

#### 4. Линейные представления конечных групп

Напоминание:  $\varphi: G \rightarrow GL(V)$  - линейное представление группы  $G$ , если  $\varphi$  - (групповой) гомоморфизм, т.е.  $\forall x, y \in G \quad (xy)\varphi = x\varphi y\varphi$  и  $e\varphi = E$ , где  $e$  - нейтр. элем. гр.  $G$  и  $E$  - тождеств. пр-е на  $V$ .

В частности,  $\text{Ker } \varphi = \{x \in G: x\varphi = E\}$ .

Пр-е  $\varphi$  наз-ся **точным**, если  $\text{Ker } \varphi = 1$ , и **тривиальным**, если  $\text{Ker } \varphi = G$ .

Использовать теорию л.м. ассоциативов и их представлений для изучения представлений конечных групп позволяет след. определение.

Опр 1 Пусть  $G$  - кон. группа,  $F$  - поле. **Групповый**  
**алгебра** группы  $G$  над полем  $F$  наз-ся алгебра  
 $FG$ , базисные элементы которой записаны  
 элементами группы  $G$ , причём произведение базисных  
 элементов с номерами  $g, h \in G$  есть баз. элемент с номером  $gh$ .

Зам. Отличаясь базисные элементы с их "номерами",  
 получаем вложение  $G \subseteq FG$ . В этом случае  
 произв. элементов из  $FG$  записывается

$$a = \sum_{g \in G} a_g g, \text{ где } a_g \in F \forall g \in G. \quad (*)$$

Пред 1 а)  $A = FG$  - ассоц., к.м. алгебра с 1.

б) Имеется в з. фазы. соот-е между алк.  
 гр-ми  $G$  и алгебр  $A = FG$ , при чем  
 центральный в  $G$  соотв. центр. гр-и  $A$  и  
 наоборот.

Л-во: а) Очевидно  $\forall G$  алгеб.,  $|G| < \infty$  и  $e \in G$ .

б) Если  $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ , то  $\tilde{\varphi}: A \rightarrow L(V)$   
 по правилу  $(\sum_{g \in G} a_g g) \tilde{\varphi} = \sum_{g \in G} a_g (g \varphi)$  — лев. гр-е  
 алгебры  $A$  (говорят, что  $\tilde{\varphi}$  индуцирует  $\varphi$ ).

Обратно, ограничение алк. гр-и  $A$  на  $G$   
 — лев. гр-е в  $G$ . Пусть  $U \subseteq A$  и  $V$  инв. под-пр-е  
 $\varphi \Leftrightarrow U$  инв. под-пр-е  $\tilde{\varphi}$ . В частности,  $\varphi$  центр.  
 $\Leftrightarrow \tilde{\varphi}$  центр.

Мы будем часто использовать  $\varphi$  вместо  $\varphi$  и наоборот.

Всюду далее  $|G| = n = \dim FG$ .

Т. 1 Если  $\text{char } F \nmid n$ , то  $A = FG$  полупроста.

$\Delta$ -до: Восм. н. 1 Т. 13.3.2 (см. AN-83). Если  $\varphi$  —

— первое первич. м.р. в алгебре  $A$ , то  $\forall g, h \in G$  имеем

$$(*)2) \text{tr}(gp) = \begin{cases} p^n, & g=e \\ 0, & g \neq e \end{cases} \Rightarrow (g, h) = \text{tr}(gh)p = \begin{cases} p^m, & gh=e \\ 0, & gh \neq e. \end{cases}$$

При  $\text{char } F \nmid n \quad \forall g \in G \quad \exists h = g^{-1} \in G : (g, h) \neq 0 \Rightarrow$

скл. м.р. в неразрешено  $\Rightarrow A$  полупроста  $\square$

Далее (если не оговорено особо) считаем  $\underline{\underline{F = \mathbb{C}}}$ .

результат пред. параграфа (Т.5 из АН-93) + Г.1  $\Rightarrow$

$$A = \mathbb{C}G \simeq \bigoplus_{j=1}^S M_{n_j}(\mathbb{C}) \text{ где нек-р. } S \in \mathbb{N}.$$

Т.2 Группа  $G$  имеет ровно столько эквивалентных классов конечное число неприводимых комплексных представлений. Их размерности  $n_1, \dots, n_S$  удовл. рав-ву:

$$(*)3) \quad n_1^2 + \dots + n_S^2 = n \quad (= |G|),$$

а их число  $S$  равно числу классов сопряженных эл-тов группы  $G$ .

Д-во: Первое утвер-е вытекает из следствия 2

Т-м 13.3.5 (АН-93), а соотношение  $(*)3)$  из ф-лы  $(*)6)$  в Т-ме 13.3.5. По сл. 1 и 3 те же Т-м  $S = \dim(Z(\mathbb{C}G))$ .

