

# (13) Линейные представления и Assoc. алгебры

## 1. Определения и примеры лн. представлений

$V$  - в. п. над полем  $F$ ,  $L(V)$  - алгебра лн. пр-н на  $V$ .  
Если  $\dim V = n$ , то выбор базиса в  $V$  задает из-зм  $L(V)$  и алгебры матриц  $M_n(F)$ .

Опр 1 **Линейным представлением** <sup>линейного</sup> лн-ва  $X$  на  $V/F$  наз-ся произв. от-е  $\varphi: X \rightarrow L(V)$  (\*)

Пр-во  $V$  - **пр-во представления**,  $\dim_F V$  - **раз-сть представления**,  
 $x\varphi, x \in G$  - **операторы представления**. Если на  $X$   
заданы операции (умножения - для групп, сложения  
и умножения - для колец, сложения, умножения и

умножением на скаляр — для алгебр, то  $\varphi$  должно быть согласовано с ними, т.е. являться гом-омом.

Иными словами,  $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in F$  +  $\varphi(1) = \varepsilon$   
если тривиал!

$$(xy)\varphi = x\varphi y\varphi \quad \text{— мульти}$$

$$(*)2) \quad (x+y)\varphi = x\varphi + y\varphi$$

$$(\lambda x)\varphi = \lambda x\varphi$$

кольца  
алгебр

Опр 2 Пусть  $\varphi: X \rightarrow L(V)$  и  $\psi: X \rightarrow L(U)$  — лине. уп-я  
одно и то же мн-ва  $X$  над одним и тем же полем  $F$ .  
Предс-в-ия  $\varphi$  и  $\psi$  **эквивалентны** (гомотич., изоморфичны),  
если  $\exists$  гом.зм  $\theta: V \rightarrow U$  т.ч.

$$(*)3) \quad \psi(x\varphi)\theta = (\psi\theta)x\varphi \quad \forall v \in V, \forall x \in X.$$

$\theta$  — изоморфизм предс-в-ий.

Зам. Утвержд. говорит о **морфизме** представлений, если  $\Theta$  - л.н. о.т.-е., унитар. ( $\neq 3$ ).

Пример 1 Если  $\Theta: V \rightarrow F^n$ ,  $\sum d_i e_i \mapsto (d_1, \dots, d_n)$ , где  $e_i, i=1..n$ , - базис  $V$  и  $\varphi: X \rightarrow \mathcal{L}(V)$ , то  $\Psi = \varphi \Theta: X \rightarrow M_n(F)$  - **матричное** **пр-е** л.н.-ва  $X$ , эквивалентное **пр-ю**  $\varphi$ .

Упр 1 Пусть  $X = \{x\}$  - одноэлемент. л.н.-во.  $\Leftrightarrow$  то **пр-е**  $\varphi$  и  $\Psi$  в  $M_n(F)$  над алг. зам. полем  $F$  экв.-нтн  $\Leftrightarrow x\varphi$  и  $x\Psi$  имеют одну и ту же **норм. форму** (с точностью до перестановки 'слагаемых').

Зам. Если  $X$  - произв. л.н.-во (без операций) и  $|X| \geq 2$ , то **разноголосного** л.н. **пр-я**  $X$  **нет**.

Пусть  $L$ -расширение поля  $F$  и  $V_L = V \otimes_F L$  - в.п., над  $L$

Если  $\varphi: X \rightarrow GL(V)$ -представление над  $V$ , то оно продолжается до пр-я  $\varphi_L: X \rightarrow GL(V_L)$ , причем

если  $A$ -матр. эф в базисе  $\{e_i\}$ , то  $A$ -матр. и  $\varphi_L$  в базисе  $\{e_i \otimes 1\}$  пр-ва  $V_L$ .  $\varphi_L = \varphi$  для  $L$ -элементов

Прел. 11.1 Если  $F$ -биек. поле и  $L$ -его расширение, то пр-я  $\varphi: X \rightarrow GL(V)$  и  $\psi: X \rightarrow GL(W)$  эквивалентны над  $L$ , эквивалентны и над  $F$ .

Д-во: См. прел. 11.1.1 из [ВУН],

Зам. бесконечность поля  $F$  гарантирует тождество совпадение лев-чл, которое прав-чл как обратное.

