится р-мн. от-е $\varphi_p: V^p \rightarrow A$
по правилу $\varphi_p(x_1, \dots, x_p) = x_1 * \dots * x_p$, где $*$ — операция
умножения в A (см. предл. 1). В силу
асс. ит-на тензорной алгебры сов. функ-в.
лнн. от-е $\varphi_p: T^p(V) \rightarrow A$ т.ч. $\varphi_p(x_1 \otimes \dots \otimes x_p) = x_1 * \dots * x_p$.

Покажем также, что $\psi_0(\alpha) = \alpha \cdot 1 \in F \cdot 1 \subseteq A$.

От-е $\psi: T(V) \rightarrow A$ т.ч. $\psi = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \psi_p$, где строим
по правилу $\psi(v_0 + v_1 + v_2^1 \otimes v_2^1 + v_3^1 \otimes v_3^2 \otimes v_3^3 + \dots)$
 $= \psi_0(v_0) + \psi_1(v_1) + \psi_2(v_2^1 \otimes v_2^1) + \dots$ — аксиомы
ком-за (Выводим из аксиом). Он определен единственным
образом, т.к. определен единственный образ на $T^p(V)$
 $\forall p$ и потому что $T(V)$ — прямая сумма этих
ур-в \equiv

Упр 2 Если $\dim V = n$, то $T(V)$ изоморфна
алгебре мн-ков $F[x_1, \dots, x_n]$ от **некоммутирующих**
переменных ($x_i x_j \neq x_j x_i$ при $i \neq j$).

На этом языке любая к.н. ассоц. алгебра A \cong
 изоморфна фактор-алгебре $T(V)/I$, где
 $T(V)$ - алгебра (некомм.) мн-нов, а $I = \text{Ker } \psi$
 - идеал, порождённый некоторыми наборами $\{f_i\}$ таких
 лев-нов. (вспомните про базис Трёубнера -
 - Ширцова!), таким образом, алгебра A
 можно задать (как и раньше) набором
 порождающих $a_i = \psi(x_i)$ и определяющих
 соотношений $f_i(x_1, \dots, x_n)$:

$$A = \langle a_1, \dots, a_n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \rangle_{\text{асс.}}$$

В этом смысле $T(A)$ - **свободная** н-порочная
 ассоциативная алгебра.

Упр 3 Задать через "порозг." и опред. соотн-я"

а) "обычное" коэфы $F[x, y]$ от коммутирующих переменных;

б) алгебру матриц $M_n(F)$.

Упр 4^{*} Д-те, что $M_n(F)$ порождается (как алгебра)

2 эл-ми.