

#### 4. Симметрические и внешние алгебры

Опр 1 Точкой зрения на  $\sigma$ - $\epsilon$   $\varphi: \underbrace{V \times \dots \times V}_p \rightarrow U$   
наз-ся **симметрическим**, если

$$\varphi(x_{1\sigma}, \dots, x_{p\sigma}) = \varphi(x_1, \dots, x_p) \quad \forall \sigma \in S_p$$

и **кососимметрическим**, если

$$\varphi(x_{1\sigma}, \dots, x_{p\sigma}) = \text{sgn } \sigma \varphi(x_1, \dots, x_p) \quad \forall \sigma \in S_p.$$

Зам. В случае кососим.  $\sigma$ - $\epsilon$  будет считаться  $\text{char } F \neq 2$ .

Тогда далее  $\{e_i, i=1..n\}$  - базис  $\text{пр-ба } V$  над полем  $F$ .

Опр 2 В  $n$  и  $S$  вместе с симметр.  $p$ -элементом  $\sigma$ - $\epsilon$

$$(*) \quad V \times \dots \times V \rightarrow S, \quad (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1 \vee \dots \vee x_p,$$

наз-ся  **$p$ -й симметрическим элементом**  $\text{пр-ба } V$ ,

Если в рн  $e_{i_1}, \dots, e_{i_p}$ ,  $i_1 \leq \dots \leq i_p$ , составляют базис пр-ва  $S$ . Обозн:  $S = S^p(V)$ .

В н.  $\Lambda$  вместе с косыми ф-ми от-ем

$$(*2) \quad V \times \dots \times V \rightarrow \Lambda, (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_p,$$

наз-ся **р-й внешней степенью** пр-ва  $V$ , если

в рн  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ ,  $i_1 < \dots < i_p$ , составляют базис пр-ва  $V$ . Обозн:  $\Lambda = \Lambda^p(V)$ .

Упр 1 Если  $\dim V = n$ , то

$$a) \dim \Lambda^p(V) = C_n^p \quad б) \dim S^p(V) = C_{p+n-1}^p.$$

Упр 2 не зависит от выбора базиса: если

$\tilde{e}_i$ ,  $i=1..n$ , другой базис пр-ва  $V$ , то  $\tilde{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{i_p}$ ,  $i_1 \leq \dots \leq i_p$ , и  $\tilde{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{i_p}$ ,  $i_1 < \dots < i_p$ , составляют базисы пр-в  $S$  и  $\Lambda$ ,

Т.к их число совпадает с разн-стю их кр-в  
и в-рн  $e_{i_1} v \dots v e_{i_p}$  (соот-но  $e_{i_1} 1 \dots 1 e_{i_p}$ ) среди них выр-ся,

Т.1 Симметрическая (внешняя) р-я степень кр-ва  $V$   
существует и единственна.

Л-во: Сущ Возмем в.ч.  $S$  с базисом

$\{s_{i_1 i_2 \dots i_p} \mid i_1 \leq \dots \leq i_p\}$  и опре-ть р-кн. ст-е (\*),

эквивз его по ф-ле  $e_{i_1} v \dots v e_{i_p} = s_{j_1 \dots j_p}$ , где  
 $\{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_p\}$  и  $j_1 \leq \dots \leq j_p$ .

Единств Если  $(S_1, V_1)$  и  $(S_2, V_2)$  - две р-е  
сим. степени кр-ва  $V$ , то  $\exists!$  из-за  $\psi: S_1 \rightarrow S_2$ ,

удовз. удовлетв.  $\psi(x_1 v_1 \dots v_1 x_p) = x_1 v_2 \dots v_2 x_p,$

$\forall x_1 \dots x_p \in V$ . Действ., достаточно показать

$$\psi(e_{i_1} v_1 \dots v_1 e_{i_p}) = e_{i_1} v_2 \dots v_2 e_{i_p} \quad (i_1 \leq \dots \leq i_p).$$

Для  $\wedge^p(V)$  док-во полностью аналогично.

Как и тензорное пр-е ссм. и внешняя р-соединя  
обнадеют св-вом универсальности.

