① Кольца алгебраических целых элементов

1. Локализация

Опр 1 Кольцо R наз-ся **локальным**, если в нём только один максим. идеал

Примеры $\mathbb{F}$ — поле — локальное, т.к 0 — ед. макс. идеал

$\mathbb{Z}$ не локально, т.к. $p\mathbb{Z} \trianglelefteq_{max} \mathbb{Z}$ $\forall$ просто p

Пр 1 Пусть M — макс. идеал в кольце R.

R локально $\Longleftrightarrow$ $1+x$ обратим $\forall x \in M$

Упр 1 Д-ть т. 1. **Упр 2** $\mathbb{Z}_n$ локально $\Longleftrightarrow n = p^k$ для просто p.

Пусть R область целостности. Напомним, что тогда определено поле частных $Q(R)$ этого кольца, т.е. „дробей" $\frac{p}{q}$, где $p,q \in R$ $q \neq 0$ и $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow pb = qa$.

$(\varnothing \neq)\, S \subseteq R$ - мультипликативно, если $ab \in S$ $\forall a,b \in S$

Лемма 1 Если S - мультиплик. подмн-во области целостности R, то $R_S = \{ f/g \mid g \in S \} \subseteq Q(R)$ - подкольцо в $Q(R)$.

Т.к. $R_S = R_{S \cup \{1\}}$, то далее считаем, что $1 \in S$. $\Rightarrow R \subseteq R_S$ $r \mapsto r/1$

Пример Если $S = R$, то $R_S = Q(R)$.

Опр 2 Кольцо R_S наз-ся локализацией кольца R относительно (мультипл.) мн-ва S.

Напомним, что идеал I кольца R прост, если $\forall a, b \in R$ $ab \in I \Rightarrow a \in I$ или $b \in I$ (I прост $\Leftrightarrow R/I$ – обл. целостн.)
В частности, максим идеал всегда прост.

<u>Т. 1</u> Пусть R – обл. целостности, $S \subseteq R$ мультипликативно. Тогда сущ-ет вз.-одн. соответствие между простыми идеалами в R, не пересекающимися с S, и простыми идеалами локализации R_S, где $p \mapsto p_S = pR_S$.

<u>Д-во:</u> $\Rightarrow$) Пусть p – простой идеал в R, $p \cap S = \varnothing$.
Пусть $q = \{\frac{a}{s} \mid a \in p, s \in S\} = pR_S$. Тогда $q \trianglelefteq R_S$.
если $r = \frac{a}{s}, r' = \frac{a'}{s'} \in R_S$ и $rr' \in q$, то $rr' = \frac{\tilde{a}}{\tilde{s}}$. Поэтому $aa'\tilde{s} = ss'\tilde{a} \in p$. Т.к $S \cap p = \varnothing$, то $\tilde{s} \notin p \Rightarrow a \in p$ или $a' \in p \Rightarrow$ r или $r' \in q \Rightarrow q$ – простой.

Наконец, покажем, что $p = q \cap R$. Очевидно, что $p \subseteq q \cap R$.
Обратно, если $r \in q \cap R$, то $r = a/s \Rightarrow rs = a \in p$.
Т.к. $s \notin p$, то $r \in p$.

$\Leftarrow$) Пусть $q \trianglelefteq_{\text{прост}} R_S$. Положим $p = q \cap R$.
Тогда из простоты $q \Rightarrow p$ — простой идеал в R.
Ясно, что $p_S = pR_S \trianglelefteq R_S$ и $p_S \subseteq q$. Покажем, что
$q \subseteq p_S$. Пусть $a/s \in q$. Тогда $a = \frac{a}{s} \cdot s \in q \cap R = p$
$\Rightarrow a \cdot (1/s) \in p_S \Rightarrow q = p_S$. Т.к. $q \neq R_S$, то
q не содержит обр. эл-тов $\Rightarrow p \cap S = \varnothing$ ■

Если p — простой идеал в R и $S = R \setminus p$, то S мультипл.
$R_p = R_S$ — локализация кольца R относительно простого идеала p.

Следствие Пусть p – простой идеал обл. целостности R, Тогда локализация R_p – локальное кольцо.

Д-во: По теореме 1 $q = pR_p = \{ \frac{a}{s} \mid a \in R, s \notin p \}$ – простой идеал в R_p. Пусть I – макс. идеал в R_p. Тогда I прост. По т. 1 он имеет вид $I = rR_p$ для простого идеала r в R т.ч. $r \cap (R \setminus p) = \emptyset$ $\Rightarrow r \subseteq p \Rightarrow I = rR_p \subseteq q = pR_p$. Из макс. $I \Rightarrow$ $I = q = pR_p$ $\blacksquare$

2. Целая зависимость

Напоминание о расширениях полей:
алг., транс., конечн.

Опр 1 Пусть $A \subseteq R$ — подкольцо кольца R. Эл-т $r \in R$ наз-ся **целым** над A, если сущ. унитарный (ст. коэф = 1) мн-н $f(x) \in A[x]$ т.ч. $f(r) = 0$.

Ур-е $f(x) = 0$ — ур-е целой зависимости для r.