Найдем  $Z(A)$ , где  $A = \mathbb{C}G$ .  $\exists n-1 a \in Z(A) \Leftrightarrow \forall h \in G$   
 $a = h^{-1} a h = h^{-1} (\sum a_g g) h = \sum a_g (h^{-1} g h)$ .

Последнее означает, что коэф-ты при сопряженных  $n-1$ -х элементах будут одинаковы. Сл-но,  $Z(A)$  есть лев. идеал  $\sum_{g \in C} g$ , где  $C = \{h^{-1} g h \mid h \in G\}$  — класс сопряженных  $n-1$ -ов, представляемых  $g$ , а  $\dim Z(A) =$  число классов сопр.  $n-1$ -ов  $\square$

Пример 1 Если  $G$  абелев, то  $S = |G|$ , т.к. все классы сопр.  $n-1$ -ов  $\xRightarrow{(\ast 3)} \forall i=1..S, n_i=1$ , т.е. все ненулев. представления гр.  $G$  одномерны, что согласуется со следствием 2 из леммы (1) (на  $(A, N-31)$ ).

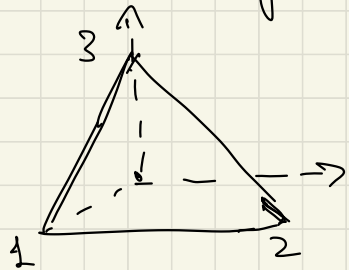
Пример 2 Если  $\varphi: G \rightarrow GL(V)$  и  $\dim V = 1$ , то  $\text{Im } \varphi$  абелева группа  $\Rightarrow \text{Ker } \varphi \geq G'$  - коммутант группы  $G$ .  
Иными словами одномерные представления  $G$  сводятся к представлениям аб. группы  $G/G'$ .  
В частности,  $G = G' \Leftrightarrow G$  имеет только трив. одномерное представление.

Упр 1 Показать, что  $|G| = 24 \Rightarrow G \neq G'$ .

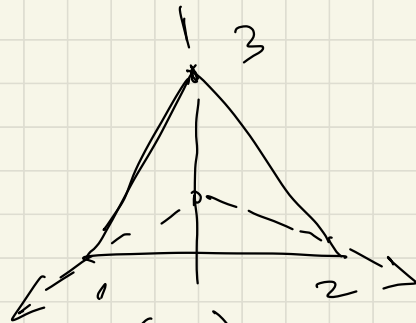
Упр 2 Группа  $S_n$  ( $n \geq 2$ ) имеет ровно 2 неупр. одномерных упр-я тривиальное (т.е.  $G\varphi = 1$ ) и  $\text{sgn}: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  - знак перестановки.

Пример 3  $G = S_3$ . Для  $G$  имеются след. неув. ур-я:

- 1)  $\varphi_1$  — присоединное (одномерное)
- 2)  $\varphi'_1 = \text{sgn}$  — знак перестановки (одномерное)
- 3)  $\varphi_2: G \rightarrow S_3 \leq GL_2(\mathbb{R}) \leq GL_2(\mathbb{C})$  в группу симметрий ур.б. тетра:



или



$$\varphi_2: (12) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2: (123) \rightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2: (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2: (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Проверьте, что  $\varphi_3$  неприводимо над  $\mathbb{C}$ !



Согласно го экв-ии то все (наз С), так как  
 $l$  аны  $\phi$  и  $m$  (из) изт. 2  $n=6=1^2+1^2+2^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2$ ,

Упр 3 Покажите, что  $l$  е непривод. (компл) представ-  
 ления группы  $S_4$  таковы:

$\varphi_1$  — тривиальное;  $\varphi_1'$  — знак;  $\varphi_2: G \rightarrow G/K_4 \cong S_3 \rightarrow S_\Delta$   
 композиция гом-зак  $S_4 \rightarrow S_3$  и  $\varphi_2$  (dim  $\varphi_2 = 2$ ).  
 $\varphi_2$  — пример 3;

$\varphi_3: G \rightarrow R$  — изоморфизм на группу Вейля  $W$  от  $\varphi_2$

$\varphi_3': G \rightarrow T$  — изоморфизм на группу симметрии тетраэдра.

Зам. Из примера 3 и упр 4 вытекает, что все  
 непривод. компл. представления гр.  $S_3$  и  $S_4$  явл-ся  
 комплексификациями соотв. вещ. представлений.  
 Оказывается это верно и для  $S_n$  при любом  $n$ .

Упр 4 Опишите все непривод. представления группы  
диэдра  $D_n$  (группа симметрий  $n$ -угольника).

Упр 5 Докажите, что каждое непривод. представление  
гр.  $G \times H$  есть тензорное произведение представлений  
гр  $G$  и  $H$  (см. упр 4 и упр. 3 в АН-92).