Прелл 1 Для любого ссм. (кососм.) р-ли. от-я  $\varphi: \underbrace{V \times \dots \times V}_p \rightarrow U$   
сущ-ет единств. лн. от-е  $\psi: S^p(V) \rightarrow U$  тако, что

$$\varphi(x_1 \dots x_p) = \psi(x_1 v_1 \dots v_1 x_p),$$

или соот-но  $\psi: \wedge^p(V) \rightarrow U$  тако, что

$$\varphi(x_1 \dots x_p) = \psi(x_1 \wedge \dots \wedge x_p).$$

$\Delta$ -во: Для симм.  $\sigma$ -я  $\varphi$  искомое лев.  $\sigma$ -я  $\varphi$  задается  
на базисных вектах  $n$ -ва  $S^p(V)$  по  $\varphi$ -лем:

$$(*) \varphi(v_{i_1} \vee \dots \vee v_{i_p}) = \varphi(v_{i_1}, \dots, v_{i_p}) \quad (i_1 \leq \dots \leq i_p),$$

Ввиду симм-сти  $\varphi$  эта  $\varphi$ -л-я вст-ся и для любых  
кегов  $i_1, \dots, i_p$ , а отсюда по линейности вытекает  $(*)$ .

Для кососимм.  $\sigma$ -я  $\varphi$ -во аналогично  $\equiv$

Если  $x_1, \dots, x_p \in V$ , то  $\exists$ -т  $x_1 \vee \dots \vee x_p$  (соств.

$x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ ) наз-ся **разомножен.** Према. 1 позволяет

выр-ть лев.  $\sigma$ -я  $n$ -ва  $S^p(V)$  и  $\Lambda^p(V)$ , задавая  
их равно на разомнож-ях (так как вводимые  
условия линейности и симм-сти).

Прел. 2 Вспомогательные алгебры

$V : S^p(V) \times S^q(V) \rightarrow S^{p+q}(V)$  такое, что  
 $(x_1 \vee \dots \vee x_p) \vee (x_{p+1} \vee \dots \vee x_{p+q}) = x_1 \vee \dots \vee x_{p+q}$  (\*)  
и  $\wedge : \Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \rightarrow \Lambda^{p+q}(V)$  такое, что

$(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) \wedge (x_{p+1} \wedge \dots \wedge x_{p+q}) = x_1 \wedge \dots \wedge x_{p+q}$  (\*\*)

корректно вводить операции умножения на  
ур-вн  $S(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S^p(V)$  и  $\Lambda(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda^p(V)$ .

Опр 3  $S(V)$  — симметрическая алгебра ур-вн  $V$ .

$\Lambda(V)$  — внешняя алгебра (алгебра Грассмана) ур-вн  $V$ .

Алгебры  $S(V)$ ,  $\Lambda(V)$ , как и тензорная алгебра  $T(V)$   
являются предукомпактными в смысле след. опр-я:

Опр 1 Разложение алгебры  $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A_d$  в  
прямую сумму своих подпр. в  $A_d$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ ,  
удовл. условию  $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ , наз-ся **градуировкой**  
алгебры  $A$ , а сама  $A$  — **градуированной** алгеброй.

Упр 2 От-е  $S(V) \rightarrow F[x_1, \dots, x_n]$  по преобраз.  
 $e_{i_1} V \dots V e_{i_p} \mapsto x_{i_1} \dots x_{i_p}$  задает изоморфизм  
алгебры  $S(V)$  и алгебры мн-ков  $F[x_1, \dots, x_n]$ .  
В частности, алгебра  $S(V)$  — бесконечномерная  
ассоц. коммутативная алгебра с 1.

Упр 3 Алгебра Грессмана  $\Lambda(V)$  конечномерная  
( $\dim \Lambda(V) = 2^n$ ) ассоц алг. с 1. Она не коммут., но

Суперкоммутативность, т.е.  $u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u$ , где  $u \in \wedge^p(V)$ ,  $v \in \wedge^q(V)$ .

Зам. Св-во суперкомм-ции выр-ся только для градуированных алгебр.

