6. Алгебры с делением

__Опр1__ Ассоц. кольцо с 1, в котором каждый ненул. эл-т обратим наз-ся **телом**. Алгебра, явл. телом, наз-ся **алгеброй с делением**.

$\boxed{\text{Тело всегда содержит } \underline{1}.}$

Если к.м. алгебра A над $\mathbb{R}$ явл-ся полем, то из алг. зам. поля $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $A = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Если A — тело, то к $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ добавл. по крайней мере алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ (см. упр. 2.7.2 из __AN-1__).

Мы докажем здесь, что других нет (т-ма Фробениуса).

Алгебры с делением естеств. образом возникают при рассмотрении неприв. мн. представлений над алгебраически не замкн. полями. А именно,

Пусть $\varphi: X \to \mathcal{L}(V)$ – неприв. неприв. пр.-е X над полем F.
Пусть $D = \mathrm{Hom}_F(V, V)$ – совокупность эндоморфизмов
пр-я φ. Очевидно, D – подалгебра в $\mathcal{L}(V)$. В
силу предл. 13.1.2 (см. AN-91) каждый ненул. эл-т в D
обратим $\Rightarrow$ D – алгебра с делением. $\Rightarrow$ V можно
р-ть как в.п. над D $\Rightarrow$ $X\varphi \subseteq L_D(V)$. Аналог т.
Бернсайда $\Rightarrow$ $\langle X\varphi \rangle_{\text{алг}} = L_D(V)$. Аналог т. 13.3.4
$\Rightarrow$ каждая простая к.м. асс. алгебра над $F \simeq L_D(V)$
для некот. в.п. V над F-алгеброй D с делением.
В частности, из т. Фробениуса $\Rightarrow$ неприв. пр-я
над $\mathbb{R}$ разбиваются на 3 типа по алгебре
$D = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$.

Центр тела D — это $Z(D) = \{z \in D : za = az \ \forall a \in D\}$ — это поле. D можно р-ть как алгебру с делением над $Z(D)$. Обратно, если D — алг. с делением над F и 1 — единица в D, то отождеств. с $\{\lambda 1 \mid \lambda \in K\} \subseteq Z(D)$.

Алгебра D наз-ся центральной, если $K = Z(D)$.

Мн-во $D^* = D \setminus \{0\}$ — группа по умножению.

Ясно, что в теле (как и в поле) нет делителей нуля.

Упр1 Если A — к.м. ассоц. алгебра, то A — алгебра с делением $\Leftrightarrow$ в A нет делителей нуля.

Понятие обобщенной алгебры кватернионов:

$D(\alpha, \beta) = \langle i, j \mid i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij = -ji, \ \alpha, \beta \in F^* \rangle$ над F.

подробнее см. в §11.6 из [ВИН].

$\mathbb{H} = D(-1,-1)$ — обычная алгебра кватернионов (Гамильтон, 1843).

<u>Предл 1</u> Пусть D — к.м. алгебра с делением над полем F. Если $x \in D$, то $F[x]$ — комм подалгебра $\Rightarrow F[x] \leq Z(D)$. В частности, если F алг. зам., то $D = F$.

<u>Д-во:</u> Очевидно.

Пусть A — алгебра над F, P — расш. поля F. В.п. $A(P) = P \otimes_F A$ можно превратить в алгебру над P, определив умножение правилом

$$(\lambda \otimes u)(\mu \otimes v) = \lambda\mu \otimes uv \quad \forall \lambda, \mu \in P,\ u, v \in A.$$

Отождествляя $a \in A$ с $1 \otimes a \in A(P)$, получаем вложение A в $A(P)$. Если $e_1, \dots e_n$ — базис A над F, то

Структурные константы c_{ij}^k, где $e_i e_j = \sum c_{ij}^k e_k$, определяют умножение в A, т.е. все структурные константы определяют умножение в базисе $1\otimes e_i$, $i=1..n$, в алгебре $A(P)$ над P. Однако в $A(P)$ могут существовать другие базисы, в кот. структурные константы имеют более простой вид.

<u>Предл 2</u> Полупростая к.м. ассоц. алгебра A над полем F нулевой хар-ки остается полупростой при переходе к любому расширению P поля F.

<u>Д-во:</u> Восп. критерием полупростоты (Т.13.3.2 из AN-93).

A - полупроста и $\operatorname{char} F = 0 \Rightarrow$ скал. пр.е невырождено.

$\Rightarrow$ м-ца Грамма в базисе $e_1 \ldots e_n$ алг. A невырождена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ м-ца Грамма в $1\otimes e_1, \ldots 1\otimes e_n$ алг. $A(P)$ такая же $\Rightarrow$ она

неприводим $\Rightarrow$ $A(P)$ полупроста по той же теореме.
См. применение этой идеологии для док-ва т-мы о примитивном эл-те (или док-ва в т. Галуа) в [ВИН].

Очевидно, что каждая алгебра с делением — простая.

<u>Предл 3</u> К.м. алгебра с делением над F остаётся простой при переходе к любому расширению P поля F.

<u>Д-во:</u> Предл. 11.6.2 из [ВИН].

<u>Т.1</u> Пусть D — центр. к.м. алгебра с делением над K. Сущ-ет такое кон. расш. P поля K, что $D(P)\simeq M_n(P)$ для некот. $n\in\mathbb{N}$. В частности, $\dim D = n^2$.

<u>Опр 2</u> Число n из Т.1 — степень алгебры D. Обозн: $\deg D = n$

__Т.__ В обозн. т. 2, каждое макс. подполе F алгебры D имеет разм. n над K. Каждый изоморфизм макс. подполей продолжается до внутреннего автоморфизма алгебры D.

Д-во т. 1 и т. 2 см [ВИН] §6 гл. 11.

__Т. 3__ (теорема Фробениуса) Каждая к.м. алгебра с делением D над $\mathbb{R}$ изоморфна либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{H}$.

__Т. 4__ (теорема Веддербёрна). Конечное тело — поле.