(5) Группа единиц

Опр 1 Единица кольца A — обратимый элемент „unit" (not identity element)

O_L^* — группа единиц числ. алг. поля L.

Лемма 1 $x \in O_L$ обратим $\iff N_{L/\mathbb{Q}}(x) = \pm 1$

Д-во: $x \cdot x^{-1} = 1 \Rightarrow N(x) N(x^{-1}) = N(1) = 1$.

Но $N_{L/\mathbb{Q}}(x) \in \mathbb{Z}$ т.к. коэф-т $char^x_{L/\mathbb{Q}}(t) \in \mathbb{Z}$ в силу следствия из т. 1.3.1 см. ANT 2 $\Rightarrow N(x) = \pm 1$.

Если $N_{L/\mathbb{Q}}(x) = \pm 1 \Rightarrow char^x_{L/\mathbb{Q}}(t) = t^n + \dots + a_1 t + (-1)^n N_{L/\mathbb{Q}}(x)$

$\Rightarrow x(x^{n-1} + \dots + a_1 x) = \pm 1 \Rightarrow x \in O_L^*$ ∎

Пусть $|L:\mathbb{Q}| = n$ и $\sigma_1 \dots \sigma_r, \sigma_{r+1}, \overline{\sigma_{r+1}}, \dots \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+s}}$ — $\mathbb{Q}$-вложения L в $\mathbb{C}$, среди которых только $\sigma_1 \dots \sigma_r$ от-ют L в $\mathbb{R}$, т.е. $n=r+2s$.

Опр 2 Логарифмическое вложение $\ell : \mathcal{O}_L^* \to \mathbb{R}^{r+s}$:

$$\ell(x) = (\ln|\sigma_1(x)|, \dots, \ln|\sigma_r(x)|, \ln|\sigma_{r+1}(x)|, \dots \ln|\sigma_{r+s}(x)|), x \in \mathcal{O}_L^*$$

Лемма 2 $\ell : \mathcal{O}_L^* \to \mathbb{R}^{r+s}$ — гом-зм групп. В частности, $\ell(\mathcal{O}_L^*) \leqslant \mathbb{R}^{r+s}$.

Д-во: $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$ и $\ell(x^{-1}) = -\ell(x)$ ∎

очевидно

Лемма 3 Пусть X — огран. подмн-во в $\mathbb{R}^{r+s}$. Тогда $X' = \{x \in \mathcal{O}_L^* \mid \ell(x) \in X\}$ конечно.

Д-во: Т.к. X ограничено, $|\sigma_i(x)| < C$ $\forall x \in X'$, $i = 1, \ldots, r+s$, где C — некот. конст. Тогда эл-ты элем. симм. мн-ов от $\sigma_i(x)$ для $x \in X$ тоже ограничены константой C'. В силу следствия из т. 1.3.1 (АНТ2) для $x \in O_L^*$ коэфф-ты мн-ов $\chi_{L/\mathbb{Q}}^x(t)$ и $\mu_{\mathbb{Q}}^x(t)$ — целые числа. Т.к. эти коэфф-ты $\chi_{L/\mathbb{Q}}^x(t)$ выр-ся через элем. сим. мн-ны от $\sigma_i(x)$, то при $x \in X'$ имеется только кон. число $\chi_{L/\mathbb{Q}}^x(t)$ $\Rightarrow$ имеется только кон. число их корней $\Rightarrow$ т.к. x — корень $\chi_{L/\mathbb{Q}}^x(t)$, то таких x тоже кон. число.

Следствие 1 $\ell(O_L^*)$ — решётка в $\mathbb{R}^{r+s}$.

Д-во: В силу п. 2 $H = \ell(\mathcal{O}_L^*)$ — дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^{r+s} \Rightarrow H$ — решётка (не обяз. полная) ▣

Следствие 2 $\mu_L = \ker \ell = \{x \in \mathcal{O}_L^* \mid x$ — корень из 1 в $L\}$ — конечная циклическая группа.

Д-во: Положим в п. 2 $X = \{0\}$. Имеем $\mu_L = \ker \ell = X'$ конечно. Т.к. μ_L — конечная подгруппа в поле $L \Rightarrow \mu_L$ — циклическая (см., например, Винберг, Т. 9.17). По т. Лагранжа $\forall x \in \mu_L \ \exists m \geq 1 : x^m = 1$. Пусть теперь $x \in \mathcal{O}_L^*$ и $\exists m \geq 1 : x^m = 1$. Тогда $\forall i \ \sigma_i(x)^m = 1$. $\Rightarrow |\sigma_i(x)^m| = |\sigma_i(x)|^m = 1 \Rightarrow |\sigma_i(x)| = 1 \Rightarrow x \in \ker \ell = \mu_L$. ▣

Т.1 (Дирихле) Пусть L - алг. числовое поле. Тогда $O_L^* \simeq \mathbb{Z}^{r+s-1} \times \mu_L$.

Д-во: Мы докажем только, что $O_L^* \simeq \mathbb{Z}^t \times \mu_L$, где $t \leq r+s$. Действ-но, по следствию 1 из л. 2 $l(O_L^*) \simeq \mathbb{Z}^t$, $t \leq r+s$, а по следствию 2 $\ker l \simeq \mu_L$.

Т.к. O_L^* - конечно-порожд. абелев группа, то $O_L^* \simeq \mathbb{Z}^m \times A$, где A - кон. группа, причём m опр-но однозначно. Имеем $l(O_L^*) \simeq O_L^* / \ker l \simeq O_L^* / \mu_L \simeq \mathbb{Z}^t$

$\Rightarrow m = t$ и $A \simeq \mu_L$ ∎

Зам. $t = r+s-1$ использует т. Минковского (см. Губарев).

<u>Опр 3</u> Набор $u_1, \dots u_{r+s-1} \in O_L^*$ т.ч. $\ell(u_1) \dots \ell(u_{r+s-1})$ – базис решетки $\ell(O_L^*)$ наз-ся набором основных единиц кольца O_L.

<u>Упр 1</u> Д-ть, что

а) $O_L^* \simeq \langle i \rangle$, $L = \mathbb{Q}(i)$, где i – мнимая единица.

б) $O_L^* \simeq \{\pm 1\} \times \{\omega^i \mid i = 0, 1, 2\}$, $L = \mathbb{Q}(\omega)$, где ω – прим. корень 3-ой степени

в) $O_L^* \simeq \mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

г) Получите результаты пп. а) б), используя только лемму 1 (без т. Дирихле).

<u>Упр 2</u> Пусть $m \in \mathbb{Z}$ — своб. от квадратов, $L = \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$

а) при $m < 0$ найти O_L^*

б) при $m > 0$ указать способ, как искать O_L^*

и найти O_L^* для всех $m \le 17$.