Далее (в случае если  $F=0$ ) мы отождествим выр-е  $S^p(V)$  и  $\wedge^p(V)$  с некоторыми подвыр-ями в  $T^p(V)$ . Для этого нам потребуется след. выр-е.

$\forall \sigma \in S_p$  (т.е. перестановки  $\sigma$  из  $p$  символов)  
выр-е и нек. выр-е  $f_\sigma$  выр-а  $T^p(V)$  связаны  $t \mapsto t^\sigma$ :  
 $(x_1 \otimes \dots \otimes x_p)^\sigma = x_{1\sigma} \otimes \dots \otimes x_{p\sigma}$  (корректность вычисления из осн. свойства тенз. алг.)

Отметим, что  $((x_1 \otimes \dots \otimes x_p)^\sigma)^\tau = (x_{1\sigma} \otimes \dots \otimes x_{p\sigma})^\tau =$   
 $= x_{1\sigma\tau} \otimes \dots \otimes x_{p\sigma\tau}$ , т.е.  $t^{\sigma\tau} = (t^\sigma)^\tau \forall t \in T^p(V)$ .



Опр 5 Тензор  $t \in T^p(V)$  наз-ся **симметрическим**

(соотв. **кососимметрическим**), если  $\forall \sigma \in S_p$

$$t^\sigma = t \quad (\text{соотв. } t^\sigma = \text{sgn} \sigma \cdot t). \quad \text{Сим. (кососим.)}$$

тензоры образуют подпр.-во в  $T^p(V)$ , которое обозн  **$ST^p(V)$**  (соотв.  **$\Lambda T^p(V)$** ).

Далее считаем, что  $\text{char } F = 0$ .

В пр.-ве  $T^p(V)$  опре-ся операторы

**симметрирования**:  $\text{Sym}(t) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} t^\sigma$ , и

**антисимметрирования**:  $\text{Alt}(t) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn} \sigma \cdot t^\sigma$ .

Т.к.  $\text{Sym}(t) \in ST^p(V)$  и  $\text{Sym}(\text{Sym}(t)) = \text{Sym}(t)$ , то


$\text{Sym}$  — оператор проектирования из  $T^p(V)$  в  $ST^p(V)$ .

Аналогично,  $\text{Alt}$  — оператор проектирования в  $\Lambda T^p(V)$ .

Предл 3 Если  $F = 0$ , то имеет ся изоморфизм (в)

$\mu: ST^p(V) \rightarrow ST^p(V)$  т.ч.  $\mu(x_1 \vee \dots \vee x_p) = \text{Sym}(x_1 \otimes \dots \otimes x_p)$

и  $\mu: \Lambda^p(V) \rightarrow \Lambda T^p(V)$  т.ч.  $\mu(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \text{Alt}(x_1 \otimes \dots \otimes x_p)$

Д-во: см. д-во предл. 2 из § 3 и 4 и л. 8 и 3 [ВУН] 

Упр 4  $\Delta$ -идеал  $T^2(V) = ST^2(V) \oplus \Lambda T^2(V)$ , но

при  $\dim V > 1$   $T^p(V) \neq ST^p(V) \oplus \Lambda T^p(V)$  при  $p > 2$ .

В алгебре  $T(V)$  естественно определить подгруппу  $B$  (но не подалгебру!) :

$$ST(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} ST^p(V) \quad \text{и} \quad \Lambda T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda T^p(V)$$

то (учитывая из-мен  $\mu$  из предл 2) мы можем  
 без труда найти max degree у  $\gamma_{\text{hom}}(\mu)$ ;

$$t \vee u = \text{Sym}(t \otimes u) \quad \text{и} \quad t \wedge u = \text{Alt}(t \otimes u)$$

Применяя к сопр. пр-ву  $V^*$ , получим

$$S_p(V) = S^p(V^*), \quad ST_p(V) = ST^p(V^*) - \text{нр-во симм } p\text{-мн.}$$

$$\Lambda_p(V) = \Lambda^p(V^*), \quad \Lambda T_p(V) = \Lambda T^p(V^*) - \text{нр-во кососимм. } p\text{-мн. ф-ции.}$$