Опр 3 Говят  $\varphi: X \rightarrow L(V)$  - представление. Подгруппа

$U$  наз-ся **инвариантной** относительно  $\varphi$ , если  $U(x\varphi) \subseteq U$  для любого  $x \in X$ . Если  $U$  инв. отн-но  $\varphi$ , то  $\varphi$  индуцирует от-с

$$\varphi_U: X \rightarrow L(U), \quad u(x\varphi_U) = u(x\varphi) \quad \forall u \in U, \forall x \in X$$

$$^u \varphi_{V/U}: X \rightarrow L(V/U), \quad (v+U)(x\varphi_{V/U}) = v(x\varphi) + U, \\ \forall v \in V, \forall x \in X,$$

которые наз-ся **подпредставлением** и **факторпредст-ем**.

Зам. Корректность вытекает из того, что тождеств. вложение

$$\theta: U \rightarrow V \text{ (соот-но канон. вом-зм } V \rightarrow V/U) \text{ удовл.}$$

соотн. (X3), т.е. явл-ся морфизмом представлений.

В матричной форме: если базис пр-б  $A^T$  согласован с базисом инв. подпр-б  $A^T U$ , то  $\forall x \in X$

$$[x\varphi] = \begin{pmatrix} [x\varphi_U] & * \\ 0 & [x\varphi_{V/U}] \end{pmatrix}. \text{ Упр 2 Проверить!}$$

Опр 4  <sup>$\dim U \neq 0$</sup>  Лин. пр-е  $\varphi: X \rightarrow L(V)$  наз-ся **приводимым**, если найдется инв. отн-ко  $\varphi$  подпр-б  $U: 0 \subset U \subset V$ , и **неприводимым** в противном случае. Пр-е  $\varphi$  наз-ся **разложимым**, если найдется собств. подпр-б  $A^T U, W$  пр-б  $A^T V$ , инв. отн-ко  $\varphi$ , для которых  $V = U \oplus W$ , и **неразложимым**, в противном случае. Наконец,  $\varphi$  **вполне приводимо**, если  $V$  есть прямая сумма инв. подпр-б  $V_i$  таких, что подпр-е  $\varphi_{V_i}$  неприводимы  $\forall i$ .

Зам. Непривод  $\Rightarrow$  некзк., но обратное неверно.

Пример 2 Пусть  $G = \langle \mathbb{R}, + \rangle$  и  $\varphi: G \rightarrow GL(E^2)$

$$t\varphi = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{в стандарт. базисе } \{e_1, e_2\},$$

Тогда  $\varphi$  неприводимо над  $\mathbb{R}$ , т.к., например, м-мат  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  не имеет отлич. от 0 эв. вектр-в.  
и даже вполне приводимо

Однако  $\varphi$  приводимо над  $\mathbb{C}$  (т.е. в м-мат  $V_{\mathbb{C}}$ ),  
поскольку эв. собственные вектр-ва, соответствующие  
всп  $e_1 + ie_2$  и  $e_1 - ie_2$ , эв-ны отн-но  $\varphi$   
и в базисе из этих в-в  $t\varphi_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$ , т.е.  
 $\varphi_{\mathbb{C}}$  даже вполне приводимо.

Еще одно представление  $\psi: G \rightarrow GL(E^2)$  тем же  
группы, где  $t\psi = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , привожу, т.к.

$\psi = \langle (0, 1) \rangle$  инв-но отн-но  $\varphi$ , но не разложимо,  
т.к. группой инвариантных  $\varphi$ -инв. подгрупп нет!

Упр 3 Проверить гтв-е из примера 2,

Пример 3 Пусть  $A$ -ассоц. (но не обязат. коммт)  
алгебра  $(\varphi 1)$ . Тогда  $\varphi$ -нз  $a(xr) = ax \forall a, x \in A$   
заведет лн. пр-е  $\rho: A \rightarrow L(A)$  называемое  
*правым регулярным* представлением.

Дей-но, несложно проверить св-ва  $(\star 2)$ . В частности,  
 $(xy)\rho = x\rho y\rho$  вытекает из ассоц. алгебры  $A$ .



Инвариантные подгруппы этого представления — это в точности правые идеалы этой алгебры.

Мы уже говорили об этом, но на языке  $A$ -модулей.

Более общо, если на в.п.  $V/F$  задана структура правого  $A$ -модуля (см. АН-53), то от-е

$\varphi: A \rightarrow \mathcal{L}(V)$ ,  $v(x\varphi) = v * x \quad \forall v \in V, x \in A$   
— лев. представление на в.п.  $\varphi$  (сравн. с 9).

В этом случае,  $A$ -модуль  $\Leftrightarrow$  лев. подгруппа и т.д.

