

2. Показ при водимост линейных представлений

Опр 1 **Суммой** линейных представлений $\varphi_i: X \rightarrow \mathcal{L}(V_i)$,

$i = 1, \dots, m$, наз-ся лн. представление

$\varphi = \bigoplus_{i=1}^m \varphi_i: X \rightarrow \mathcal{L}\left(\bigoplus_{i=1}^m V_i\right)$, опред. правилом

$$(\nu_1, \dots, \nu_m)(x\varphi) = (\nu_1(x\varphi_1), \dots, \nu_m(x\varphi_m)) \quad \forall x \in X \quad \forall \nu_i \in V_i,$$

Предп 1 Если $\varphi: X \rightarrow \mathcal{L}(V)$ — лн. прел и $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$,

где V_i — инв. подпр-ия φ гл. образом $i = 1, \dots, m$, то

$$\varphi = \bigoplus_{i=1}^m \varphi_i, \text{ где } \varphi_i = \varphi|_{V_i}.$$

Л-во: из опр-я.

В матричной записи (в обобщенном базисе V_i):

$$[x\varphi] = \begin{pmatrix} [x\varphi_1] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [x\varphi_m] \end{pmatrix} \quad \forall x \in X.$$

Т. 1 (экв. опр-я линейной изоморфности) След. экв-я экв-нт.

- 1) $\varphi: X \rightarrow L(V)$ линейная изоморфность
(т.е. $V = \bigoplus V_i$, V_i - φ -инв. и $\varphi|_{V_i}$ изоморф. $\forall i=1..n$)
- 2) φ - сумма линейных изоморфизмов представлений
- 3) Для любого инв. отн-го φ найдутся U и W - $\varphi|_U$ - $\varphi|_W$ - V
найдутся инв. отн-го φ изоморф-во W : $V = U \oplus W$.

Зам. V - к-л. в.н.

1-во: Очевидно, что $1 \Leftrightarrow 2$ (ан.oup-х и пред. 1)

$3 \Rightarrow 1$) берем любое лев. иде. погр-во $V_1 < V$
(если $V = V_1$, то все доказано). Век $v \in V$ и $v \notin V_1$
 $V = V_1 \oplus W$, берем W - лев. иде. погр-во V_2 и т.д.
 $1 \Rightarrow 3$) Пусть $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ и $\varphi_i = \varphi|_{V_i}$ - линей.

Положим $V_I = \sum_{i \in I} V_i$ $\forall I \subseteq \{1, \dots, m\}$,

Пусть U - произв. φ -лев. погр-во. Взяв берем
 $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ максим. (можно взять такое),
что $U \cap V_I = 0$. Тогда $\forall j \notin I : U \cap V_{I \cup \{j\}} \neq 0$
 $\Rightarrow (U \oplus V_I) \cap V_j \neq 0$. Так V_j - лев. φ -лев. погр-во,
то $V_j \subseteq U \oplus V_I \Rightarrow V = U \oplus V_I$
Зам. из доказ-ва $\Rightarrow W$ лев. иде. V_I для $I = \{1, \dots, m\}$.

Следствие Если $\varphi: X \rightarrow \mathcal{L}(V)$ вполне упрямое
и φ — сумма линейных $\varphi_i, i=1..m$, то
какое-то подпр-е и факторизация
пр-я φ изоморфна сумме некоторых φ_i .
1-во: См. замечание после леммы 7.8.

Пример Мы знаем (см. 1N-91), что $|X| = 8 \Rightarrow$
линей. пр-е X по алг. зап. кодам омонорно \Rightarrow
какое-то вполне упр. пр-е детализуемо.
(это касается пр-я адельвей группы).
Зафикси. для вполне упр. пр-я $\varphi: X \rightarrow \mathcal{L}(V)$
разложение $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ (*)
в прямую сумму нек. лнз. подпр-в.

Т.2 (Машке) Пусть G -кон. группа, V -вл. над полем F .
 Если $\dim F \nmid |G|$, то любое нр. $\rho: G \rightarrow GL(V)$
 тривиально.

Д-во: См. также §11.2 из [ЗКК] и Т.3.3.1 из [Бот]

Лемма 1 (о невозможности разл.) Если S -аффин.
 нр-во над полем F , $G \leq GA'(S)$ - константная группа
 для нр- \bar{g} , существует $\dim F \nmid |G|$, то $\exists S \in \bar{S}$:

$$Sg = S \quad \forall g \in G.$$

Д-во: Пусть $0 \in \bar{S}$. Положим $S = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 0g$ -
 -центр \bar{S} (так как 0 - центр \bar{S}). В силу того, что
 $\frac{1}{|G|} \in F$ и $\sum_{g \in G} \frac{1}{|G|} = 1$, S -характеристическая л.к.