Комплексное число $z \in \mathbb{C}$ наз-ся **алгебраическим целым**, если z цело над кольцом $\mathbb{Z}$.

Предл. 1 (св-ва целой зависимости) Пусть для $A \subseteq R$ и $r \in R$.

(1) r цел над A

(2) $A[r]$ — к.п. A-модуль

(3) $A[r] \subseteq B$, где B — к.п. A-модуль

(4) Сущ-ет точный $A[r]$-модуль M т.ч. M — к.п. как A-модуль.

Упр 3 Д-ть предл. 1

Опр 2 Пусть A — подкольцо в R.
$\overline{A}^R = \{r \in R \mid r$ цел над $A\}$ — целое замыкание A в R

Т. 1 $\overline{A}^R$ — подкольцо в R.

Д-во: Лемма 4 Если $r_1, \dots r_n$ целые над A, то
$A[r_1 \dots r_n]$ — к. п. A-модуль

Д-во см. выш. предл.

Пусть $b, c \in R$ — целые над A. Тогда $b \pm c, b \cdot c \in B =$
$= A[b, c]$ — к. п. A-модуль в силу леммы.
Экв-сть (3) $\Leftrightarrow$ (1) из предл. $\Rightarrow$ $b \pm c$, $b \cdot c$ — целые над A,
что и требовалось.

Предл 2 (транзитивность целой зависимости)

$A \leq B \leq C \leq R$ C цело над B, B цело над $A \Rightarrow$

C цело над A.

Д-во: $r \in C$ и $0 = f(r) = r^n + b_{n-1}r^{n-1} + \ldots + b_0$, $b_i \in B$

$\Rightarrow r$ цел над $A[b_{n-1}, \ldots b_0]$ — к.п. над A.

$\uparrow$ лемма

$\Rightarrow (A[b_{n-1}, \ldots b_0])[r]$ — к.п. A-модуль. Слова по

предл 1 r цел над A $\blacksquare$

Следствие 1 $\overline{\overline{A}^R}^R = \overline{A}^R$, т.е. целое замыкание

целого замыкания совпадает с ним самим.

Д-во: Если $r \in R$ цел над $\overline{A}^R$, то предл 2 он

цел и над A. $\Rightarrow r \in \overline{A}^R$ $\blacksquare$

Опр 3 Область целостности R **целозамкнута**, если $\overline{R}^{Q(R)} = R$, т.е. целое замыкание в поле частных $Q(R)$ совпадает с ней самой.

Пример $\mathbb{Z}$ целозамкнуто в $\mathbb{Q}$, т.к. $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$ для $f(x)=a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то $q \mid a_n$, т.е. $a_n = 1 \Rightarrow q = 1$ $\blacksquare$

Следствие 2 Если A — обл. целостности и L — алг. расширение поля частных $Q(A)$, то $\overline{A}^L$ целозамкнуто.

Д-во Т.к. $Q(\overline{A}) \subseteq L$ $\overset{\text{предл 2}}{\Longrightarrow}$ $\overline{\overline{A}^L}^{Q(\overline{A})} = \overline{A}^L$ $\blacksquare$

опр. алг. расш.

Теорема 2. Факториальная обл. целостности A целозамкнута

Д-во: Пусть $r = \frac{a}{b} \in Q(A)$, где $a, b \in A$ и $(a,b) = 1$.

Если r цел над A, то $\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \ldots + c_1 a/b + c_0 = 0$ для некот. $c_i \in A$. Отсюда $a^n + b\tilde{c} = 0$ для некот. $\tilde{c} \in A \Rightarrow b \mid a^n$. В силу $(a,b) = 1$ и факт-сти кольца A получаем, что b – обр. эл-т в $A \Rightarrow r = a/b \in A$. ∎

Предл 3. Пусть R – целозам. обл. целостности, $S \subseteq R$ мультипликат. подмн-во. Тогда локализация R_S тоже целозамкнута.

Д-во: Пусть $x \in Q(R)$ цел над R_S. Тогда

$h(u)=0$, где $h(x)=x^n+\left(\frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}\right)x^{n-1}+\ldots+r_0/s_0$

$r_i\in R$, $s_i\in S$. Обозначим $s=s_0\ldots s_{n-1}$. Тогда

su — корень мн-на $x^n+r'_{n-1}x^{n-1}+\ldots+r'_0$, где $r'_i\in R$.

Из целозамк. $R \Rightarrow su\in R \Rightarrow u=su/s\in R_S$ ■

<u>Опр 4</u> Конечное расш. поля $\mathbb{Q}$ наз-ся алгебраическим числовым полем.

Пусть K — алг. числовое поле. Обозначим O_K — кольцо алг. целых эл-ов из K, т.е. те $r\in K$: $f(r)=0$ для некот. унит. $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$.

Предл. 4. O_K — целозамкнуто | Д-во: вытекает из сл-я 2 к предл. 2.

Пример Кольцо $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ не целозамк. $\Rightarrow$ не факториально

Действ-но, $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ удовл. соотн-ю $\dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{1-a}$ — это так называемое золотое сечение. Поэтому $f(a) = 0$ для $f(x) = x^2 + x - 1$. Значит, a цел над A, но $a \notin A$.