Если  $\alpha \in T_p(V) = T^p(V^*)$ , то

$$(\text{Sym } \alpha)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha(x_{1\sigma}, \dots, x_{p\sigma})$$

$$(\text{Alt } \alpha)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn } \sigma \alpha(x_{1\sigma}, \dots, x_{p\sigma}).$$

Каждое симм.  $p$ -линейное  $\alpha \in ST_p(V)$  соответствует  
в соответ. линейн.  $f_\alpha \in S_p(V)$  по формуле

$$f_\alpha(x) = \alpha(x, \dots, x)$$

(при  $p=2$  каждое сим. двухлинейное соотв. — квадратичная)

Предл. 4 Если  $\text{char } F = 0$ , то от-е  $ST_p(V) \rightarrow S_p(V)$ ,

$\alpha \mapsto f_\alpha$ , есть изом.-зм. в-н., обратительн. к из-заву  
 $\mu: S_p(V) \rightarrow ST_p(V)$ .

Л-во: См. Л-во предл. 3.3 из [ВАН]  $\blacksquare$

Сим.  $p$ -линейн.  $\alpha$  — *инвариант* однородного линейн.  $f_\alpha$

Упр 5 Показать, что многочлен  $m$ -й

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 x_3 \in F[x_1, x_2, x_3]$$

АВЛ-сх сим. Тривии.  $\phi$ -гн

$$\alpha(x, y, z) = x_1 y_1 z_1 + \frac{1}{2} (x_3 y_2 z_2 + x_2 y_3 z_2 + x_2 y_2 z_3).$$

Умножение в алгебрах  $ST_*(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} ST_p(V)$

$LT_*(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} LT_p(V)$  выглядят след. образом:

$$(\alpha \vee \beta)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \frac{p! q!}{(p+q)!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ i_{p+1}, \dots, i_{p+q}}} \alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \beta(x_{i_{p+1}}, \dots, x_{i_{p+q}})$$

— симм.  $np$ -е  $\phi$  гн  $\alpha$  и  $\beta$ .

$$(\alpha \wedge \beta)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \frac{p! q!}{(p+q)!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ i_{p+1}, \dots, i_{p+q}}} \text{sgn}(i_1, \dots, i_{p+q}) \dots$$

— Внешнее  $np$ -е  $\phi$ -гн  $\alpha$  и  $\beta$ .

Если  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in V^*$ , то

$$(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_p)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \text{per}(\alpha_i(x_j)),$$

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p)(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{p!} \det(\alpha_i(x_j)), \text{ где}$$

$\text{per}$  и  $\det$  — перманент и детерминант м-ца

$$(\alpha_i(x_j)) = A_{ij}.$$

$$A \in L(V)$$

Аналогично, тензорной системой лин. операторов  $\overline{V}$  можно опре-ть симметрическое и антисимметрическое:

$$S^p A(x_1 \vee \dots \vee x_p) = A x_1 \vee \dots \vee A x_p$$

$$\wedge^p A(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = A x_1 \wedge \dots \wedge A x_p$$

Упр 6  $\Delta$ -ре, что  $\text{tr} S^2 A = \frac{1}{2} (\text{tr} A^2 + (\text{tr} A)^2)$

и  $\text{tr} A^2 = \frac{1}{2} (\text{tr} A^2 - (\text{tr} A)^2)$ .

Если сим. алгебра — новый взгляд на алгебру  
мк-нов, то алгебра Грассмана — развитие  
теории определителей в лин. алгебре.

Т. 2 1) Набор векторов  $a_1, \dots, a_p$  и  $b_1, \dots, b_r$  лине. зав.  
 $\Leftrightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_p = 0$ .

2) Если набор  $p$ -ро  $a_1, \dots, a_p$  и  $b_1, \dots, b_r$  лине. незав.,  
то  $\langle a_1, \dots, a_p \rangle = \langle b_1, \dots, b_r \rangle \Leftrightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_p$  и  $b_1 \wedge \dots \wedge b_r$   
пропорциональны.

Д-во. см. доказ-во Т. 8.4.1 из [Вик].