Точки из $S \xRightarrow{\text{f21as [Buch]}} S \in \mathcal{S}$. Кроме того,

$$\forall x \in G \quad Sx = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} og \right)x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} o(gx) = \\ = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} og' = S, \text{ где } g' = gx \quad \square$$

Лемма 2 Если V -в.н. н.о. F , $G \leq GL(V)$ —
кон. группа и $\text{char } F \nmid |G|$, то $\forall G$ -инв.
н.о. U в V найдется G -инв. н.о. W :
 $V = U \oplus W$.

Д-во: $p \in \mathcal{L}(V)$ — проектор на $U \Leftrightarrow p^2 = p$ и $\forall u \in U$
и $\forall v \in V \setminus U \quad pv = 0$. Заметим, что эти условия
задаются л.н. ур-ями в н.о. $\mathcal{L}(V) \Rightarrow \mathcal{P}$ -л.н.-во
всех проекторов на U — аффин. н.о.

Поэтому $\forall g \in G \quad \forall p \in P$ имеет место соотношение:

$$u p^g = u g^{-1} p g = u g^g = u \quad \forall u \in U \text{ и}$$

$$\sqrt{p}^g = \sqrt{g}^{-1} p g \in U \quad \forall \sqrt{g} \in V,$$

группа G действует на P сопряжением.

По лемме 1: $V = U \oplus W$ для любого G -инв. \Leftrightarrow

$P = P_U \cup P_W$ — проектор на U инвариантен на W перестановочен со всеми $g \in G$, т.е. является неизм. точкой относительно действия группы G . Существование

такого P — лемма 1 \Rightarrow искомого W — инв. с-во.

Лемма 2 Теорема: Достаточно лем. 1 и применить

лемму 2 к образцу G -группы G в $GL(V)$ \square

Опр 2 **Изоморфные компоненты** (компоненты, компоненты Вейерштресса) нр-я φ , отвечающей нпрнз, нр-ю φ мн-ва, наз-ся сумма $V(\varphi)$ тех слагаемых V_i разложения $(*)$, для которых $\varphi_{V_i} \cong \varphi$, а также ограничение $\varphi(\varphi)$ на эту сумму.

Зам. Если U - мн. φ -инв. подгрупп \mathbb{C}^n : $\varphi_U \cong \varphi$, то $U \subseteq V(\varphi)$. Это показывает, что изоморфные компоненты не зависят от выбора разложения $(*)$.

Из опр 2 $\Rightarrow V$ есть нр-ая сумма изоморфных компонент, отвечающих неэквивалентным нпрнз-ам нр-я φ мн-ва X .

В нашем примере ($|X|=1$ и F -алг. зм.) изотипные компоненты — погр-ва соотв. Врол оператора χ_ψ .

Лемма 3 Пр-е $\psi: X \rightarrow \mathcal{L}(U)$ **изотипно** (точнее, **ψ -изотипно**), если $\psi = \psi(\psi)$.

Изотипные представления описываются с. оператор $\psi: X \rightarrow \mathcal{L}(U)$ — линейное пр-е и Z -модуль (к.н.) в.н. Определим пр-е

$$(\ast 2) \quad \psi: X \rightarrow \mathcal{L}(U \otimes Z), \quad (u \otimes z)(x\psi) = u(x\psi) \otimes z.$$

Если z_1, \dots, z_m — базис Z , то $U \otimes Z = (U \otimes z_1) \oplus \dots \oplus (U \otimes z_m)$ ($\ast 3$)

Разомнем в правой члнх изл. погр-ва и

$$\psi U \otimes z_i \simeq \psi \quad \forall i=1 \dots m.$$

Предл 2 Если поле F алг. зам., то каноническое ^{ненулевое} инв. подпр-во
пр-ва $U \otimes Z$ имеет вид $U \otimes Z_0$, где $Z_0 \leq Z$.

Д-во: Пусть W — инв. подпр-во в $U \otimes Z$. Кетера
обобщения, можно считать, что W — инв. подпр-во.
В силу (*) $\forall w \in W$ имеем

$w = w \otimes_1 z_1 + \dots + w \otimes_m z_m$, где $\theta_i, i=1 \dots m$,
— морфизмы пр-в φ_W в пр-е ψ .

В силу следствия 1 из т. 13.1.1 (лемма (1) из
прошлой лекции) все θ_i пропорциональны, т.е.

$\theta_i = \lambda_i \theta$, где θ — фикс. изоморфизм пр-в φ_W в ψ .

Таким образом, $w = w \otimes (\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_m z_m) \Rightarrow$
 $W = U \otimes \langle \lambda_1 z_1, \dots, \lambda_m z_m \rangle$ \square

Упр 1 Δ -алгебра F алг. замк, то каноничн инд-морфизм $u \mapsto (*2)$ имеет вид $u \otimes z \mapsto u \otimes Az$, где $A \in L(Z)$.