Пример 4 Пусть  $\rho: G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$  — действие группы  $G$  на лев. в.  $\Omega = \{1, \dots, n\}$  и  $\{e_i, i=1, \dots, n\}$  — базис пр. в.  $V$ .

От-е  $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ , заданное на этих базисах так  
(\*4)  $e_i(x\varphi) = e_{i(x\rho)}$ , — лев.  $\Rightarrow$  лев. представление.

Представление  $\varphi$  из примера 4 наз-ся **могетановочным** (как впрочем и само  $\rho$ ).

Это представление есть пример **мономатричного** представления, т.е. представления  $\varphi$  которого в нек-ой базисе все  $M$ -ы имеют по-близ по одному ненулевому эл-ту в каждой строке и каждой столбце.

Упр 4 а) Д-те, что при  $n = |\Omega| \geq 2$  пр-е  $\varphi$  из примера 4 приводимо.

б) Если  $\text{char } F = 0$  и  $G = \text{Sym}(\Omega)$ ,  $\rho$ -тожд.  $\mathfrak{g}$ -е, то  $V_0 = \{ \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i : \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \}$  и  $V_1 = \langle \sum_{i=1}^n e_i \mid i=1 \dots n \rangle$  — неприводимые  $\varphi$ -инв. подпр-ва и  $V = V_0 \oplus V_1$ .

Предл 2 Пусть  $\varphi: X \rightarrow L(V)$  и  $\psi: X \rightarrow L(U)$  — линейн. ир-я лн-ва  $X$  над полем  $F$ . Если  $\Theta \in \text{Hom}_F(V, U)$  удовлет. св-ву  $v(\varphi)\Theta = (\psi\Theta)(x\psi) \quad \forall v \in V \quad \forall x \in X$ , то либо  $\Theta = 0$ , либо  $\Theta$  — изоморфизм представлений.

Д-во:  $\text{Ker } \Theta \leq V$  инв. отн-но  $\varphi$ , а  $\text{Im } \Theta \leq U$  инв. отн-но  $\psi$ . Из линейности св-ва  $\varphi$  и  $\psi \Rightarrow$  либо  $\text{Ker } \Theta = V$  и  $\text{Im } \Theta = 0$ , т.е.  $\Theta = 0$ , либо  $\text{Ker } \Theta = 0$  и  $\text{Im } \Theta = U$ , т.е.  $\Theta$  — из-зм  $\square$

Теорема 1 (лемма Шур) Если  $V$  — в.п. над алг. зап. полем  $F$   $\varphi: X \rightarrow L(V)$  — линейн. ир-я,  $\Theta \in L(V): v(\varphi)\Theta = (\psi\Theta)(x\psi) \quad \forall v \in V \quad \forall x \in X$ , то  $\Theta = \lambda E$  для некоего  $\lambda \in F$ .

линии совпадают, всякий эндоморфизм (морфизм в себя)  
неприводимого пр-я над алг. зам. полем скалярен.

$\Delta$ -во: Поскольку  $\varphi$  и  $\theta$  перестановочны, то  
 $\varphi$  перестановочно и с  $\theta - \lambda E \quad \forall \lambda \in F$ . Поскольку  
 $F$  алг. замкнуто, то  $\exists \lambda \in F: \ker(\theta - \lambda E) \neq 0$ . В  
силу предп. 2  $\Rightarrow \theta - \lambda E = 0$   $\blacksquare$

Следствие 1 Все морфизмы двух непривод.  
представлений одного мп-ва (над одним полем)  
пропорциональны между собой.

Следствие 2 Всякое неприводимое представление  
абелевой группы над алг. замкн. полем одномерно.

$\Delta$ -во: Пусть  $\varphi: G \rightarrow GL(V)$  — неприв. пред. абелев.

группы  $G$ . Если  $x, y \in G$ , то  $xy = yx \Rightarrow (x\varphi)(y\varphi) =$   
 $= (yx)\varphi = (yx)\varphi = (y\varphi)(x\varphi) \Rightarrow x\varphi$  — эндоморфизм  
 $V$  и  $\varphi$  — гомоморфизм. По лемме Шура  $\Rightarrow$   
 $x\varphi = \lambda(x)E$  — скалярный оператор. Поэтому любое  
 подпр-во  $U$   $(x\varphi)$ -инв.  $\forall x \in G$ , т.е. инв. относительно  $\varphi$ .  
 В силу леммы Шура  $\varphi$  это возможно только, если  $\dim V = 1$ .