Т. 2 (Берксайнд) Пусть $\varphi: X \rightarrow L(V)$ линей. представ. лн-ва X над алг. зам. F . Тогда подалгебра $A = \langle X\varphi \rangle_{\text{алг.}}$ совпадает с алгеброй $L(V)$, если $\dim V = 1$ и $\varphi = 0$, Зам. Подалгебра, а не образ (NB) !

Л-во: Отождествим $L(V) \subset V \otimes V^*$, соотв. образом

различному $u \otimes L \in V \otimes V^*$ лн. оператор

$u \otimes L: v \mapsto L(v)u$. При этом $\forall A \in L(V)$ имеет

$$(u \otimes \alpha)A = uA \otimes \alpha \quad \text{и} \quad A(u \otimes \alpha) = u \otimes \alpha A^* \quad (*)4$$

где A^* — сопр. оператор, т.е. $(\alpha A^*)(v) = \alpha(vA)$.

Напомним, что линейная канон. соот-е между

подпространствами $U \subseteq V$ и $U^\perp = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(u) = 0 \forall u \in U\} \subseteq V^*$

(см. определение § 5.2 в [ВЧК], в частности, следствие

г. 5.2.3). Поэтому уп-е $\varphi^*: X \rightarrow L(V^*)$ поф-е

$\alpha(\varphi^*x) = \alpha(x\varphi)^* \quad \forall x \in X \quad \forall \alpha \in V^*$, невырождено

Определим уп-я τ_ℓ и τ_r из X в $L(V)$ ф-ми:

$$A(x\tau_\ell) = (x\varphi)A \quad \text{и} \quad A(x\tau_r) = A(x\varphi) \quad (*)5$$

В lemma (*) τ_ℓ и τ_r изотипичны.

Нужно проверить, что $A = \langle \varphi \mid \varphi \in X \rangle_{\text{ли}} -$ линейное в $\mathcal{L}(V)$, убедиться, что $\varphi \in \mathcal{L}_L$ и \mathcal{L}_R .

Зад 2 Проверить по следующему задаче!

В задаче упр. 2 $A = V \otimes (V^*)_0 = V_0 \otimes V^*$,
 где V_0 и $(V^*)_0$ — линейные в V и V^* соответственно,
 Если $A \neq 0$, то $\Rightarrow A = V \otimes V^* = \mathcal{L}(V)$.

Если $A = 0$, то $\dim V = 1$ и $\varphi = 0$

Зад 4 **Тензорное произведение** упр. 5 $\varphi: G \rightarrow GL(V)$
 и $\psi: H \rightarrow GL(W)$ пусть G и H — это группы
 $\varphi \otimes \psi: G \times H \rightarrow GL(V \otimes W)$ по формуле $(g, h)(\varphi \otimes \psi) = g\varphi \otimes h\psi$.

Прел. 3 Если F алг. зам., то тензорное n -е
 векторное n -е \tilde{F} группы n F и n тоже неприводимо.
 Упр 3. Δ -то Прел. 3

Опр 5 Вполне приводимое n -е $\varphi = \bigoplus_{i=1}^n \varphi_i$
 имеет простой спектр, если неприводимые
 представления $\varphi_i, i=1 \dots n$, попарно неэквивалентны.
 Иными словами, все изотипные компоненты φ
 неприводимы (сам все φ_i изотипные n -е).

Пример $|X|=1$ и F алг. зам. $\Rightarrow (\varphi: X \rightarrow M_n(F))$
 имеет простой спектр $\Leftrightarrow \chi_\varphi$ имеет простой спектр $(\lambda_i \neq \lambda_j, \text{ или } i \neq j)$

Препод 4 Пусть $\varphi: X \rightarrow L(V)$. Вспомогательное представление ψ с собственными значениями λ_i и $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ — такое, что разложение (4) в сумме линей. φ -инв. подпр. ψ . Тогда

1) U — φ -инв. подпр. $\Rightarrow U = \bigoplus_{i \in I} V_i$, $I \subseteq \{1, \dots, n\}$

2) если F алг. зам., то каждый инвариантный подпр. φ имеет вид $x\varphi = \lambda_i x$ при $x \in V_i$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$).

Лемма: 1) $U = \bigoplus_{i=1}^k U_i$, U_i — линей. φ -инв. подпр. \Rightarrow

Т.е. φ имеет проп. инв. подпр. $\Rightarrow \forall i=1, \dots, k \exists j=1, \dots, m$
 $U_i = V_j$ и $U_i \neq V_j$ при $i \neq j$.

2) Каноническое разложение (4) — единственно
 канонич. \Rightarrow инв. подпр. $\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^n U_i$ $x\varphi = \lambda_i x$ при $x \in V_i$

Средство Для вполне определенного пр-ва с
просто спектром разложения (х) единственно.